9. Übung zur Physik B2 für Nebenfächler SS 2018

Ausgabe: 07.06.2018
Abgabe: bis 13.06.2018 14:00 Uhr
Briefkästen: 247-249

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Induzierte Spannung

Ein unendlich langer Draht wird von dem zeitabhängigen Strom $I(t) = I_0 \cos \omega t$ durchflossen. Berechnen Sie die induzierte Spannung in einer rechteckigen Leiterschleife, die sich im Abstand R vom Draht befindet.

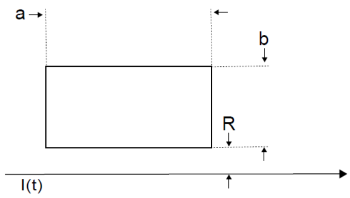

Abbildung 1: Unendlich langer Draht und Leiterschleife

Lösung:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} I = \frac{\mu_0}{2\pi R} I_0 \cos \omega t$$

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial A} \vec{E} d\vec{r} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{A} B d\vec{A} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{0}^{a} \int\limits_{R}^{b+R} \frac{\mu_0}{2\pi R} I_0 \cos \omega t \, dz \, dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{0}^{a} \int\limits_{R}^{b+R} \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \cos \omega t \, \frac{1}{z} \, dz \, dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 I_0 \cos \omega t}{2\pi} \int\limits_{0}^{a} [\ln z]_R^{b+R} \, dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 I_0 \cos \omega t}{2\pi} \left[(\ln (b+R) - \ln R) \cdot y \right]_0^a \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0 I_0 \cos \omega t}{2\pi} a \ln \left(\frac{b+R}{R} \right) \\
&= \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} a \ln \left(\frac{b+R}{R} \right) \cdot \sin \omega t \\
&= U_{ind}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Ein richtiger Magnet

Die Spule eines Labormagneten für ein Feld von 8,5 T besteht aus $N_{\text{Spule}} = 3 \cdot 10^4$ Windungen supraleitenden Drahts und hat einen Durchmesser von $d = 16\,\text{cm}$ sowie eine Länge von $l = 30\,\text{cm}$.

a) Welcher Strom flieSSt im supraleitenden Draht? (Nehmen Sie an, dass die Formeln für sehr lange Spulen gelten)

b) Wie dick muss ein Kupferdraht für diesen Strom sein, wenn aus Sicherheitsgründen die Stromdichte nicht mehr als $\vec{J} = 10\,\text{A/mm}^2$ betragen soll?

c) Welche elektrische Leistung wird in einem solchen Kupferdraht verbraucht, wenn er die gleiche Länge hat wie der supraleitende Draht?
(Spezifischer Widerstand $\rho_{\text{Cu}} = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$)

d) Wie groSS ist die Energiedichte des magnetischen Feldes in der Spule ($\omega_{\text{mag}} = \frac{1}{4\mu_0}\vec{B}^2$)

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} \\ \Rightarrow I &= \frac{Bl}{\mu_0 N} \\ I &= \frac{8{,}5\,\text{T} \cdot 0{,}3\,\text{m}}{4\pi 10 \cdot 10^{-7}\,\text{V s/(A m)} \cdot 3 \cdot 10^4} = 67{,}64\,\text{A} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{I}{J} &= A = \pi r^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{I}{\pi J}} &= r \\ \sqrt{\frac{67{,}64\,\text{A}\,\text{mm}^2}{10\,\text{A}\pi}} &= 1{,}47\,\text{mm} \Rightarrow d = 2{,}94\,\text{mm} \end{aligned}$$

c) Länge L des Kupferdrahtes:

$$\begin{aligned} L &= N_{\text{Spule}} \cdot 2\pi \cdot r \\ &= 30000 \cdot 2\pi \cdot 0{,}08\,\text{m} \\ &= 15\,079\,\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\text{Draht}} &= \rho_{\text{Cu}} \cdot \frac{L}{A_{\text{Draht}}} \\ &= 1,72 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{15079}{6,764}\Omega = 38{,}14\,\Omega \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &= I^2 \cdot R_{\mathrm{Draht}} \\
&= (67{,}64\,\mathrm{A})^2 \cdot 38{,}14\,\Omega \\
&\approx 175\,\mathrm{kW}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{mag}} &= \frac{1}{4\mu_0}\vec{B}^2 \\
&= 14{,}4\,\mathrm{MJ/m^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{mag}} &= \omega_{\mathrm{mag}} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot l \\
&= 14{,}4\,\mathrm{MJ/m^3} \cdot \pi \cdot (0{,}08\,\mathrm{m})^2 \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} \\
&\approx 86\,859\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Alleine auf einer einsame Insel

Auf einer zunächst malerischen Kreuzfahrt im Südpazifik werden Sie nach einiger Zeit kurzerhand auf einer einsamen Insel ausgesetzt. Neben Ihren persönlichen Gegenständen hat man Ihnen zu Ihrer Schikane nur 1000 Meter Draht überlassen. Um für die lebensnotwendigsten Dinge (Smartphone, Notebook, etc.) Strom zu erzeugen, wollen Sie nun versuchen eine Spule zu formen und im Erdmagnetfeld (welches hier $5 \cdot 10^{-5}$ T beträgt) rotieren zu lassen.

a) Sollte die Spule quadratisch oder kreisförmig sein? Der Platz zwischen den Palmen lässt eine Ausdehnung von maximal 1 Meter zu.

b) Mit wie viel Umdrehungen pro Sekunde müssen sie Ihre Spule drehen, um eine Effektivspannung von 3 V zu erreichen?

Lösung:

a) GemäSS dem Faradayschen Gesetz gilt mit der Spulenfläche A, der Windungszahl N, sowie der Drahtlänge l=1000 m:

$$U_{ind} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = |\vec{B}| \cdot |\vec{A}| \cdot N \cdot \omega \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rightarrow U_{ind} \propto A \cdot N$$

$$\text{Beim Kreis: } N = \frac{l}{2\pi r} \approx 318 \quad A = \pi r^2 \rightarrow U_{ind} \propto \frac{l \cdot r}{2} = 250$$

$$\text{Beim Quadrat: } N = \frac{l}{4a} = 250 \quad A = a^2 = 1 \rightarrow U_{ind} \propto \frac{l \cdot a}{4} = 250$$

Die Art wie die Spule gewickelt wird, hat also keinen Einfluss auf den induzierten Strom.

b)

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\vec{B}| \cdot \frac{l \cdot d}{4} \cdot \omega \Rightarrow f = \frac{4 \cdot U_{eff}}{\sqrt{2}\pi \cdot l \cdot d \cdot |\vec{B}|} \approx 54\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Aufgabe 4: Das Magnetfeld einer toroidalen Spule (Torus)

Wenn man eine gewöhnliche, stromdurchflossene Spule mit N Windungen gleichmäSSig zu einem Ring biegt, erhält man einen Torus. r_i bezeichne den Innenradius des Torus und r_a den AuSSenradius. Berechnen Sie das Magnetfeld im Spuleninneren, das heiSSt, nur zwischen r_i und r_a . Verwenden Sie dazu das Ampèresche Gesetz. Hilfreich sind auSSerdem Symmetrieüberlegungen.

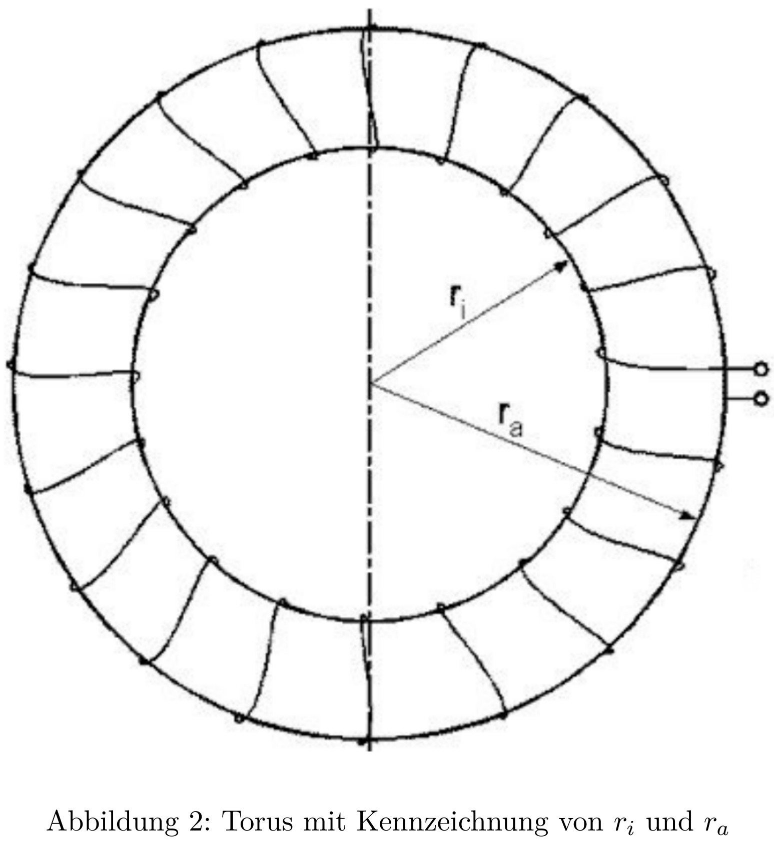

Abbildung 2: Torus mit Kennzeichnung von r_i und r_a

Lösung:

Gewählt wird der Integrationsweg im Inneren der Spule, die anderen Bereiche sind hier nicht ge- fragt. Für das Ampèrsche Gesetz gilt

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot ds$$

Der Gesamtstrom ergibt sich durch die Windungzahl zu $I_{\text{ges}} = N \cdot I$. Als Integrationsweg wird ein Kreis mit einem Radius $r_i < r < r_a$ gewählt. Durch einfache Überlegungen folgt (rechte Hand Regel o. Ä.), dass das $B-$Feld parallel zum gewählten Weg läuft und radialsymmetrisch abnimmt $\rightarrow B(R, \varphi) = B(R) = \text{const}$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_S B \cdot ds = B \oint_S ds = B \cdot 2 \cdot \pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot NI}{2\pi r}$$