2. Übung zur Physik B2 für Nebenfächler SS 2018

Ausgabe: 18.04.2018
Abgabe: bis 24.04.2018 14:00 Uhr
Briefkästen: 247-249

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Geladene Teilchen

Drei elektrisch geladene Teilchen befinden sich auf einer Linie, (siehe Abb. 1). Berechnen Sie die elektrostatische Nettokraft, welche auf Teilchen 3, mit einer Ladung von $Q_3 = -4{,}0\,\mu\text{C}$, aufgrund der anderen beiden geladenen Teilchen wirkt. Beachten Sie bei Ihrer Rechnung, in welche Richtung die Kräfte zeigen.

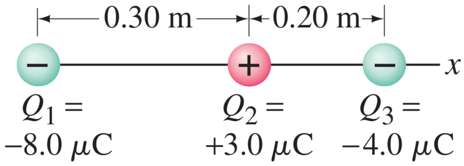

Abbildung 1

Lösung:

Die Nettokraft auf Teilchen 3 ist die vektorielle Summe der Kraft $\boldsymbol{F_{31}}$ ausgeübt von Teilchen 1 auf 3 sowie der Kraft $\boldsymbol{F_{32}}$ ausgeübt von Teilchen 2 auf 3:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{31}} + \boldsymbol{F_{32}} \tag{1}$$

Die Beträge dieser Kräfte können über das Coloumb‘sche Gesetz ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
F_{31} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_3 Q_1}{r_{31}^2}, && (2)\\
&= \frac{\left(9{,}0\cdot 10^9\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{C}^2\right)\cdot\left(4\cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)\cdot\left(8\cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)}{(0{,}5\,\text{m})^2}, && (3)\\
&= 1{,}15\,\text{N}, && (4)
\end{aligned}$$

mit dem Abstand zwischen Teilchen 3 und 1 $r_{31} = 0{,}5\,\text{m}$ sowie der elektrischen Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\text{A}\,\text{s}/(\text{V}\,\text{m}). \tag{5}$$

Analog zwischen Teilchen 2 und 3:

$$\begin{aligned}
F_{32} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_3 Q_2}{r_{32}^2}, && (6)\\
&= \frac{\left(9{,}0\cdot 10^9\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{C}^2\right)\cdot\left(4\cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)\cdot\left(3\cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)}{(0{,}2\,\text{m})^2}, && (7)\\
&= 2{,}70\,\text{N}. && (8)
\end{aligned}$$

Die Kraft $\boldsymbol{F_{31}}$ ist abstoßend, da Teilchen 1 ebenfalls negativ geladen ist, und $\boldsymbol{F_{32}}$ ist anziehend, da Teilchen 2 positiv geladen ist. Damit ergeben sich die in Abb. 2 dargestellten Richtungen der Kräfte.

Abbildung 2

Mit dem Koordinatensystem aus Abb. 2 folgt für die elektrostatische Nettokraft:

$$
\begin{aligned}
F &= -F_{32} + F_{31}, && (9)\\
&= -2{,}70\,\mathrm{N} + 1{,}15\,\mathrm{N}, && (10)\\
&= -1{,}55\,\mathrm{N}. && (11)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Punktladungen

Zwei Punktladungen befinden sich in einem Abstand von 10 cm zueinander (siehe Abb. 3).

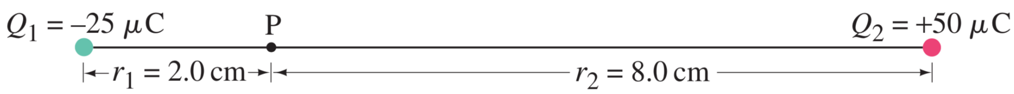

Abbildung 3

a) Bestimmen Sie die Richtung und Stärke des elektrischen Feldes am Punkt P zwischen den beiden Ladungen.

b) Nun wird ein Elektron mit Masse $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg am Punkt P platziert und losgelassen. Bestimmen Sie die Richtung und den Betrag der Beschleunigung des Elektrons nach dem Loslassen. Die Elektronladung ist $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Lösung:

a) Feldstärke und -richtung am Punkt P:

Das elektrische Feld am Punkt P ergibt sich aus der vektoriellen Summe der jeweils durch Q_1 und Q_2 erzeugten Felder. Aufgrund der negativen Ladung von Q_1 zeigt das dadurch erzeugte Feld in Richtung von Q_1. Da Q_2 positiv geladen ist, zeigt das von Q_2 erzeugte Feld weg von Q_2. Daraus folgt, dass beide Felder in dieselbe Richtung zeigen, in diesem Fall nach links (siehe Abb. 4).

Abbildung 4

Daher können die Beträge der beiden Feldstärke einfach addiert werden:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2}\right), && (12)\\
&= 9 \cdot 10^9\,\mathrm{N/(m^2\,C^2)}\left(\frac{25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{(2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} + \frac{50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{(8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}\right), && (13)\\
&= 6{,}33 \cdot 10^8\,\mathrm{N/C}. && (14)
\end{aligned}
$$

b) Beschleunigung und Richtung des Elektrons:

Das elektrische Feld zeigt nach links, also erfährt das Elektron eine Kraft nach rechts, da es negativ geladen ist. Daraus folgt, dass die Beschleunigung $a = \frac{F}{m_\mathrm{e}}$ nach rechts gerichtet ist.

Die Kraft auf eine Ladung q in einem elektrischen Feld E ist

$$F = qE. \tag{15}$$

Daraus folgt für den Betrag der Beschleunigung:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m_\mathrm{e}} = \frac{eE}{m_\mathrm{e}}, && (16)\\ &= \frac{\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\right) \cdot \left(6{,}3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{N/C}\right)}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}, && (17)\\ &= 1{,}11 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m/s^2}. && (18) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Statisches elektrisches Feld

Eine Spannungsquelle erzeugt zwischen den quadratischen Platten eines Kondensators, der im Vakuum steht, eine Spannung von $U = 6\,\mathrm{kV}$. Die Platten haben einen Abstand von $d = 6\,\mathrm{cm}$ und eine Seitenlänge von $a = 50\,\mathrm{cm}$.

a) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E, die Kapazität C, die Plattenladung Q und die Plattenladungsdichte σ.

b) Bei angeschlossener Spannungsquelle wird der Abstand halbiert. Wie verändern sich Spannung, elektrische Feldstärke, Kapazität, Plattenladung und Plattenladungsdichte?

c) Nun wird die Spannungsquelle abgeklemmt und die Platten wieder auf den alten Abstand gebracht. Wie verändern sich jetzt die Werte?

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{U}{d} = \frac{6000\,\mathrm{V}}{0{,}06\,\mathrm{m}} = 100\,000\,\mathrm{V/m} && (19)\\ A &= a \cdot a = 50\,\mathrm{cm} \cdot 50\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}^2 && (20)\\ C &= \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \frac{0{,}25\,\mathrm{m}^2}{6\,\mathrm{cm}} = 3{,}69 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} && (21)\\ Q &= C \cdot U = 3{,}69 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} \cdot 6000\,\mathrm{V} = 2{,}21 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} && (22)\\ \sigma &= \frac{Q}{A} = \frac{2{,}21 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}}{0{,}25\,\mathrm{m}^2} = 8{,}84 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2} && (23) \end{aligned}$$

b) Die Spannung bleibt gleich, da die Spannung von der Spannungsquelle vorgegeben ist.
Die elektrische Feldstärke verdoppelt sich.
Die Kapazität verdoppelt sich.
Die Plattenladung verdoppelt sich.
Die Plattenladungsdichte verdoppelt sich.

c) Die Kapazität halbiert sich, da die Strecke verdoppelt wird und $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ gilt.
Die Ladung bleibt gleich.
Die Plattenladungsdichte bleibt gleich.
Die Spannung verdoppelt sich, wegen $U = \frac{Q}{C}$.
Die elektrische Feldstärke bleibt gleich.

Aufgabe 4: Dielektrikum

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten hat eine Kapazität von $C = 100\,\mathrm{pF}$.

a) Wie groß ist die relative Permittivität ϵ_r des Dielektrikums, wenn die Kantenlänge der Platten $a = 3\,\mathrm{cm}$ beträgt und einen Abstand von $d = 1\,\mathrm{mm}$ zueinander haben?

b) Wie verändert sich die Kapazität, wenn das Dielektrikum zur Hälfte herausgezogen wird? Fassen Sie dabei den Kondensator als Parallelschaltung zweier Kondensatoren zusammen.

c) Wie weit muss das Dielektrikum herausgezogen werden, damit sich die Kapazität der Gesamtanordnung halbiert? Fassen Sie ebenfalls den Kondensator als Parallelschaltung zweier Kondensatoren zusammen.

Lösung:

a) Aus $C = \epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d}$ folgt:

$$\epsilon_\mathrm{r} = \frac{Cd}{\epsilon_0 A} = \frac{Cd}{\epsilon_0 a^2} = \frac{\left(100 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}\right) \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{\epsilon_0 \cdot \left(9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2\right)} = 12{,}55. \tag{24}$$

b) Die Kapazität parallel geschalteter Kondensatoren summiert sich und die Fläche der beiden neuen Kondensatoren ist die Hälfte der vorherigen Fläche. Es ergibt sich demnach:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{2d} + \epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} \frac{A}{2d} = \epsilon_0 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{2\left(1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)} (1 + 12{,}55) = 54{,}0\,\mathrm{pF} \tag{25}$$

c) Allgemein gilt für eine herausgezogene Strecke s für die Kapazität:

$$C = \epsilon_0 \frac{1}{d} \left(A_1 + A_2 \epsilon_\mathrm{r}\right) = \epsilon_0 \frac{1}{d} \left((a \cdot s) + \epsilon_\mathrm{r} \cdot (a\,(a - s))\right) \tag{26}$$

Umgeformt ergibt sich mit der Forderung $C = 50\,\mathrm{pF}$:

$$\frac{Cd}{\epsilon_0} = as + \epsilon_\mathrm{r} a^2 - \epsilon_\mathrm{r} as \tag{27}$$

$$\frac{Cd}{\epsilon_0} - \epsilon_\mathrm{r} a^2 = as\,(1 - \epsilon_\mathrm{r}) \tag{28}$$

$$s = \frac{\frac{Cd}{\epsilon_0} - \epsilon_\mathrm{r} a^2}{a(1 - \epsilon_\mathrm{r})} \tag{29}$$

$$= \frac{\frac{\left(50 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}\right) \cdot (0{,}001\,\mathrm{m})}{\epsilon_0 \cdot 0{,}03\,\mathrm{m}} - 12{,}55 \cdot 0{,}03\,\mathrm{m}}{1 - 12{,}55} = 1{,}6\,\mathrm{cm} \tag{30}$$

Das Dielektrikum muss zu $\frac{1{,}6\,\mathrm{cm}}{3\,\mathrm{cm}} \approx 53\%$ herausgezogen werden.