1. Übung zur Physik B2 für Nebenfächler SS 2018

Ausgabe: 12.04.2018
Abgabe: bis 18.04.2018 14:00 Uhr — Prof. Dr. D. Suter
Briefkästen: 247-249

Aufgabe 1: Kreisprozesse

Eine abgeschlossene Gasmenge eines idealen Gases ist im Anfangszustand durch folgende Größen gekennzeichnet:

$$V_1 = 150\,\mathrm{cm}^3$$
$$p_1 = 232\,\mathrm{kPa}$$
$$T_1 = 247\,\mathrm{K}$$

Beim Stirlingschen Kreisprozess werden vom Gas nacheinander folgende Zustandsänderungen durchlaufen:
- isochore Erwärmung um 40 K
- isotherme Expansion auf 290 cm^3
- isochore Abkühlung auf die Anfangstemperatur
- isotherme Kompression auf den Anfangszustand

a) Ermitteln Sie Druck, Volumen und Temperatur nach jeder Zustandsänderung.

b) Zeichnen Sie ein V-p-Diagramm für diesen Kreisprozess. Berechnen Sie für jede isotherme Zustandsänderung mindestens zwei weitere Wertepaare.

c) Entscheiden Sie, ob nach Abschluss des Kreisprozesses das System insgesamt Arbeit abgegeben oder aufgenommen hat. Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Bestimmen Sie diese Arbeit.

e) Wie groß ist der thermodynamische Wirkungsgrad dieses Prozesses? Geben Sie eine Möglichkeit an, den Wirkungsgrad zu vergrößern.

Lösung:

a) Die vier Zustände werden in einer Tabelle dargestellt:

Zustand	p in kPa	V in cm^3	T in K
1	232	150	247
2	270	150 (isochor)	287 (247+40)
3	140	290	287
4	120	290	247

Der Druck beim Übergang von Zustand 1 nach Zustand 2 berechnet sich mit

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{1}$$

$$p_2 = \frac{T_1}{T_2} \cdot p_1 \tag{2}$$

Beim Übergang 2 nach 3 gilt für die isotherme Zustandsänderung:

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{V_3}{V_2} \tag{3}$$

$$p_3 = \frac{V_2}{V_3} \cdot p_2 \tag{4}$$

Beim Übergang 3 nach 4 gilt:

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{T_3}{T_4} \tag{5}$$

$$p_4 = \frac{T_4}{T_3} \cdot p_3 \tag{6}$$

b) Für die isothermen Zustandsänderungen werden für selbst gewählte Volumen die Drücke berechnet. Dazu wird der in Aufgabe a) gezeigte Zusammenhang zwischen Druck und Volumen für die isotherme Zustandsänderung verwendet: Übergang 2->3 (isotherme Expansion) Übergang 4->1

V in cm^3	180	210	240	270
p in kPa	225	193	169	150

(isotherme Kompression)

V in cm^3	180	210	240	270
p in kPa	193	166	145	129

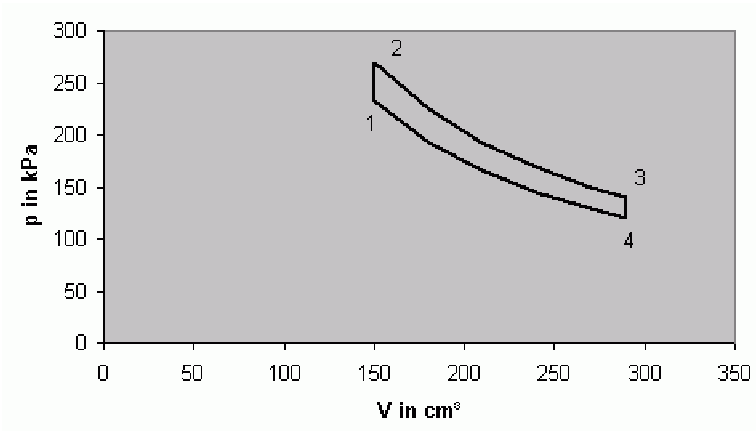

Abbildung 1: pV-Diagramm

c) Die von einem System abgegebene Arbeit ist allgemein die Fläche unter der Kurve im V-p-Diagramm. Der Vorgang 2->3 ist eine Expansion, also der Vorgang, bei dem das System Arbeit verrichtet. Der Übergang 4->1 ist eine Kompression, am System muss Arbeit verrichtet werden. Der Betrag des Anteil 2->3 ist größer als der Betrag des Anteil 4->1, insgesamt wird also vom System Arbeit abgegeben.

d) Damit ist auch klar, wie sich diese Arbeit berechnen lässt. Es muss die Arbeit für den Übergang 2->3 berechnet werden. Davon zieht man die Arbeit ab, die beim Übergang 4->1 wieder in das System hinein gesteckt wird. Diese Arbeit wird bei einem Motor z.B. in einer Schwungscheibe gespeichert. Für eine isotherme Zustandsänderung berechnet sich die Volumenarbeit nach der Gleichung:

$$W = p_A \cdot V_A \cdot ln\frac{V_A}{V_E} \tag{7}$$

A kennzeichnet den Anfang und E das Ende. Gibt ein System Arbeit ab, hat die Arbeit ein negatives Vorzeichen. Nimmt es Arbeit auf, wird das Vorzeichen automatisch positiv, da das Endvolumen kleiner ist als das Anfangsvolumen. Die Gesamtarbeit ist dann also:

$$W = W_{23} + W_{41} \tag{8}$$

Plus deshalb, weil sich die Vorzeichen bei der Berechnung ergeben.

$$W = p_2 \cdot V_2 \cdot ln\frac{V_2}{V_3} + p_4 \cdot V_4 \cdot ln\frac{V_4}{V_1} \tag{9}$$

$$W = 2,7 \cdot 10^5\mathrm{Pa} \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^3 \cdot ln\frac{150\mathrm{cm}^3}{290\mathrm{cm}^3} + 1,2 \cdot 10^5\mathrm{Pa} \cdot 2,9 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^3 \cdot ln\frac{290\mathrm{cm}^3}{150\mathrm{cm}^3} \tag{10}$$

$$W = -26,7\mathrm{J} + 22,9\mathrm{J} \tag{11}$$

$$W = -3,8\mathrm{J} \tag{12}$$

Der Stirlingmotor gibt bei jeder Umdrehung 3,8 J Arbeit ab.

e) Der thermische Wirkungsgrad eines Kreisprozesses wird durch die beiden Temperaturen bestimmt. Es gilt:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \tag{13}$$

$$\eta = 1 - \frac{247\mathrm{K}}{287\mathrm{K}} \tag{14}$$

$$\eta = 0,14 \tag{15}$$

$$\eta = 14\% \tag{16}$$

Der Wirkungsgrad kann nur durch die Änderungen der Temperaturen erhöht werden. Entweder wird die große Temperatur weiter erhöht oder die niedrige Temperatur weiter verkleinert.

Aufgabe 2: Elektrisches Ladung

Nahe der Erdoberfläche kann ein elektrisches Feld nachgewiesen werden. Es ist vertikal nach unten gerichtet und beträgt im Mittel $150\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ (mit starken zeitlichen und örtlichen Schwankungen).

a) Berechnen Sie mithilfe des Gaußschen Satzes die durchschnittliche Flächenladungsdichte an der Erdoberfläche, wenn man die Erde als leitende Kugel auffasst.

b) Wie groß ist die Gesamtladung der Erde (mittlerer Erdradius $r_E = 6371\,\mathrm{km}$)?

c) Zwei Kugeln der Masse $100\,\mathrm{g}$ werden aus einer Höhe von $2\,\mathrm{m}$ fallengelassen. Eine ist elektrisch neutral, die andere trägt eine Ladung von $+100\,\mu C$. Welche fällt schneller und um wie viel unterscheidet sich die Fallzeit? Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

Lösung:

a)

$$E \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma = E \cdot \epsilon_0 = 150\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}} = 1,33 \cdot 10^{-9}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{17}$$

Mit $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}$

b)

$$Q = \sigma A = \sigma 4\pi r_E^2 = 6,76 \cdot 10^5\,\mathrm{C} \tag{18}$$

Mit $r_E = 6371\,\mathrm{km}$.

c) Das E-Feld zeigt nach unten, die positiv geladene Kugel fällt also schneller

$$\frac{1}{2}at^2 = h \;\text{ mit }\; a = g + \frac{qE}{m} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g + \frac{qE}{m}}} \tag{19}$$

Mit

$$q = 0 : t = 0.6386\,\mathrm{s} \tag{20}$$

$$q = +100\mu\mathrm{C} : t = 0.6337\,\mathrm{s} \tag{21}$$

$$\Delta t = 5\,\mathrm{ms} \tag{22}$$

Aufgabe 3: Nabla und Co

Die Begriffe Rotation und Gradient werden Ihnen in der Elektrostatik und -dynamik häufig begegnen. Zur Erinnerung: Nützlich ist die Kenntnis des Nabla-Operators:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Die Rotation eines (dreidimensionalen) Vektorfeldes $\vec{a}(x; y; z)$ ist definiert als $rot\,\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ und ist wiederum ein Vektor. Der Gradient eines Skalarfeldes $U(x, y, z)$ ist definiert als $grad\,U = \vec{\nabla}U$ und ist auch ein Vektor. Hinzu kommt nun noch die Divergenz eines Vektorfeldes $div\,\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z$. Die Divergenz ist ein Skalar. Gegeben sei der allgemeine Ortsvektor $\vec{r}$ mit seinem Betrag $r > 0$. Berechnen Sie:

a) $\vec{\nabla}\left(x^2 + zy - z^2 + 3xyz\right)$

b) $\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2y - 4 \\ 4z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

d) $\vec{\nabla} \times \vec{r}$

e) $\vec{\nabla} r$

f) $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$

g) $\Delta\frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r}$

h) $\vec{\nabla}\phi(r)$ mit $\phi(r)$ als allgemeines Skalarfeld.

i) $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi(\vec{r}) \cdot \vec{G}(\vec{r})\right)$ mit $\vec{G}(\vec{r})$ als allgemeines Vektorfeld.

Lösung:

a)

$$\vec{\nabla}\left(x^2 + zy - z^2 + 3xyz\right) = \begin{pmatrix} 2x + 3yz \\ z + 3xz \\ y - 2z + 3xy \end{pmatrix} \tag{24}$$

b)

$$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} 2y - 4 \\ 4z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 4 \\ -2x \\ -2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

c)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3 \tag{26}$$

d)

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = 0 \tag{27}$$

e)

$$\vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e_r} \tag{28}$$

f)

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = - \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{e_r}}{r^2} \tag{29}$$

g)

$$\Delta \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\vec{\nabla} \cdot -\frac{\vec{r}}{r^3} = \partial_x \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \partial_y \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \partial_z \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \tag{30}$$

$$= \frac{r^3 - 2rx^2}{r^6} + \frac{r^3 - 2ry^2}{r^6} + \frac{r^3 - 2rz^2}{r^6} = \frac{3 - 3}{r^3} = 0 \tag{31}$$

Allerdings ist $\frac{1}{r}$ bei $r = 0$ nicht definiert und auch nicht differenzierbar. Mit dem Satz von Gauß erhält man die Lösung: $-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r} = \delta^{(3)}(\vec{r})$.
$\Delta\frac{1}{r} = 0$ für $\vec{r} \neq 0$ gilt wie gezeigt. Das Integral über eine Kugel mit Radius ϵ gibt:

$$\int\int\int_{B(\epsilon)} dr^2 (-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{r}) = \int\int_{\partial B(\epsilon)} d\vec{A}\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} = \int\int_{\partial B(\epsilon)} d\vec{A}\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{e_r}}{r^2} = 4\pi r^2 \vec{e_r}\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{e_r}}{r^2} = 1 \tag{32}$$

h)

$$\vec{\nabla}\phi(r) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{\nabla} r = \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{(Kettenregel)} \tag{33}$$

i)

$$\vec{\nabla} \cdot \Big(\phi(\vec{r}) \cdot \vec{G}(\vec{r})\Big) = \Big(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\Big) \cdot \vec{G}(\vec{r}) + \phi(\vec{r})\vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{r}) \tag{34}$$