13. Übung zur Physik B2 für Nebenfächler SS 2018

Ausgabe: 05.07.2018
Abgabe: bis 11.07.2018 14:00 Uhr
Briefkästen: 247-249

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Maxwell-Gleichungen

Um zeitabhängige elektrische und magnetische Felder zu beschreiben, wird die nicht-stationäre Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ eingeführt. Geht man von den statischen Gleichungen und dem Induktionsgesetz aus, so folgt für die Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r}, t) \\
\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0\vec{j}(\vec{r}, t)
\end{aligned}$$

Weiterhin muss die Ladungserhaltung gelten, welche durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass das zeitabhängige ampèresche Gesetz in dieser Form die Ladungserhaltung nicht erfüllt.

Maxwell erkannte dies und führte den sogenannten Verschiebungsstrom $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r}, t)$ ein. Damit lautet das verallgemeinerte ampèresche Gesetz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0\vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r}, t)$$

b) Zeigen Sie, dass das verallgemeinerte ampèresche Gesetz die Ladungserhaltung erfüllt.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \mu_0\vec{j}(\vec{r}, t) && |\cdot\vec{\nabla} \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)) &= \vec{\nabla}\mu_0\vec{j}(\vec{r}, t) \\
0 &= \vec{\nabla}\mu_0\vec{j}(\vec{r}, t) && |:\mu_0 \\
0 &= \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r}, t)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + 0 = 0$$

Laut Aufgabenstelllung ist ρ zeitabhängig. $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = 0$ zeigt jedoch eine Zeitunabhängigkeit. Damit ist ein Widerspruch gezeigt.

b)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times B(\vec{r},t) &= \mu_0 \vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) && \mid \cdot \vec{\nabla} \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times B(\vec{r},t)) &= \mu_0 \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0\epsilon_0 \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) && \mid : \mu_0 \\
0 &= \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r},t) + \epsilon_0 \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) \\
\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r},t) &= -\epsilon_0 \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) - \epsilon_0 \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) &= \epsilon_0 \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) \\
\rho(\vec{r},t) &= \epsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r},t) \\
\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

Dies ist die erste Maxwellgleichung, damit sind die Annahmen von oben bewiesen.

Aufgabe 2: Schall

a) Das ehemalige Überschall-Passagierflugzeug Concorde düse mit doppelter Schallgeschwindigkeit tief über uns hinweg, nämlich in einer Höhe von nur $h = 2000\,\mathrm{m}$. Zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ befindet sie sich senkrecht über uns. Wann hören wir den Überschallknall? *Gehen Sie von einer Schallgeschwindigkeit in Luft von* $343\,\mathrm{m/s}$ *und in Eisen von* $5170\,\mathrm{m/s}$ *aus.*

b) Sie horchen an einem luftgefüllten Eisenrohr, als jemand einmal an das andere Ende schlägt. Sie hören zwei Schläge im Abstand von 1 s. Wie lang ist das Rohr? Gehen Sie von Normalbedingungen aus.

c) Ein Hörer sitzt zwischen den Boxen seiner Stereoanlage, wobei er 3 m Abstand von der einen Box hat und 4 m von der anderen. Wenn er alte Mono-Platten hört, löschen sich Schallwellen bestimmter Frequenzen an seinem Ort aus (bei Vernachlässigung von Reflexionen). Welche?

d) Sie hören ein Motorrad mit einem Schallintensitätspegel von $L_M = 80\,\mathrm{dB}$

   1) Welchen Pegel nehmen Sie wahr, wenn Sie Ihre Entfernung verdoppeln?
   Tipp: Nutzen Sie dafür die Pegeldefinition $L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$, *wobei* $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ *beträgt.*

   2) Welchen Pegel nehmen Sie wahr, wenn Sie zwei Motorräder gleichzeitig hören?

Lösung:

a) Die Concorde zieht den Überschallkegel hinter sich her, wie in Abbildung 1 zu sehen.

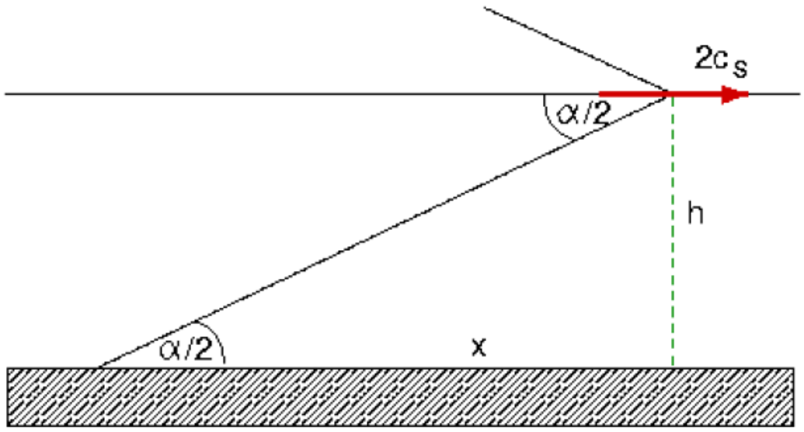

Abbildung 1: Überschallkegel der Concorde

Der Öffnungswinkel α des Machschen Kegels ergibt sich bei doppelter Schallgeschwindigkeit zu

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Mit Hilfe der Skizze erhält man den Abstand x, den der Rand des Kegels zur Zeit $t = 0\,\mathrm{s}$ von uns hat:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow x \approx 3464{,}1\,\mathrm{m}$$

Da sich der Kegel ebenfalls mit doppelter Schallgeschwindigkeit bewegt, erreicht er uns zur Zeit t_1 mit

$$2c_s = \frac{x}{t_s} \Rightarrow t_s \approx 5{,}05\,\mathrm{s}$$

b) Nach einer Zeit t_1 kommt der Schall direkt durch das Material des Einsenrohres:

$$t_1 = \frac{l}{c_{\mathrm{Fe}}}$$

Dann erreicht Sie der Schall durch die Luft im Rohr:

$$t_2 = \frac{l}{c_{\mathrm{Luft}}}$$

Die Länge l des Rohres ist dann:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = l\left(\frac{1}{c_{\mathrm{Luft}}} - \frac{1}{c_{\mathrm{Fe}}}\right)$$
$$\Rightarrow l = \frac{\Delta t}{\frac{1}{c_{\mathrm{Luft}}} - \frac{1}{c_{\mathrm{Fe}}}} = 364{,}8\,\mathrm{m}$$

c) Für destruktive Interferenz muss der Gangunterschied der Wellen von linker und rechter Box eine halbe Wellenlänge sein (zuzüglich einer beliebigen Zahl ganzer Wellen), also

$$s_2 - s_1 = \lambda\left(\frac{1}{2} + n\right) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

auf die Frequenzen umgerechnet also

$$s_2 - s_1 = (2n+1)\frac{c}{2f}$$

Bei einem Gangunterschied von 1 m erhält man daraus die Frequenz

$$f = (2n+1)\frac{c}{2(s_2 - s_1)}$$
$$= (2n+1) \cdot 171{,}5\,\mathrm{Hz}$$

Also die Frequenzen 171,5 Hz, 514,5 Hz, 857,5 Hz, ...

d) 1) Die Intensität geht mit dem Abstandsquadratgesetz: $I \propto \frac{1}{r^2}$, die Verdopplung der Entfernung geht also mit einer Viertelung der Intensität einher, also gilt hier $I \propto \frac{1}{4}I_M$. Einsetzen in die Pegeldefinition $L_I = 10\log\frac{I}{I_0}$ liefert:

$$L_I = 10\log\frac{I_M}{4I_0} = 10\log\frac{I_M}{I_0} - 10\log 4 = L_M - 6\,\mathrm{dB} = 74\,\mathrm{dB}$$

2) Bei zwei Motorrädern verdoppelt sich die Intensität: $I = 2 \cdot I_M$. Es folgt:

$$L_I = 10\log\frac{2I_M}{I} = 10\log\frac{I_M}{I_0} + 10\log 2 = L_M + 3\,\mathrm{dB} = 83\,\mathrm{dB}$$

Aufgabe 3: Wellengleichung 1

Gegeben ist eine eindimensionale Wellengleichung der Form:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x,t) = 0$$

a) Zeigen Sie, dass der Ansatz $g(x,t) = A_+ f_+(x+ct) + A_- f_-(x-ct)$ die Wellengleichung löst. $A_\pm$ sind beliebige Konstanten und $f_\pm$ zweimal differenzierbare Funktionen von $u_\pm = x \pm ct$. Sei x der Ort und t die Zeit.

b) Welche physikalische Bedeutung hat dann c? Wie breitet sich $f_\pm$ räumlich und zeitlich aus?

c) Wie ist allgemein die Phasen und die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets definiert? Interpretieren Sie diese physikalischen Größen.

Lösung:

a) Es werden zuerst die zweifachen Ableitungen nach x und t gebildet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(u_\pm) &= \frac{\partial u_\pm}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_\pm} = \frac{\partial}{\partial u_\pm} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial^2}{\partial u_\pm^2} f \\
\frac{\partial}{\partial t} f(u_\pm) &= \frac{\partial u_\pm}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u_\pm} = c\frac{\partial}{\partial u_\pm} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = c^2\frac{\partial^2}{\partial u_\pm^2} f \\
h(u_\pm) &= Af(u_\pm) \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} h - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} h &= \frac{\partial^2}{\partial u_\pm^2} h - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial u_\pm^2} h = 0
\end{aligned}$$

b) Das c beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Die Superposition $h(x,t)$ ist eine stehende Welle. Ein Beispiel aus dem Alltag hierfür ist eine Mikrowelle. Das Essen dreht sich, um Bäuche und Knoten der Welle über das Volumen zu verteilen und die Speise zu erwärmen.

c) Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende (d. h. der Amplitudenverlauf) eines Wellenpakets fortbewegt.

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines festen Punktes, welcher sich z.B. auf einer monochromatischen Welle befindet.

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

Aufgabe 4: Wellengleichung 2

Schallwellen können auch durch eine dreidimensionale Wellengleichung (1) ausgedrückt werden.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p(\vec{r},t) - \Delta p(\vec{r},t) = 0 \tag{1}$$

a) Betrachten Sie nun eine ebene Schallwelle, die sich in x-Richtung ausbreitet. Vernachlässigen Sie zunächste den Luftdruck p_0. Bestimmen Sie $p(\vec{x},t)$.
Tipp: Wie sieht die Gleichung für eine ebene Welle aus?

b) Addieren Sie nun zum Druck $p(\vec{x},t)$ den Luftdruck p_0, sodass sich für den gesamten Druck ergibt: $p_{\text{ges}}(\vec{x},t) = p(\vec{x},t) + p_0$. Muss $p(\vec{x},t)$ aus Aufgabenteil a) angepasst werden und warum (nicht)?

Lösung:

a) Eine ebene Welle werde beschrieben durch:

$$p(\vec{x},t) = \hat{p}\exp(-i(k\vec{x} - \omega t))$$

Eingesetzt in die Wellengleichung mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ liefert:

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\hat{p}\exp(-i(k\vec{x} - \omega t)) + k^2\hat{p}\exp(-i(k\vec{x} - \omega t)) = 0$$

b) Mit Hinzunahme des Luftdrucks p_0 entsteht:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\hat{p}\exp(-i(k\vec{x} - \omega t)) + p_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\hat{p}\exp(-i(k\vec{x} - \omega t)) + p_0) = 0$$

Da $\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} = \Delta p_0 = 0$ ändert der äußere Luftdruck nichts.