12. Übung zur Physik B2 für Nebenfächler SS 2018

Ausgabe: 28.06.2018
Abgabe: bis 04.07.2018 14:00 Uhr — Prof. Dr. D. Suter
Briefkästen: 247-249

Aufgabe 1: Elektrischer Schwingkreis

In dem unten gezeigten Schaltkreis sei der Schalter zunächst für eine lange Zeit in Position **a**. Anschließend wird er schnell auf Position **b** geschaltet. Die Leitungswiderstände sowie $R(L)$ und $R(C)$ werden vernachlässigt.

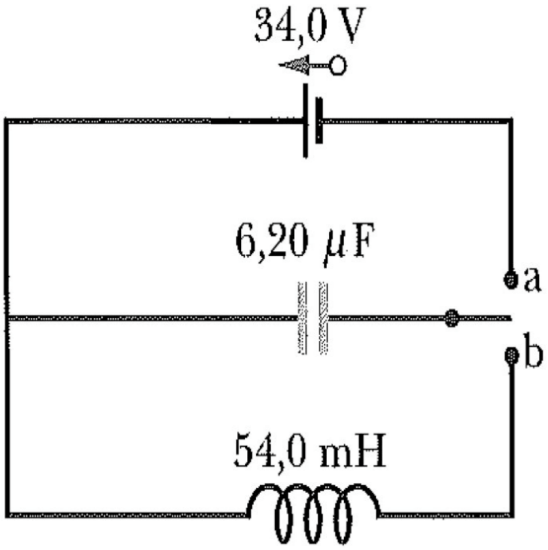


Abbildung 1: Elektrischer Schwingkreis.

a) Bestimmen Sie die Ladung Q_0 auf dem Kondensator.

b) Bestimmen Sie die Differentialgleichung des Systems.
Tipp: Verwenden Sie die Maschenregel um eine Differentialgleichung für die Ladung $Q(t)$ aufzustellen.

c) Berechnen Sie die Frequenz des so entstandenen Wechselstroms.

d) Welche Maximalamplitude haben die Stromschwingungen?
Tipp: Verwenden Sie als Ansatz $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$. Machen Sie sich Gedanken welche Anfangsbedingungen sinnvoll sind.

e) Stellen Sie die DGL für den gedämpften Schwingkreis auf, wenn sich ein Widerstand R (in Reihe) im Schwingkreis befindet.

f) Wie groß muss der Widerstand aus d) sein, um den aperiodischen Grenzfall zu erreichen?

Lösung:

a) $Q_0 = U_0 C = 34\,\mathrm{V} \cdot 6{,}2\,\mu\mathrm{F} = 2{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$.

b) Mit der Maschenregel ergibt sich die DGL für die Ladung:

$$U_L + U_C = 0 \Rightarrow \ddot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0.$$

c) Mit der Lösung des harmonischen Oszilator ergibt sich $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Und damit die Frequenz:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 275\,\mathrm{Hz}.$$

d) Mit der Lösung $Q(t) = U_0 C \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$ und den Anfangsbedingungen $Q(0) = U_0 C$ und $\dot{Q} = I(0) = 0$ und der Zeitlichen Ableitung von Q ergibt sich

$$I(t) = -U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{LC} \Rightarrow I(0) = -U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}36\,\mathrm{A}.$$

e) Aus der Maschenregel folgt

$$U_C + U_L + U_R = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\dot{I} + RI = 0 \Rightarrow \ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Die DGL der gedämpften harmonischen Schwingung ergibt sich mit $2\gamma = \frac{R}{L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

f) Für den aperiodischen Grenzfall muss gelten: $\omega_0 = \gamma$. Daraus folgt:

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 187\,\Omega.$$

Aufgabe 2: Resonanzverhalten eines Federpendels

Ein leicht gedämpftes Federpendel (Dämpfungskonstante $\beta \neq 0$) mit beliebiger Masse m und Federkonstante k werde durch eine äußere harmonische Kraft zu einer erzwungenen Schwingung angeregt.

a) Geben Sie zunächst die Resonanzfrequenz ω_0 für ein Federpendel ohne Einwirkung einer äußeren Kraft an.

b) Bestimmen Sie anhand der aus der Vorlesung bekannten Beziehung, wie sich die Amplitude $A(\omega)$ bei der erzwungenen Schwingung, für die unten angegebenen Grenzfälle der Anregungsfrequenz ω verhält. Was bedeutet dieses Verhalten physikalisch?

   (i) $\omega \to 0$

   (ii) $\omega \to \omega_0$
   Bestimmen sie für diesen Fall außerdem die Phasendifferenz ϕ zwischen äußerer Kraft und Federschwingung.

   (iii) $\omega \to \infty$

c) Auf einem Spielplatz wollen Sie, unter Berücksichtigung Ihrer Erkenntnisse aus dem vorherigen Aufgabenteil, die maximale Auslenkung einer Federwippe austesten. Dazu geben Sie innerhalb einer Schwingungsperiode immer wieder zu einer festen Zeit Anschwung. Wann genau und in welche Richtung sollten Sie Anschwung geben?

Lösung:

a) Die Schwingung des Federpendels wurde bereits auf Blatt 11 in Aufgabe 2 diskutiert. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \cdot y \tag{1}$$

und die Eigenfrequenz ist gegeben als

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

b) Die Amplitude der erzwungenen Vorlesung ist gemäß der Vorlesung gegeben als

$$A(\omega) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \,. \tag{3}$$

und die Phasendifferenz als

$$\tan(\phi) = -\frac{2\beta\omega}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} \,. \tag{4}$$

(i) Damit ergibt sich für den ersten Fall

$$A(\omega \to 0) = \lim_{\omega \to 0} \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \to \frac{K_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{K_0}{k} \,, \tag{5}$$

wobei im letzten Schritt (2) eingesetzt wurde.
In diesem Fall ändert sich die erregende Kraft so langsam, dass der Schwinger folgen kann und es keine Phasenverschiebung gibt. Die Amplitude der Schwingung ist in diesem quasistatischen Fall durch die Federkonstante k bestimmt.

(ii) Für den zweiten Fall folgt

$$A(\omega_0) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{2\omega_0\beta} = \frac{K_0}{k} \frac{\omega_0}{2\beta} \,, \tag{6}$$

wobei im letzten Schritt wieder (2) verwendet wurde.
Für die Phase ergibt sich

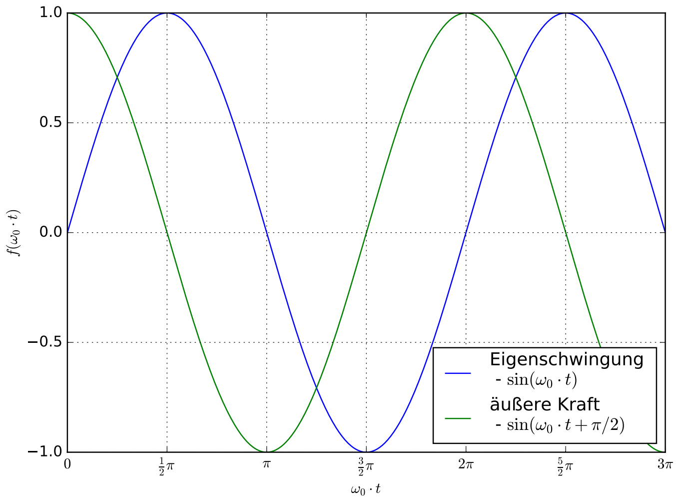
$$\phi = \lim_{\omega \to \omega_0} \tan^{-1}\left(-\frac{2\beta\omega}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\right) \to \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Der Erreger pumpt hier phasengerecht mit $\phi = \frac{\pi}{2}$ Energie in den Resonator, sodass die Amplitude ständig zunimmt und es zur Resonanzkatastrophe kommt. Für sehr kleine Dämpfungen also $\beta \to 0$ wird die Amplitude unendlich groß. Dieses Verhalten kann zur Zerstörung von schwingenden Objekte führen.

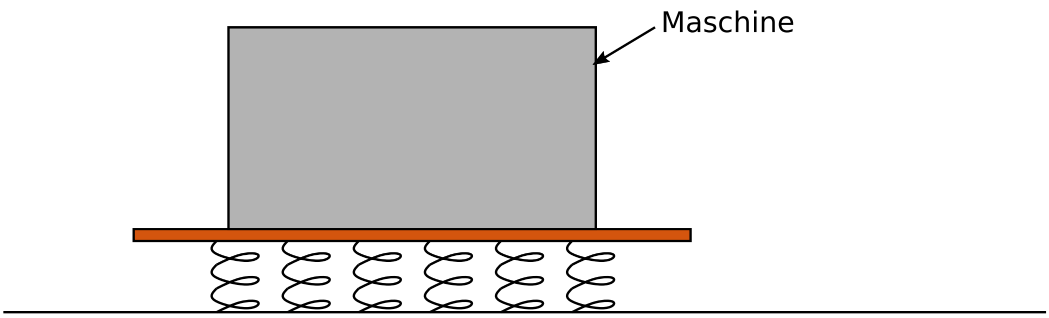
(iii) Im letzten Fall $\omega \to \infty$ ergibt sich

$$A(\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \to 0 \,. \tag{8}$$

c) Im vorherigen Teil wurde gezeigt, dass die maximale Amplitude gerade bei der Resonanzfrequenz auftritt. Für den Resonanzfall sind äußere Kraft und Eigenschwingung genau um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben, d.h. die Amplitude der äußeren Kraft hat genau dann ihr Maximum erreicht, wenn die Amplitude der Schwingung gleich null ist (vgl. untere Abbildung). Demzufolge ist es am günstigsten genau dann Anschwung zu geben, wenn die Wippe wieder ihre Gleichgewichtslage erreicht hat. Zudem sollte die Kraft beim Anschwung geben in dieselbe Richtung zeigen wie die Bewegungsrichtung der Wippe. Beim umgekehrten Fall würde die Bewegung der Feder gebremst werden.



Aufgabe 3: Erzwungene Schwingung



Eine Maschine der Masse $m = 75\,\mathrm{kg}$ steht, wie in der Abbildung gezeigt, auf sechs gleichen Federn mit der Federkonstante $k = 1500\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Zusätzliche Dämpfungselemente bewirken eine Dämpfung mit einer Dämpfungskonstanten $\beta = 1,64$. Wenn die Maschine mit einer Drehzahl von $n_1 = 500\,\mathrm{min^{-1}}$ läuft, treten in Folge dieser äußeren Kraft erzwungene Schwingungen mit der Amplitude $A_1 = 1\,\mathrm{mm}$ auf.
Wie groß müssen Sie die Drehzahl n_2 wählen, damit die Amplitude der Schwingung auf $A_2 = 0,1\,\mathrm{mm}$ abnimmt? Nehmen Sie bei Ihrer Berechnung an, dass die Kraftamplitude K_0 unabhängig von der Drehzahl ist.

Lösung:

a) Die sechs parallelen Federn entsprechen einer Feder mit einer gesamten Federkonstante von $k_{\mathrm{ges}} = 6 \cdot k$.
Die Eigenfrequenz ist damit gegeben als

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{ges}}}{m}} = 10.95\,\mathrm{s^{-1}}\,. \tag{9}$$

Da die Drehzahl mit $n_1 = 500\,\mathrm{min^{-1}} = 8,33\,\mathrm{Hz}$ bzw. $\omega_1 = 52,36\,\mathrm{s^{-1}}$ bereits oberhalb von $\omega_0 = 10.95\,\mathrm{s^{-1}}$ liegt, geht die Amplitude für höhere Drehzahlen weiter zurück.
Gemäß der Vorlesung ist die Amplitude einer erzwungenen Schwingung gegeben als

$$A(\omega) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\beta^2}}\,. \tag{10}$$

Damit gilt für die beiden Amplituden

$$A_1(\omega_1) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\omega_1^2\beta^2}} \tag{11}$$

$$A_2(\omega_2) = \frac{K_0}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\omega_2^2\beta^2}} \tag{12}$$

und für das Verhältnis der Amplituden, welches laut Aufgabenstellung gerade $\frac{1\,\mathrm{mm}}{0{,}1\,\mathrm{mm}} = 10$ sein soll

$$\frac{A_1}{A_2} = 10 = \frac{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\omega_2^2\beta^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\omega_1^2\beta^2}} \tag{13}$$

Die Werte für ω_0 ω_1 und β können direkt in den Nenner eingesetzt werden und für den Nenner gilt damit

$$\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\omega_1^2\beta^2} \approx 2672\,. \tag{14}$$

Umgestellt folgt damit für Gleichung (13)

$$10 \cdot 2672 = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\omega_2^2\beta^2}\,. \tag{15}$$

Anschließend werden beide Seiten quadriert

$$7,14 \cdot 10^8 = \left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\omega_2^2\beta^2 \tag{16}$$

und entsprechend für die *pq*-Formel umgestellt

$$0 = \omega_2^4 + \omega^2 \left(4\beta^2 - 2\omega_0^2\right) - 7,14 \cdot 10^8 + \omega_0^4\,. \tag{17}$$

Als Lösung ergibt sich der Wert $\omega_2^2 = 2,64 \cdot 10^4\,\mathrm{s}^{-2}$ bzw. $\omega_2 \approx 162\,\mathrm{s}^{-1}$.

Dies entspricht einer Frequenz von $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} \approx 25,8\,\mathrm{Hz}$ oder als Drehzahl ausgedrückt
$n_2 = 1548\,\mathrm{min}^{-1}$