11. Übung zur Physik B2 für Nebenfächler SS 2018

Ausgabe: 21.06.2018
Abgabe: bis 27.06.2018 14:00 Uhr
Briefkästen: 247-249

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Federpendel

Eine Masse mit $m = 2\,\mathrm{kg}$ hängt an einer Feder mit einer Federkonstante von $D = 198{,}2\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Nehmen Sie an, dass die Feder masselos sei.

a) Bestimmen Sie die Frequenz, mit der die Feder bei Auslenkung der Masse aus der Ruhelage schwingt.

b) Die Amplitde der Schwingung beträgt 10 cm. Zeichnen Sie für zwei Perioden das y-t-Diagramm!

c) Zur Zeit $t_0 = 0$ befindet sich der Körper am Ort der Gleichgewichtslage. Zu welchen Zeiten befindet er sich während der zwei Perioden an den Umkehrpunkten?

Lösung:

a) Zur Berechnung der Frequenz wird zuerst die Schwingungsdauer des Federschwingers berechnet:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\,\mathrm{kg}}{198{,}2\,\mathrm{N\,m^{-1}}}} = 0{,}63\,\mathrm{s}$$

Daraus folgt eine Frequenz von

$$f = \frac{1}{T} = 1{,}58\,\mathrm{Hz}.$$

b) Zum Zeichen des Diagramms müssen einige Punkte der Sinusschwingung berechnet werden. Aus der bekannten Schwingungsdauer ergeben sich die Nulldurchgänge: 0 s, 0,32 s, 0,63 s, 0,95 s, 1,26 s. Die Zeiten, zu denen die Schwingung ihre Maximalauslenkung erreicht, liegen zeitlich genau zwischen den Nulldurchgängen: 0,16 s, 0,48 s, 0,79 s, 1,11 s. Mit diesen Werten lassen sich die ersten zwei Schwingungen zeichnen.

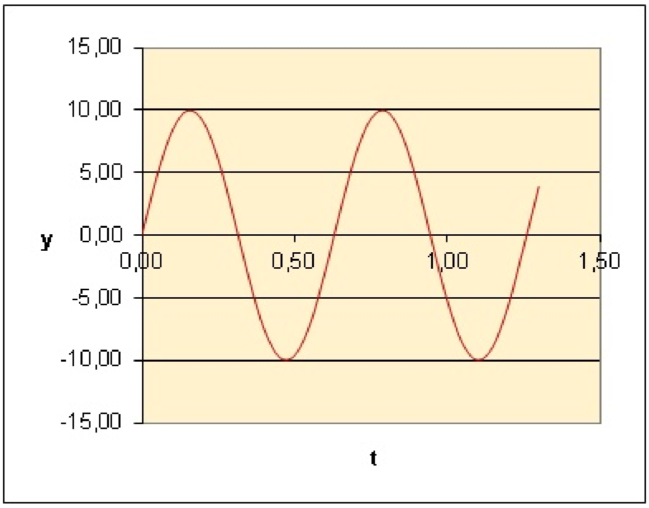

Abbildung 1

c) c) Die Zeiten sind bereits in b) berechnet worden: 0,16 s, 0,48 s, 0,79 s, 1,11 s.

Aufgabe 2: Die Schwingungsgleichung

Für die Kraft einer Feder gilt das lineare Kraftgesetz

$$F_{\mathrm{D}} = -D \cdot y.$$

a) Sie hängen nun eine Masse m an die Feder. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

c) Berechnen Sie die Periodendauer einer Schwingung für eine Feder mit $D = 200\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ und einer Masse von $m = 350\,\mathrm{g}$.

Lösung:

a) Hängt man ein Gewicht an die Feder, so wird sie gedehnt. In der Ruhelage müssen sich die Kräfte ausgleichen (Erinnerung: 1. Grundgleichung der Statik), d.h. die Federkraft F_{D} muss also gerade die angehängte Gewichtskraft F_{G} kompensieren, $F_{\mathrm{D}} + F_{\mathrm{G}} = 0$. Die Ruhelage wird für die folgenden Betrachtungen als Nullpunkt $y = 0$ der Auslenkung gewählt. Es folgt:

$$m \cdot a = -D \cdot y.$$

Mit $a = \ddot{y}$ der zweiten Ableitung lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{y} = -\frac{D}{m} \cdot y$$

b) Hier wird gewählt

$$y = \sin\left(\omega t + \phi\right).$$

Mit der zweiten Ableitung

$$\ddot{y} = -\omega^2 \sin\left(\omega t + \phi\right) = -\omega^2 \cdot y.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$\begin{aligned} -\omega^2 \cdot y &= -\frac{D}{m} \cdot y \\ \omega^2 &= \frac{D}{m} \\ \omega &= \sqrt{\frac{D}{m}}. \end{aligned}$$

Für die Lösung folgt:

$$y = \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t + \phi\right).$$

c) Mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

folgt

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0{,}26\,\mathrm{s}.$$

Aufgabe 3: gedämpfte Schwingung

Eine Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung in y-Richtung lautet beispielsweise

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) \cdot e^{-\beta t}.$$

a) Welche Fälle der Dämpfung gibt es? Welcher Fall wird mit dieser Gleichung beschrieben?

b) Wofür stehen die einzelnen Terme?

c) Bei einer Schwingung gehen hier etwa 5 % der mechanischen Enerie auf Grund von Reibungseffekten verloren. Bestimmen Sie die Abnahme der Amplitude pro Schwingungsdauer.

d) Wie groß ist mit den Werten aus c) die Amplitude nach 10 s, wenn die Feder bei $t = 0$ s um 10 cm aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wurde? Die Frequenz beträgt $f = 2{,}252$ Hz.

Lösung:

a) **Schwache Dämpfung** $\omega_0 > \beta$: Eigenfrequenz ist größer als die Dämpfungskonstante. Das System verhält sich näherungsweise wie ein ungedämpfter Oszillator mit abfallender Amplitude.
Überkritische Dämpfung $\omega_0 < \beta$ (Kriechfall): Die Dämpfung ist größer als die Resonanzfrequenz. Nach der Auslenkung fällt die Amplitude ohne Überschwingung exponentiell in die Gleichgewischtslage.
Aperiodischer Grenzfall $\omega_0 = \beta$: Dies wird auch als der Fall der kritischen Dämpfung bezeichnet. Der Gleichgewichtswert wird am schnellsten erreicht.

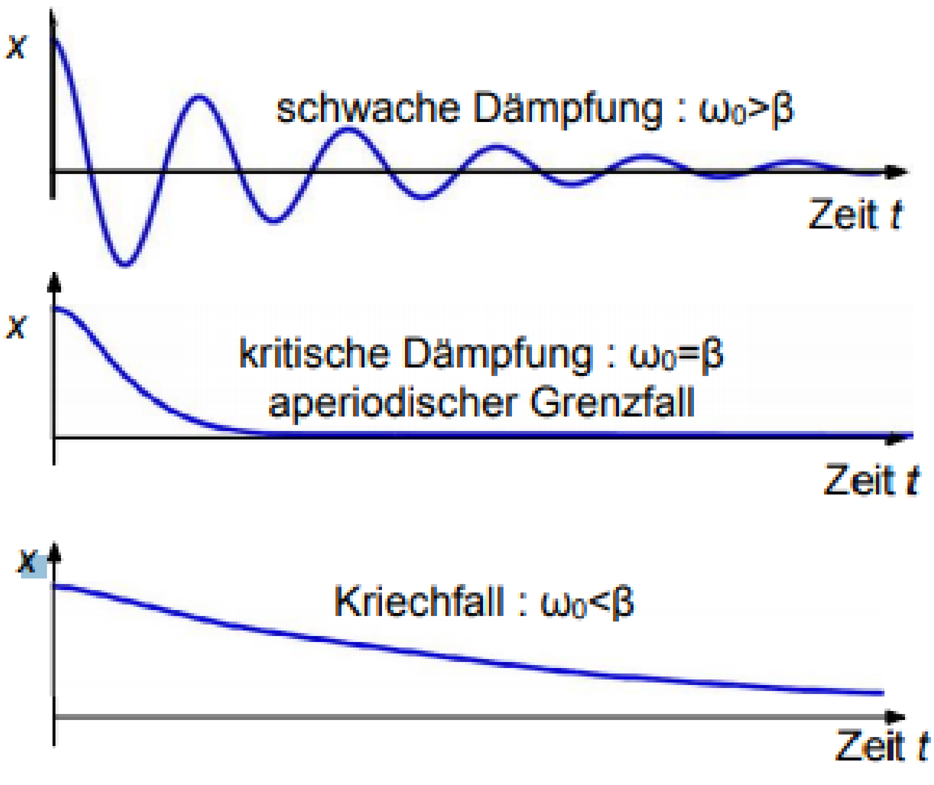

Abbildung 2

b) y_0 entspricht der Amplitude.
$\cos(\omega t)$ beschreibt die zeitabhängige Periodizität.
$e^{-\beta t}$ beschreibt die Dämpfung mit der Dämpfungskonstante β.

c) Gleichsetzen der Federenergie von zwei nacheinanderfolgenden Schwingungen liefert

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{0+\mathrm{T}} \\ \frac{1}{2} D y_{0,2}^2 &= 0{,}95 \cdot \frac{1}{2} D y_{0,1}^2 \end{aligned}$$

Umstellen nach

$$y_{0,2} = \sqrt{0{,}95} \cdot y_{0,1} = 0{,}975 y_{0,1}$$

Pro Schwingungsdauer nimmt die Amplitude um 2,5 % ab.

d) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ t &= t \cdot f \cdot T \\ 10\,\mathrm{s} &= 10\,\mathrm{s} \cdot 2{,}252\,\mathrm{Hz} \cdot T \approx 23T, \end{aligned}$$

das bedeutet, dass in den 10 Sekunden etwa 23 Perioden vergehen. Daraus folgt, dass nach 10 Sekunden die Amplitude nur noch $y_0(10\,\mathrm{s}) = (0{,}975)^{23} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 5{,}6\,\mathrm{cm}$ beträgt.