14. Übung zur Physik A/B 1 SS 2019

Ausgabe: 28.06.2019
Abgabe: bis 05.07.2019 12:00 Uhr
Briefkästen: 247, 248, 249

Prof. Dr. D. Suter

Aufgabe 1: Das Mikroskop 3 Punkte

Ein einfaches Lichtmikroskop kann als Kombination aus zwei Sammellinsen betrachtet werden. Dem Objektiv, das sich nah an dem zu betrachtetenden Objekt befindet und dem Okular, durch das der Experimentator schaut. Für die Vergrösserung V eines Mikroskops gilt näherungsweise

$$V = \frac{t}{f_{\text{Objektiv}}} \cdot \frac{s}{f_{\text{Okular}}},$$

wobei t der Abstand zwischen Okular und Objektiv und s die Sehweite bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Vergrösserung eines Mikroskops für $f_{\text{Objektiv}} = 12$ mm, $f_{\text{Okular}} = 20$ mm und $t = 20$ cm. Bei einem gesunden Auge liegt die minimale Sehweite des Forschers bei etwa $s \approx 25$ cm.

b) Ein gesundes Auge kann zwei Punkte als getrennt wahrnehmen, wenn diese nicht weniger als 0,15 mm voneinander entfernt sind. Berechnen Sie die Auflösung, die ein durch das Mikroskop blickender Forscher zur Verfügung hat.

c) In welcher Entfernung vom Objektiv muss sich ein Gegenstand befinden, damit das Endbild im Unendlichen entsteht (ermöglicht Beobachtungen mit entspanntem Auge)? Verwenden Sie dafür wieder die Werte aus a).

Aufgabe 2: Beugung und Interferenz 3 Punkte

a) Gegeben sei eine Seifenblase, die im Sonnenlicht in der Luft schwebt. Zu sehen ist eine bunte schlierende Oberfläche. Erklären Sie, wie dieser Effekt zustande kommt und wie er mit der Dicke der Seifenhaut zusammenhängt.

b) Ein Beugungsgitter besteht aus einer sehr großen Anzahl an einzelnen Spalten. Was sieht man hinter einem solchen Gitter, wenn es von vorne von einer Lichtquelle beleuchtet wird, die nicht monochromatisch ist, d.h. deren Licht nicht nur aus einer Wellenlänge besteht? Warum sollte die Anzahl an Spalten des Gitters möglichst groß sein?

Hinweis: In dieser Aufgabe sollen die Effekte qualitativ erklärt werden. Nehmen Sie ggf. Formeln zur Hilfe und erklären Sie die verwendeten Grössen.

Aufgabe 3: Wer das Quant fand' — 8 Punkte

$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J s: Planck'sches Wirkungsquantum (exakt)

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$: reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum

Max Planck konnte 1900 durch einen „Akt der Verzweiflung" als erster die in der nächsten Aufgabe behandelte Wärmestrahlung (Schwarzkörperstrahlung) erklären. Max Planck traf nämlich die Annahme, dass Licht aus kleinen Energiepaketen der Größe

$$E = h\nu = \hbar\omega = h\frac{c}{\lambda} \tag{1}$$

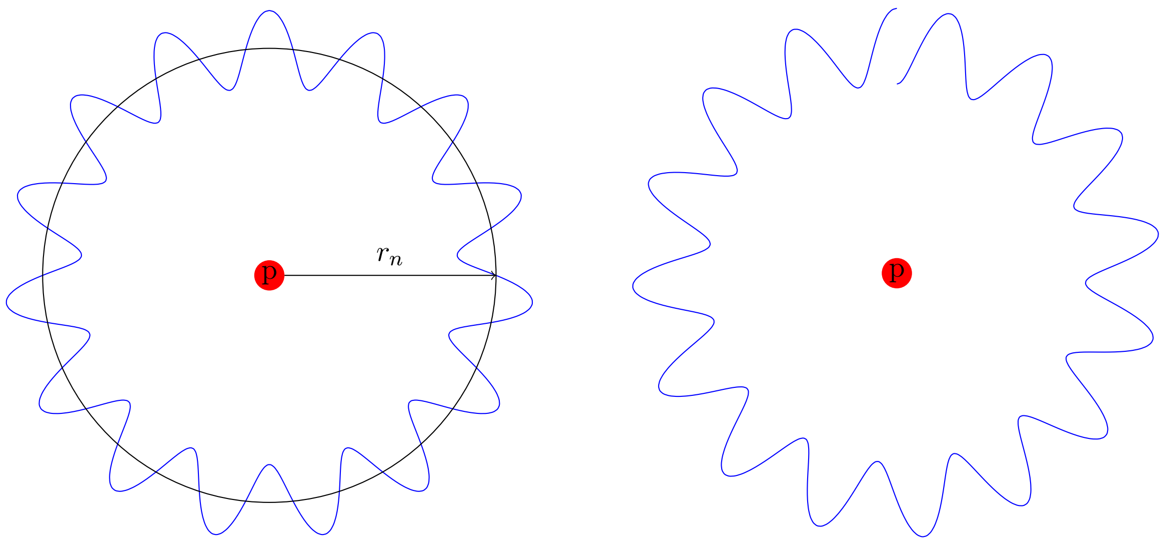
besteht. Mit dieser Annahme widersprach er allen Erkenntnissen der Elektrodynamik, die Licht als Welle beschrieb. Dies ist die Geburtsstunde der Quantenmechanik. *Niels Bohr* traf ebenfalls die Annahme, dass etwas in der Natur grundsätzlich gequantelt vorkommt und konnte so die Energieniveaus im Wasserstoff-Atom erklären. Bohr behauptete 1913, der Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ des Elektrons in Atomen liegt quantisiert vor:

$$L = |\vec{L}| = \hbar n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Laut *Albert Einstein* war *Louis de Broglie's* Annahme (1924), dass jedes Teilchen Welleneigenschaften aufweißt die durch eine Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \Leftrightarrow p = \hbar k \tag{3}$$

beschrieben werden können, das erste Licht im Dunkel der Quantenmechanik.



(a) Eine im Bohrschen Atommodell erlaubte Bahn ($n = 15$).

(b) Das Elektron kann sich hier auf keiner Bahn befinden.

Abbildung 1: Das Elektron als vereinfachte de-Broglie-Welle um ein Proton (Atomkern) bildet ein Wasserstoff-Atom.

a) Leiten Sie Gleichung (1) aus Gleichung (3) und der relativistischen Impuls-Energie-Beziehung $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ her. *Hinweis: Die Masse eines Lichtteilchens ist 0!*

b) Leiten Sie Gleichung (2) aus Gleichung (3) her. Machen Sie sich dazu über die Bedeutung von Abbildung 1 gedanken. Wie interferiert ein Elektron auf einer Bahn mit Radius r mit sich selbst? Wann kann diese Bahn stabil sein?

c) Welche Kräfte würden klassisch gesehen auf ein Elektron auf einer Kreisbahn um ein Proton wirken? Welchen Drehimpuls $L = mrv = pr$ besitzt es dadurch auf einer Kreisbahn? *Tipp: Stellen Sie Ihren Kraftansatz so um, dass Sie $L^2(r)$ erhalten, Sie brauchen die Wurzel nicht ziehen. Ihr Ergebnis sollte nur von r und Naturkonstanten abhängen!*

d) Kombinieren Sie den klassischen Ansatz mit Gleichung (2). Welche Radien r_n ergeben sich?

e) Welche Energie E_n gibt das Elektron ab, wenn es ungebunden ist, ruht und dann auf den n-ten Bahnradius springt? *Hinweis: Betrachten Sie die kinetische und die potentielle Energie und überlegen Sie sich, welche Vorzeichen diese haben!*

Bonusaufgaben für neugierige Quantenmechaniker: (+6 Punkte)
Die in dieser Aufgabe behandelten Phänomene bilden die Anfänge der Quantenmechanik. Den „Höhepunkt” der nichtrelativistischen Quantenmechanik stellt die Schrödingergleichung dar:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Diese ist sozusagen das Äquivalent zu Newton's zweitem Gesetz, nur eben für die Quantenmechanik. Die hier angegebene Form gilt für ein eindimensionales freies Teilchen (ohne Potential) und beschreibt die Zeitentwicklung der Wellenfunktion. Dies ist die konkrete Form der bei de Broglie noch vagen Formulierung „Das Elektron besitzt Welleneigenschaften”. Nach der *Kopenhagener Deutung* ist das Betragsquadrat $|\psi|^2$ dieser Wellenfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeitverteilung des Elektrons. Falls Ihnen diese Konzepte noch etwas unklar sein sollten, zögern Sie nicht Literatur Ihrer Wahl zu Rate zu ziehen. Sie sollen sich in dieser Bonusaufgabe selber ein wenig mit der Wellenfunktion vertraut machen. Nehmen Sie an, das Elektron sei eine Welle der Form

$$\psi(x,t) = \begin{cases} N \sin(kx)\, e^{-i\omega t}, & \text{wenn } x \in [-L, L] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{5}$$

a)**Bonus** Bestimmen Sie k so, dass $\psi(x,t)$ stetig ist (keine Sprünge macht).

b)**Bonus** Zeigen Sie, dass $\psi(x,t)$ die Schrödingergleichung (4) löst (Nutzen Sie die Gleichungen (1) und (3)).

c)**Bonus** Weil $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x,t)|^2 \, dx$ die Wahrscheinlichkeit sein soll, das Teilchen zwischen x_1 und x_2 zu treffen, muss $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx \overset{!}{=} 1$. Bestimmen Sie unter dieser Vorraussetzung N.

d)**Bonus** Wie wahrscheinlich ist es, das Teilchen in $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ zu messen?

Aufgabe 4: Voll im Physik-Fieber — 3 Punkte

Erfahrungsgemäß ist bekannt, dass heiße Dinge (wie z.B. die Sonne) strahlen. In der Tat strahlt alles, was eine Temperatur $T > 0$ besitzt. Diese thermische Strahlung ist wie schon in Aufgabe 3 erwähnt nur quantenmechanisch zu verstehen. *Max Planck* stellte 1900 das Strahlungsgesetz

$$L \, d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{T k_B}} - 1} \, d\nu \tag{6}$$

auf. Darin bezeichnet $L\,\mathrm{d}\nu = \frac{P}{A}$ die Strahlungsleistung pro Fläche im Frequenzbereich $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$. Möchte man nun wissen, mit welcher Intensität $I = \frac{P}{A}$ ein idealisierter Strahler, auch *schwarzer Strahler* genannt, in einem Frequenzbereich von ν_1 bis ν_2 strahlt, so muss man integrieren:

$$I_{(\nu_1,\nu_2)} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} L\,\mathrm{d}\nu$$

Integriert man über alle Frequenzbereiche (0–∞) so erhält man das schon vor Planck bekannte *Stefan-Boltzmann-Gesetz*:

$$P = \sigma T^4 A, \quad \sigma = const. = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15\hbar^3 c^2} \approx 5{,}670\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}. \tag{7}$$

Untersucht man, wo das Wellenlängenmaximum des Planck'schen Strahlungsgesetzes liegt, so ergibt sich das ebenfalls schon vor 1900 bekannte *Wien'sche Verschiebungsgesetz*:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad b = 2897{,}8\ \mathrm{\mu m\,K}. \tag{8}$$

Denken Sie daran Temperatur in einer absoluten Temperatureinheit zu benutzen!
Ab 38 °C Körpertemperatur hat ein Mensch Fieber. Ab 43 °C ist der Mensch nicht mehr überlebensfähig. Moderne Fieberthermometer können über die Wärmestrahlung (die bei diesen Temperaturen zum Großteil im infraroten liegt) die Körpertemperatur messen. *Hinweis: Sie können für diese Aufgabe annehmen, dass der Mensch ein schwarzer Strahler ist.*

a) Sie messen bei sich eine Strahlungsleistung von $P = 28$ mW auf einer Querschnittsfläche von $A = 0{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Wie ist die Lage bei Ihnen?

b) Ihr Messgerät kann die Strahlungsleistung bis auf $\Delta P = 1$ mW genau bestimmen. In welchem Bereich kann Ihre Körpertemperatur liegen, wenn Sie $P = 28$ mW messen? Ist das Messgerät geeignet, um die Körpertemperatur zu messen?

c) Jetzt verwenden Sie ein handelsübliches Infrarot-Fieberthermometer, welches das Wellenlängenmaximum abschätzt. Das Fieberthermometer ist kaputt und zeigt nur eine Wellenlänge von $\lambda_{\max} = 9{,}25\ \mathrm{\mu m}$ an. Wie geht es Ihnen nach dieser Angabe?