

# 7 Optik

## 7.1 Grundlagen

### 7.1.1 Historisches

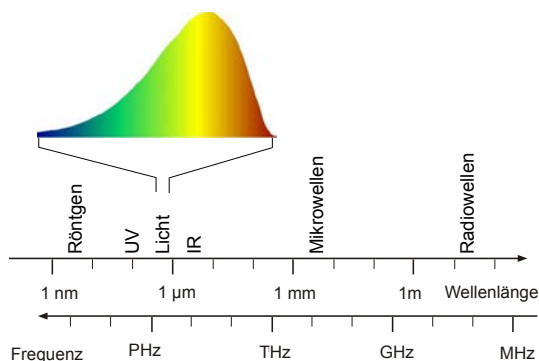


Abbildung 7.1: Licht als Teil des elektromagnetischen Spektrums.

Heute betrachten wir Licht als einen Bereich des elektromagnetischen Spektrums. Abb. 7.1 zeigt einen Überblick über einen Teil des elektromagnetischen Spektrums, in dem das sichtbare Licht einen kleinen Bereich abdeckt. Die theoretischen Grundlagen sind durch Maxwell's Gleichungen (siehe Kapitel 5), gut abgedeckt, wobei man für einige Aspekte die Quantenmechanik berücksichtigen muss (siehe Kapitel 7). Dabei stellt Licht nur einen kleinen Bereich des elektromagnetischen Spektrums dar, allerdings einen besonders wichtigen Teil, u. A. deshalb weil wir es direkt mit unserem wichtigsten Sinnesorgan, dem Auge, wahrnehmen können.

Die Natur des Lichtes hat Philosophen und Naturwissenschaftler seit vielen Jahrhunderten beschäftigt und zu engagierten Debatten geführt. Insbesondere wurde heftig darüber debattiert, ob Licht aus Teilchen oder Wellen bestehe.

Abb. 7.2 zeigt zwei Physiker, welche im 17. Jahrhundert erste wissenschaftliche Arbeiten zur Natur des Lichtes publiziert haben. 1672 stellte Newton eine Theorie auf, welche Wellen- und Teilchenaspekte



Isaac Newton  
1672 Licht als Teilchenwellen



Christiaan Huygens  
1678 Theorie von Licht  
als Ätherwellen

Abbildung 7.2: Zwei Pioniere der naturwissenschaftlichen Theorie des Lichtes.

enthielt; die Wellenaspekte traten aber bald in den Hintergrund und seine Theorie wurde im Wesentlichen als Teilchentheorie betrachtet. Dazu gehörte vor allem die geradlinige Ausbreitung; Brechung und Reflexion wurden relativ leicht erklärbar. 1678 stellte Huygens eine Wellentheorie auf, welche Interferenz und Beugung erklären konnte. Newton's Ansehen in der Naturwissenschaft war aber so dominant, dass Huygens kaum beachtet wurde. Experimentelle Hinweise auf solche Effekte hatten zuvor die Experimente von Francesco Grimaldi (1618-1663) ergeben.

Abb. 7.3 fasst weitere Stufen zusammen: 1808 untersuchte Malus und 1815 Fresnel die Polarisations-eigenschaften von Licht. Während wir das als einen Beweis der Wellenaspekte ansehen war das damals für die Wellentheorie eher eine Schwierigkeit, da damals nur Longitudinalwellen bekannt waren, welche Polarisations-eigenschaften nicht erklären können.

1865 stellte Maxwell die Theorie des Elektromagnetismus. Diese stellt heute die Grundlage für die klassische Theorie des Lichtes dar. Es dauerte allerdings noch einige Jahre bis die Experimente von Hertz



Jean Augustin Fresnel  
1815 Polarisations-eigenschaften,  
Reflexion



James Clerk Maxwell  
1865 Theorie elektromagnetischer  
Wellen

Abbildung 7.3: Fresnel und Maxwell.

zeigten, dass Licht ein Beispiel einer elektromagnetischen Welle ist. Damit wurde die Optik ein Teilgebiet der Elektrodynamik. 1905 zeigte jedoch Einstein, dass man bestimmte Phänomene nur verstehen kann, wenn man dem Licht eine "Doppelnatur" zuschreibt: bei der Ausbreitung verhält es sich wie eine Welle, bei der Wechselwirkung mit Materie wie eine Teilchenstrom. Dies wird im Detail im Rahmen der Quanten-Elektrodynamik behandelt.

Auch im Bereich des sichtbaren Lichts findet man unterschiedliche Wellenlängen. Diese entsprechen unterschiedlichen Farben des Lichts. Sichtbares Licht enthält unterschiedliche Wellenlängen, wobei wir den kurzwelligen Bereich blau sehen, den langwelligen Bereich rot.

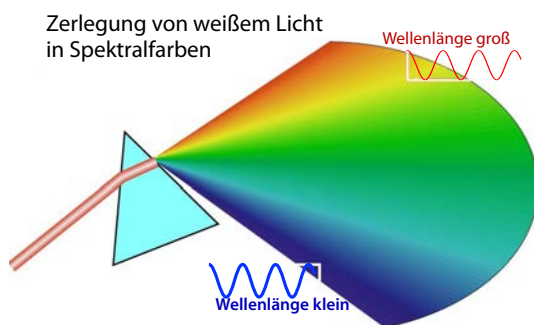


Abbildung 7.4: Spektralzerlegung mit einem Prisma.

Abb. 7.4 zeigt das Prinzip eines Experiment, welches dies nachweist, indem es einen Strahl weißen Lichts auf ein Prisma schickt. Rotes und blaues Licht wird darin unterschiedlich gebrochen und kann deshalb

dahinter getrennt beobachtet werden. Es gibt eine Reihe von Lehrbüchern zu diesem Thema.

### 7.1.2 Beschreibung

Die physikalische Optik befasst sich mit der Erzeugung, Ausbreitung und dem Nachweis von Licht. In einem weiteren Sinn gehören dazu auch andere Wellen. Prinzipiell können alle Phänomene, die elektromagnetische Strahlung involvieren durch die Quantenelektrodynamik beschrieben werden. Diese ist aber oft zu kompliziert und wird im Rahmen der Grundvorlesungen nicht unterrichtet. Stattdessen kann man unterschiedliche Beschreibungen verwenden, die für einen großen Bereich der interessanten physikalischen Phänomene genügen.

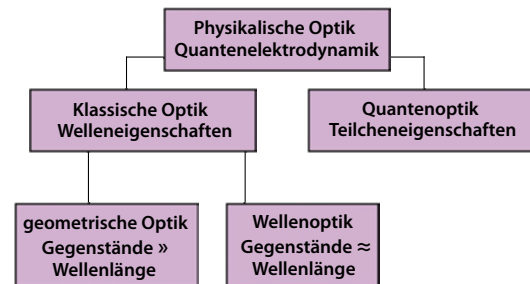


Abbildung 7.5: Teildisziplinen der Optik.

Die meisten Phänomene kann man auch mit der klassischen Elektrodynamik beschreiben, welche Licht als eine elektromagnetische Welle betrachtet. Innerhalb der klassischen Optik unterscheidet man, wie in Abb. 7.5 gezeigt, zwischen den Teilgebieten

- geometrische Optik oder Strahlenoptik: Licht kann mit als Strahlen beschrieben werden wenn die interessanten Dimensionen groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts. Diesen Bereich versucht man immer zu treffen wenn man Abbildungen macht, also z.B. in der Fotografie. Sie Bedingung führt aber z.B. dazu, dass man auch bei sehr viel Licht die Blende nicht beliebig klein machen kann.
- ist diese Bedingung nicht mehr erfüllt, so muss man den Wellencharakter des Lichtes berücksichtigen; es treten zusätzliche Effekte wie Beugung und Interferenz auf. Dieser allgemeinere

Bereich wird durch die Maxwell Gleichungen abgedeckt.

- Wenn die Wechselwirkung mit materiellen Systemen involviert ist, so müssen diese meist quantenmechanisch beschrieben werden. Allerdings kann man die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes selbst in den meisten Fällen weiterhin klassisch halten. Man nennt dies die semiklassische oder halbklassische Näherung.
- Mit Quantenoptik wird derjenige Teil der Optik bezeichnet, welcher spezifisch quantenmechanische Aspekte behandelt.

### 7.1.3 Erzeugung von Licht

Elektromagnetische Strahlen werden allgemein durch beschleunigte Ladungen und oszillierende Dipole erzeugt. Für eine effiziente Abstrahlung müssen die Dipole dabei kleiner sein als die Wellenlänge der Strahlung, bei sichtbarem Licht liegen diese Dimensionen im Nanometer-Bereich. Die eigentlichen Quellen sind meistens Schwingungen von Elektronen in Atomen. Diese Schwingungen können auf unterschiedliche Weise angeregt werden; am Einfachsten geschieht dies durch Erwärmen. Solche Quellen werden als thermische Quellen bezeichnet. Das beste Beispiel dafür ist die Sonne, aber natürlich auch eine Glühlampe. Solche Quellen verhalten sich in guter Näherung wie ein Schwarzkörperstrahler, d.h. eine Quelle, welche alle Wellenlängen vollständig absorbiert und nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit wieder emittiert. Ein wichtiger Aspekt solcher Quellen ist, dass die spektrale Verteilung der Strahlung nicht vom Material der Quelle abhängt. Jeder schwarze Strahler hat ein Spektrum, welches nur von der Temperatur abhängt. Details dazu werden im Kapitel [8](#) behandelt.

Das Spektrum eines schwarzen Strahlers wird durch das Planck'sche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{2hc^5}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}.$$

Es besagt, dass das Maximum der emittierten Strah-

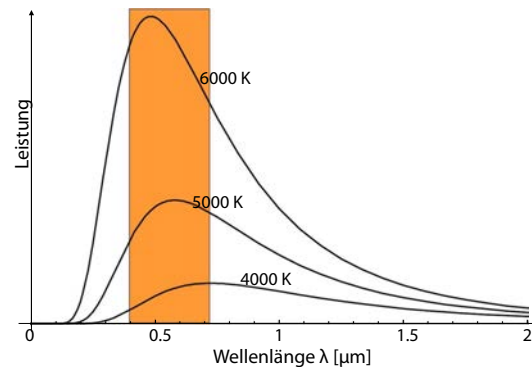


Abbildung 7.6: Verteilung der Intensität über die Wellenlängen bei verschiedenen Temperaturen gemäß dem Planck'schen Strahlungsgesetz.

lung sich mit höheren Temperaturen zu immer kürzeren Wellenlängen verschiebt.

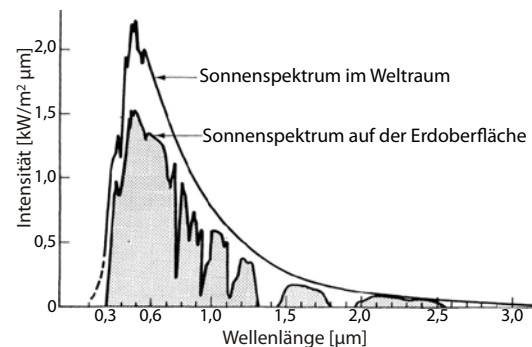


Abbildung 7.7: Spektrum der Sonne.

Der wichtigste Strahler ist bei weitem die Sonne, die eine Oberflächentemperatur von etwa 6000 Grad aufweist. Das Emissionsmaximum liegt somit bei ca. 500 nm und der größte Teil der emittierten Leistung liegt im Bereich des sichtbaren Lichtes. Allerdings gelang nicht alle Strahlung bis auf die Erdoberfläche - ein Teil wird durch die Atmosphäre absorbiert, insbesondere im UV-Bereich.

Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von Licht benutzt sogenannte elektronische Übergänge in atomaren Spektren: Hier gehen Elektronen von energetisch höher liegenden Zuständen in tiefere über und senden dabei Licht aus. Dies werden Sie in der Quantenmechanik diskutieren. Die wohl Bekannteste solcher Quellen sind Natriumdampflampen, wel-

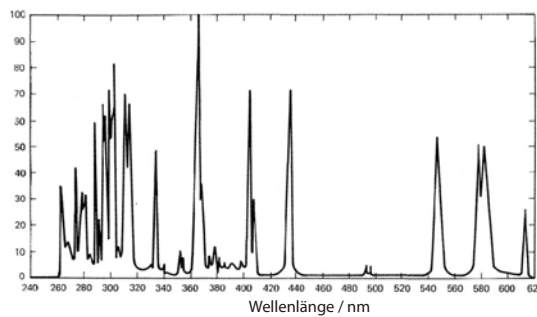


Abbildung 7.8: Linienpektrum einer Hg-Xe Lampe.

che vor allem für die Straßenbeleuchtung eingesetzt werden.

Eine weitere Art der Erzeugung von Licht ist der Laser. Dies ist eine Quelle die besonders nützliche Eigenschaften hat. Laserlicht kann auf verschiedene Arten erzeugt werden und hat je nach Erzeugungsart unterschiedliche Eigenschaften. Die Eigenschaften von Laserlicht werden in Kapitel 7.9 diskutiert.

#### 7.1.4 Nachweis von Licht

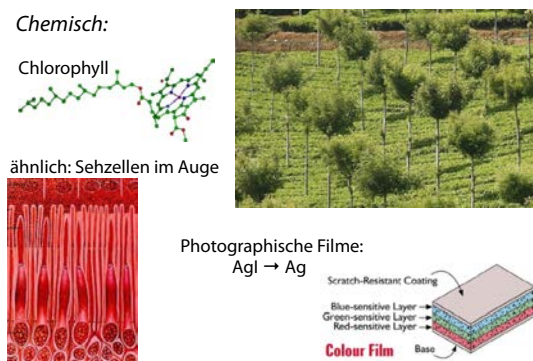


Abbildung 7.9: Umwandlung von Licht in chemischen Systemen.

**Chemische Sensoren:** Hier regt das Licht ein Elektron in einem Molekül in einen höher angeregten Zustand an. Abb. 7.9 zeigt einige Beispiele. Das angeregte Elektron kann anschließend für chemische Reaktionen verwendet werden. Dieses Prinzip wird insbesondere in der Natur benutzt, z.B. durch die Sinneszellen im menschlichen Auge, aber auch durch das Chlorophyll in Pflanzen etc. Die frühesten De-

tektoren für Licht (neben dem menschlichen Auge) waren fotografische Filme, also dünne Schichten von lichtempfindlichem Material, in dem beim Auftreffen von Licht eine chemische Umwandlung stattfindet. Diese haben eine recht hohe Empfindlichkeit und können in einer Fläche Licht detektieren.

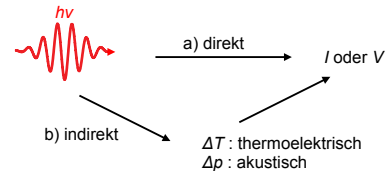


Abbildung 7.10: Umwandlung von Licht in ein elektrisches Signal.

Chemische Detektoren werden heute kaum mehr verwendet, weil die Information erst nach dem Entwicklungsprozess zur Verfügung steht. Heute ist bei praktisch allen verwendeten Detektoren das resultierende Signal eine elektrische Spannung um, wie in Abb. 7.10 gezeigt. Damit steht das resultierende Signal unmittelbar für die Messung zur Verfügung. Während einige Detektoren direkt Photonen in einen Strom oder eine Spannung umwandeln benutzen andere Detektoren verschiedene Zwischenstufen. So kann das einfallende Licht zunächst in Wärme umgewandelt werden und anschließend wird die Temperaturerhöhung in ein elektrisches Signal umgewandelt. Solche Detektoren kommen u. A. dann zur Anwendung wenn der Detektor über einen möglichst großen Wellenlängenbereich eine konstante Empfindlichkeit aufweisen soll. Ein weiterer Anwendungsbereich ist der Nachweis von Strahlung im infraroten Teil des Spektrums, wo Detektoren, die direkt ein elektrisches Signal erzeugen, eine zu geringe Empfindlichkeit aufweisen. Dieses Prinzip benutzt man z.B. wenn man die Sonne auf der Haut spürt. Physikalische Detektoren, die auf diesem Prinzip basieren sind

- Bolometer: Widerstandsänderung in einem Metall
- Thermistoren: Widerstandsänderung in einem Halbleiter
- Pyroelektrische Detektoren: Die Temperaturerhöhung ändert eine Oberflächenladung

- Eine weitere Möglichkeit nutzt den Photoeffekt (→ Abb. 7.11): Licht, das auf eine Metalloberfläche auftrifft, kann aus dieser Elektronen herauslösen. Diese Elektronen werden anschließend vervielfacht und nachgewiesen. Dieser Effekt wird im Rahmen der Quantenmechanik noch genauer diskutiert.

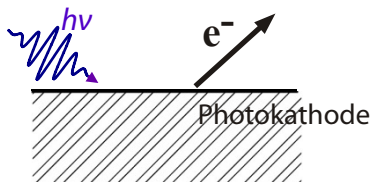


Abbildung 7.11: Photoeffekt.

Wie in Abb. 7.11 gezeigt, lösen dabei Photonen aus der Oberfläche eines Metalls Elektronen heraus. Eine solche Metalloberfläche wirkt also als Quelle für Elektronen und wird als Photokathode bezeichnet.

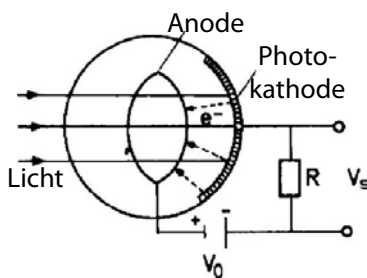


Abbildung 7.12: Photozelle.

Wie in Abb. 7.12 gezeigt, kann man die emittierten Elektronen auf einer Anode einfangen und den so erzeugten Photostrom direkt messen. Dafür muss sich das Elektrodenpaar im Vakuum befinden. Diese Anordnung wird als Photozelle bezeichnet. Wenn die Lichtintensität relativ gering ist, kann es aber vorteilhaft sein, das Signal noch zu verstärken. Dies geschieht meistens über einen Sekundärelektronenvervielfacher:

Wie in Abb. 7.13 gezeigt, werden dabei die freiwerdenden Elektronen in einem Potential beschleunigt und auf die Oberfläche einer sekundären Elektrode (Dynode) fokussiert. Elektronen, die mit einigen 100 eV auftreffen, lösen aus der Metalloberfläche wiederum mehrere Elektronen heraus, welche anschließend

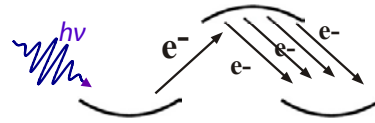


Abbildung 7.13: Sekundärelektronenvervielfacher.

wiederrum beschleunigt werden können.

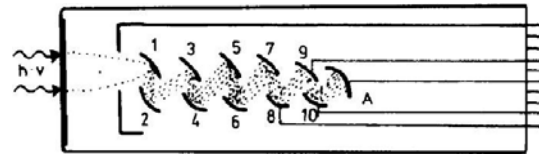


Abbildung 7.14: Vervielfachungskaskade in einem Photomultiplier.

Eine Reihe solcher Vervielfacherstufen kann, wie in Abb. 7.14 gezeigt, pro Photon z.B.  $10^7$  Elektronen erzeugen, welche anschließend sehr viel einfacher detektiert werden können. Diese Art von Detektoren werden als Photomultiplier bezeichnet.

### 7.1.5 Halbleiterdetektoren

Eine andere Gruppe von Detektoren wandelt Photonen in einen elektrischen Strom um, indem in einem Halbleiter durch Einfangen der Photonen Elektron-Loch Paare erzeugt werden.

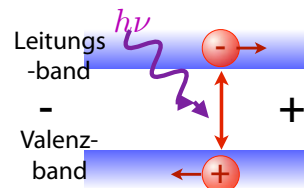


Abbildung 7.15: Paarzerzeugung in einem Halbleiter als Basis der Photoleitung.

Wie in Abb. 7.15 gezeigt, machen die so erzeugten Ladungen das Material photoleitend. Es ist somit möglich, das Licht durch die Änderung des Widerstandes zu detektieren. Voraussetzung für die Absorption des Photons ist, dass dessen Energie mindestens dem Energieunterschied zwischen den beiden Bändern entspricht. Somit sind Halbleiterdetektoren blind für Licht mit einer Wellenlänge, die größer ist



als die charakteristische Wellenlänge des verwendeten Materials. Meist liegt diese im sichtbaren Bereich des Spektrums oder im nahen Infraroten.

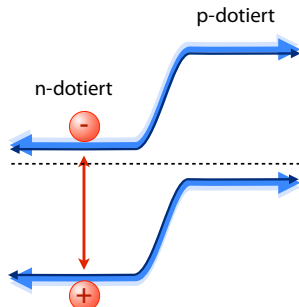


Abbildung 7.16: Paarzerzeugung am pn-Übergang einer Photodiode.

Wenn die in der Nähe eines p-n Übergangs geschieht, wie in Abb. 7.16, so werden die Ladungen getrennt, so dass die Rekombination vermieden wird und ein elektrischer Strom fließt. Nach diesem Prinzip arbeiten Photodioden und Solarzellen. Photodioden sind heute der weitaus häufigste Detektortyp. Sie benötigen im Gegensatz zu einem Photomultiplier keine Hochspannung und kein Vakuum, sondern sind reine Festkörperdetektoren. Damit sind sie sehr viel zuverlässiger und werden außerdem nicht durch Magnetfelder beeinflusst. Sie sind sehr kompakt und billig. Die Quantenausbeute kann mehr als 90% betragen, sofern die Oberfläche mit einer Anti-reflexbeschichtung versehen wird: typische Halbleiter haben einen hohen Brechungsindex (z.B. GaAs  $n = 3.6$ ), so dass bei unbehandelten Oberflächen auch bei senkrechtem Einfall 25% des Lichtes an der Oberfläche reflektiert wird.

Die Empfindlichkeit als Funktion der Wellenlänge hängt von der Bandlücke des verwendeten Materials ab. Abb. 7.17 zeigt die spektrale Empfindlichkeit für zwei unterschiedliche Materialien. Silizium hat eine etwas größere Bandlücke als GaAs und absorbiert deshalb besser im sichtbaren Bereich des Spektrums, während GaAs im nahen IR seine höchste Effizienz erreicht.

Es ist auch bei Photodioden möglich, die erzeugten Photoelektronen zu vervielfachen, indem man an geeignete Photodioden eine hohe Spannung anlegt. Die Beschleunigung erfolgt in diesem Fall inner-

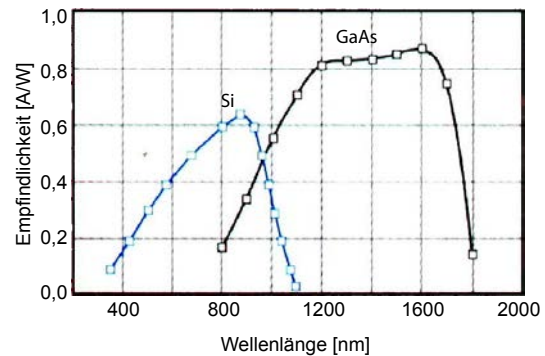


Abbildung 7.17: Spektrale Empfindlichkeit von 2 unterschiedlichen Photodioden.

halb des Halbleitermaterials. In diesen Avalanche-Photodioden können die beschleunigten Elektronen ihrerseits wieder Ladungsträger erzeugen, so dass ein Photon einen hohen Spannungspuls erzeugen kann, ähnlich wie bei Photomultipliern.

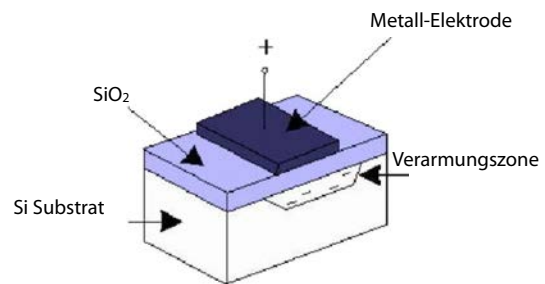


Abbildung 7.18: Aufbau einer CCD-Zelle.

Einer der populärsten Detektoren ist heute der CCD (=Charge Coupled Device). CCD's bestehen aus einzelnen lichtempfindlichen Elementen, die in einem zweidimensionalen Raster angeordnet sind. Die einzelnen Elemente ( $\rightarrow$  Abb. 7.18) sind enthalten eine Silizium-Verarmungszone, in der das einfallende Licht Ladungen erzeugt. Durch eine geeignete Vorspannung und Dotierung wird eine Ansammlung der Ladungen unterhalb der Oberfläche erreicht.

## 7.2 Lichtausbreitung

### 7.2.1 Lichtgeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht ist für viele Anwendungen zu groß um messbar zu sein. So versuchte Galilei 1667 die Lichtgeschwindigkeit zu messen, indem zwei Personen sich gegenseitig mit Hilfe von Laternen Lichtsignale zusandten. Es gelang ihm jedoch nur, eine untere Grenze von ca. 3000 m/s zu setzen. Die erste Messung, welche einen endlichen Wert ergab, stammt vom Astronomen Ole Rømer (1644-1710).

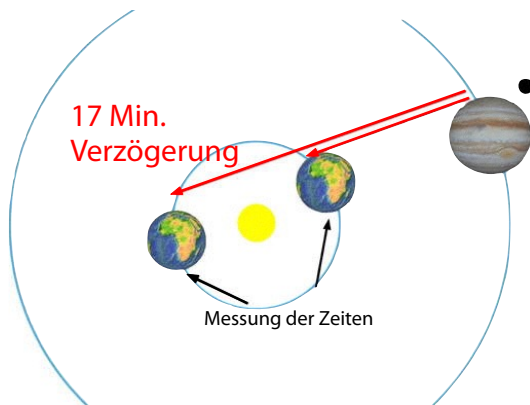


Abbildung 7.19: Rømer's Interpretation seiner Experimente.

Er beobachtete die Zeiten, zu denen der Mond Io von Jupiter verdunkelt wird. Die Umlaufbahn von Io um Jupiter hat eine Periode von 42,5 Stunden. Während man erwarten würde, dass die Abstände zwischen den Verdunkelungen sehr regelmäßig sein sollten, findet man experimentell jahreszeitliche Schwankungen. Abb. 7.19 zeigt, wie Rømer dieses Resultat interpretierte. Befinden sich Erde und Jupiter auf entgegengesetzten Seiten der Sonne, so sind die Zeiten um etwa 17 Minuten verspätet gegenüber denjenigen, die man aufgrund von Messungen erwarten würde, bei denen Erde und Jupiter auf der gleichen Seite der Sonne sind. Diese 17 Minuten entsprechen der Zeit, welche das Licht benötigt, um die Strecke von 300 Mio. km zurückzulegen, welche dem Durchmesser der Erdbahn entsprechen:

$$c\Delta t = 3 \cdot 10^8 \cdot 17 \cdot 60 \text{ m} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m} = 3 \cdot 10^8 \text{ km}.$$

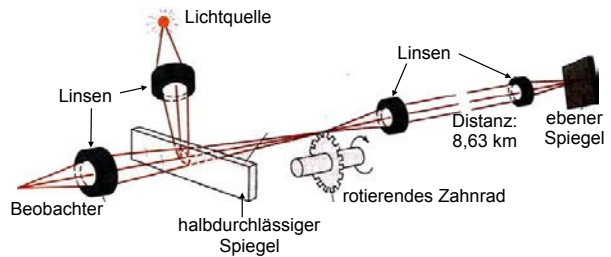


Abbildung 7.20: Prinzip von Fizeau's Messung.

Die erste erfolgreiche terrestrische Messung der Lichtgeschwindigkeit erfolgte 1849 durch Armand Fizeau. Er verwendete, wie in Abb. 7.20 gezeigt, ein schnell drehendes Zahnrad, welches einen Lichtstrahl unterbrach, der von einem Spiegel reflektiert wurde. Wenn die Zeit, welche der Lichtstrahl benötigt, bis er wieder beim Rad ist, gerade der Zeit entspricht, in der das Rad sich um einen halben Abstand zwischen zwei Zähnen dreht, erreicht der Strahl den Beobachter nicht mehr.

### 7.2.2 Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau-Michelson

Eine moderne Variante davon, welche mit geringeren Armlängen auskommt, verwendet anstelle eines Zahnrades einen schnell drehenden Spiegel. Dreht sich der Drehspiegel nicht oder nur langsam, so wird der Laserstrahl in sich selber reflektiert. Bei genügend schneller Drehung genügt die Zeit, welche das Licht vom Drehspiegel bis zum Umlenkspiegel und wieder zurück benötigt, um einen etwas anderen Winkel zu erreichen. Der reflektierte Strahl wird deshalb leicht abgelenkt.

Abbildung 7.21 zeigt den Aufbau. Die Zeit, welche der Laserstrahl vom Drehspiegel zum Endspiegel und wieder zurück benötigt beträgt

$$\Delta t = \frac{2L}{c}.$$

Während dieser Zeit bewegt sich der Drehspiegel um den Winkel

$$\alpha = \omega \Delta t = \frac{4\pi\nu L}{c},$$

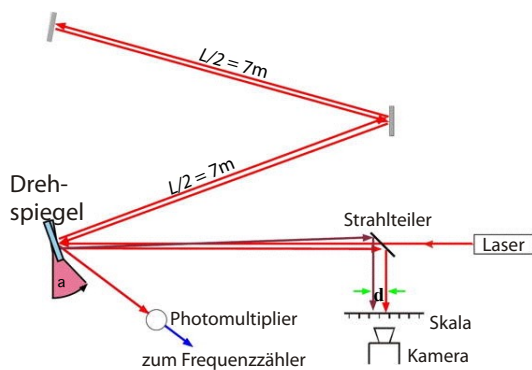


Abbildung 7.21: Messung mit Drehspiegel.

wobei  $v$  die Rotationsgeschwindigkeit des Drehspiegels darstellt. Der Laserstrahl wird durch die Reflexion um den doppelten Drehwinkel des Spiegels abgelenkt und auf der Skala um die Distanz

$$d = 2\ell\alpha = \frac{8\pi v L \ell}{c}$$

ausgelenkt, wobei  $\ell$  die Distanz Drehspiegel – Skala darstellt. Wir können diesen Ausdruck nach der Lichtgeschwindigkeit auflösen:

$$c = \frac{8\pi v L \ell}{d} = 2,111 \cdot 10^6 \frac{v}{d}.$$

Der numerische Wert ist für die experimentellen Parameter  $L = 14$  m und  $\ell = 6$  m bestimmt, wobei die Frequenz  $v$  in Hertz und die Distanz  $d$  in mm einzusetzen sind. Ein experimenteller Datensatz ist

$d[\text{mm}]$	$v [\text{s}^{-1}]$	$\frac{v}{2} [\text{s}^{-1}]$	$c[10^8 \text{ ms}^{-1}]$
1	282	141,0	2,9767
2	563	281,5	2,9714
3	834	417,0	2,9345
4	1129	564,5	2,9794

Dies entspricht einem experimentellen Mittelwert von  $c_{\text{exp}} = 296550$  km/s, während der genaue Wert bei  $c_{\text{exakt}} = 299792.458$  km/s liegt.

1864 bemerkte James Clerk Maxwell, dass seine Theorie der elektromagnetischen Wellen eine Geschwindigkeit eine Phasengeschwindigkeit vorher-

sagte:

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 8,854188 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}}} \\ &= 299792 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Er verglich diesen Wert mit dem damals bekannten experimentellen Wert und bemerkte

“This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiation if any) is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws.”

Später wurde die Lichtgeschwindigkeit ohne bewegliche Teile gemessen indem man gleichzeitig die Frequenz und die Wellenlänge maß. Heute kann man die Lichtgeschwindigkeit nicht mehr messen – sie ist definiert als die Geschwindigkeit  $c = 299'792'458$  m/s.

### 7.2.3 Brechungsindex

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit geringer. Wie bereits im Kapitel 4 diskutiert, ist die allgemeine Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge in einem Medium gegeben durch die Beziehung  $\omega = kc/n$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium ist deshalb reduziert,  $v_M = c/n$ , mit  $n$  = Brechungsindex.

Typische Werte für die Brechzahl liegen je nach Material zwischen 1 und 3.

Die Brechzahl ist abhängig von der Wellenlänge. In vielen Materialien steigt die Brechzahl an, wenn die Wellenlänge kürzer wird, d.h. mit zunehmender Frequenz, wie in Abb. 7.22 gezeigt.

Gemäß der elektromagnetischen Wellengleichung ist der Brechungsindex gegeben als  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ .



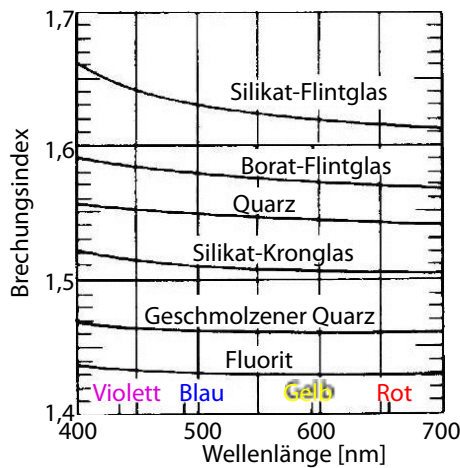


Abbildung 7.22: Variation des Brechungsindex unterschiedlicher Glassorten mit der Wellenlänge.

In den meisten Materialien liegt  $\mu_r$  nahe bei eins, so dass der Ausdruck vereinfacht werden kann zu  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ . Die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsindex sind stark von der Frequenz (resp. Wellenlänge) der Strahlung abhängig.

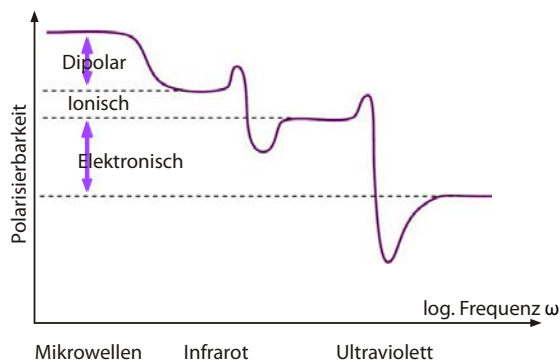


Abbildung 7.23: Typische Frequenzabhängigkeit der Polarisierbarkeit.

So beträgt die Dielektrizitätskonstante von Wasser bei statischen Feldern ( $\omega=0$ ) 81, während der Brechungsindex für sichtbares Licht in der Gegend von 1.33 liegt. Der Grund liegt darin, dass die unterschiedlichen Beiträge unterschiedlich schnell sind. Abb. 7.23 zeigt schematisch, in welchen Frequenzbereichen die wichtigsten Beiträge liegen. Im optischen Bereich können nur noch die elektronischen Beiträge der äußeren Anregung folgen, während di-

polare oder ionische Anregungen gemittelt erscheinen. Im kurzwelligen Bereich des sichtbaren Spektrums nähert man sich den elektronischen Anregungen. Deshalb nimmt in diesem Bereich der Brechungsindex allgemein zu. Dies wird als "normale Dispersion" bezeichnet (siehe auch Abb. 7.22).

## 7.2.4 Absorption und Dispersion

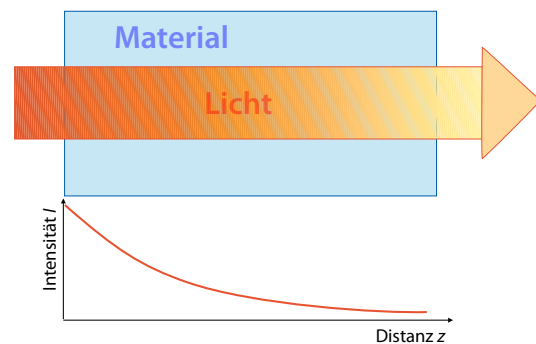


Abbildung 7.24: Absorption schwächt die Intensität.

Wenn Licht sich in Materie ausbreitet, nimmt die Intensität ab, wie in Abb. 7.24 gezeigt. Dies ist auf Absorption zurückzuführen. In den meisten Fällen ist die Verringerung der Intensität des Lichtes bei der Durchquerung einer dünnen Schicht direkt proportional zur Intensität des einfallenden Lichtes,

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I,$$

wobei die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  offenbar die Dimension einer inversen Länge aufweist. Die Lösung ist

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z},$$

d.h. die Intensität fällt exponentiell ab. Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  ist somit das Inverse der Distanz, über welche die Intensität auf  $1/e$  abfällt. Diese Distanz wird als Absorptionslänge bezeichnet.

Absorption und Dispersion sind eng miteinander verknüpft; auf einer mikroskopischen Ebene stellen beide nur unterschiedliche Aspekte des gleichen Phänomens dar, nämlich der resonanten Anregung

von elektromagnetischen Schwingungen im Material, welche bei wohl definierten Wellenlängen, resp. Frequenzen auftreten.

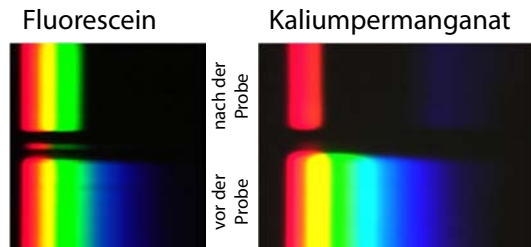


Abbildung 7.25: Effekt von wellenlängenabhängiger Absorption.

Die Absorption ist wiederum stark von der Wellenlänge abhängig. In Abb. 7.25 ist unten das Spektrum einer Bogenlampe dargestellt, im oberen Teil wurde der kurzwellige Teil des Spektrums (blau, violett) durch Fluorescein absorbiert. Da Blau absorbiert wird erscheint eine Fluorescein-Lösung gelb.

Im Beispiel von Kaliumpermanganat wird blau, grün und gelb absorbiert, während Rot und Violett transmittiert werden. Die Stärke und Wellenlänge der Absorption werden durch die mikroskopische Struktur des Materials bestimmt. Meist sind es Moleküle oder Atome, welche bestimmen, welche Wellenlänge absorbiert wird.

Licht kann auch gestreut werden, wenn das Medium inhomogen ist, wie in Abb. 7.26 gezeigt. In diesem Fall ist die Wellenlängenabhängigkeit nicht (nur) durch die molekulare Struktur des Materials bestimmt, sondern (auch) durch die Größe der Partikel, welche die Streuung verursachen. Über einen gewissen Bereich ist die Streuung proportional zu  $\lambda^{-4}$ , d.h. kürzere Wellenlängen werden wesentlich stärker gestreut als lange. Diese Abhängigkeit führt auch dazu, dass der Himmel blau ist: Der kurzwellige Anteil des Sonnenlichtes wird durch Partikel in der Erdatmosphäre stärker gestreut und erscheint als diffuses Hintergrundlicht auf der Erde.

Der längerwellige rote Teil des Spektrums wird weniger stark gestreut. Der Effekt ist am stärksten, wenn die Sonne einen langen Weg durch die Atmosphäre zurückgelegt hat, z.B. am Abend. Deshalb erscheint die Sonne bei Sonnenuntergang rot, wie im

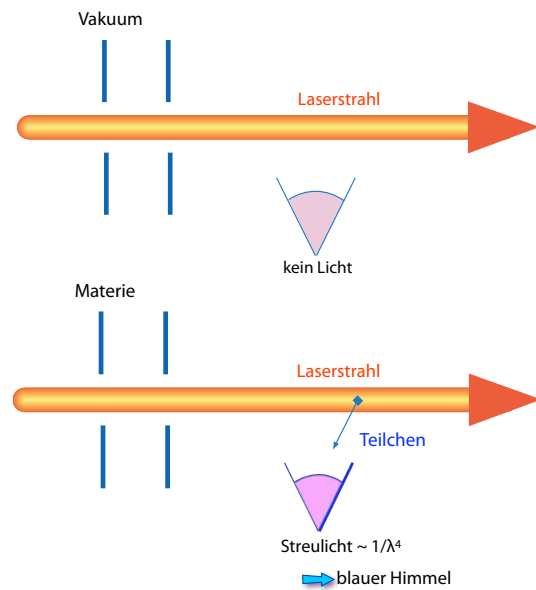


Abbildung 7.26: Lichtausbreitung im Vakuum (oben) und in einem inhomogenen Medium (unten).

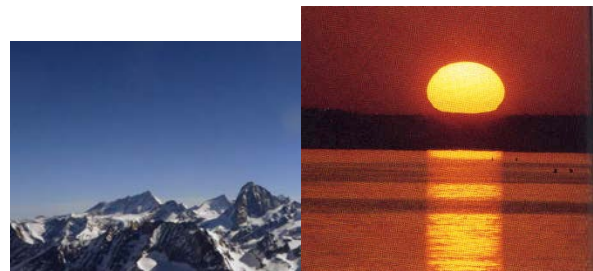


Abbildung 7.27: Blauer Himmel und rote Sonne am Horizont.

Beispiel von Abb. 7.27.

### 7.2.5 Geometrische Optik

Die geometrische Optik (auch: Strahlenoptik) beschreibt die Lichtausbreitung mit Hilfe von Lichtstrahlen, die sich in einem homogenen Medium geradlinig ausbreiten. Dieses Bild entspricht primär dem Korpuskularbild. Man kann die geometrische Optik aber sehr leicht aus der Wellenoptik ableiten: die "Strahlen" beschreiben die Ausbreitung der Wellen und stehen an jeder Stelle senkrecht auf den Wellenfronten.

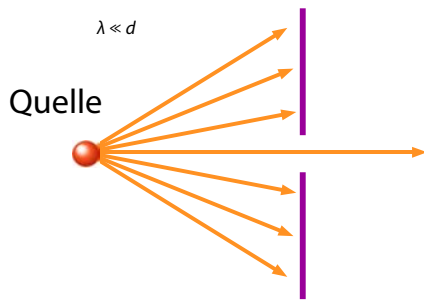


Abbildung 7.28: Paralleles Lichtbündel aus einer punktförmigen Quelle.

Bei einer punktförmigen Lichtquelle werden die Strahlen kreisförmig abgestrahlt. Wie in Abb. 7.28 gezeigt, kann man sie "sichtbar machen" indem mit Hilfe einer Blende ein Teil der Kugelwelle ausgeblendet wird. Das resultierende Licht wird als Strahlenbündel bezeichnet. Ist die Dimension der Öffnung sehr klein im Vergleich zum Abstand von der Lichtquelle, so erhält man ein näherungsweise paralleles Lichtbündel. Eine andere Möglichkeit, ein paralleles Lichtbündel zu erhalten, erhält man indem man einen Laser verwendet, d.h. kohärentes Licht. Die geometrische Optik ist dann anwendbar wenn die Dimensionen der Gegenstände groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes. Da die Wellenlänge von sichtbaren Licht deutlich unter  $1\text{ }\mu\text{m}$  liegt ist das für makroskopische Aspekte fast immer der Fall.

Die geometrische Optik ist eine vereinfachte Theorie für die Berechnung der Ausbreitung von Licht. Sie gilt solange die Dimensionen der Apparate, welche das Licht beschränken, groß sind gegenüber der Wellenlänge. Dann kann das Licht in guter Näherung als eben Welle beschrieben werden, welche sich geradlinig ausbreitet. Zu den hervorstechenden Eigenschaften von Licht gehört, dass die Lichtstrahlen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Außerdem ist der Lichtweg immer umkehrbar. Dass Wellen durch "Strahlen" approximiert werden können, gilt nicht nur in der Optik. Auch Wasserwellen mit kurzen Wellenlängen bewegen sich etwa linear durch eine Öffnung, die groß ist im Vergleich mit der Wellenlänge.

Werden die Dimensionen zu klein, so treten Beu-

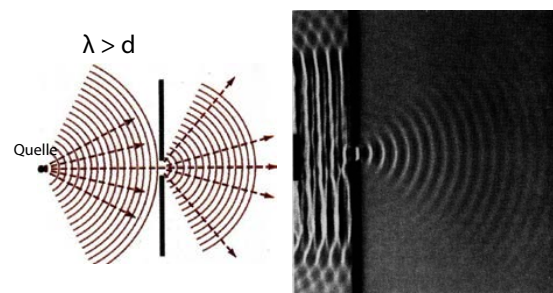


Abbildung 7.29: Beugung am Spalt.

gungseffekte auf, wie in Abb. 7.29. Diese werden in Kapitel 7.8 diskutiert.

## 7.2.6 Das Prinzip von Fermat



Abbildung 7.30: Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Bei der Berechnung des Weges, welchen das Licht beim passieren eines optischen Instrumentes nimmt, leistet das Prinzip von Fermat ( $\rightarrow$  Abb. 7.30) nützliche Dienste. Es ist ein Extremalprinzip, welches praktisch identisch ist mit dem Hamilton'schen Prinzip. Die Grundidee stammt von Hero von Alexandria. Es lautete: Das Licht nimmt den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten. Fermat hat es erweitert auf Systeme mit mehr als einem Brechungsindex. In der Formulierung von Fermat lautet es: "Licht nimmt den Weg, für den es die kürzeste Zeit braucht". Mathematisch ausgedrückt lautet dies

$$\int_{P_0}^{P_1} n ds = \int_{P_0}^{P_1} \frac{c}{v_p} ds = c \int_{P_0}^{P_1} dt = \text{Minimum},$$

wobei  $P_0, P_1$  Anfangs- und Endpunkt des Weges bezeichnen.  $ds$  und  $dt$  bezeichnen infinitesimale Weg, resp. Zeiten auf dem zurückgelegten Weg,  $n$  den Brechungsindex,  $v_p$  die Phasengeschwindigkeit und das Minimum bezieht sich auf all möglichen Wege. Heute schreibt man diese Bedingung meist als Extremalprinzip. In der Form einer Variation lautet es

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} n ds = 0.$$

Das einfachste Beispiel ist natürlich die Ausbreitung im freien Raum in einem homogenen Medium. Hier ist offenbar der direkte Weg der kürzeste, d.h. das Licht läuft geradlinig von  $P_0$  nach  $P_1$ , in Übereinstimmung mit den Prinzipien der geometrischen Optik.

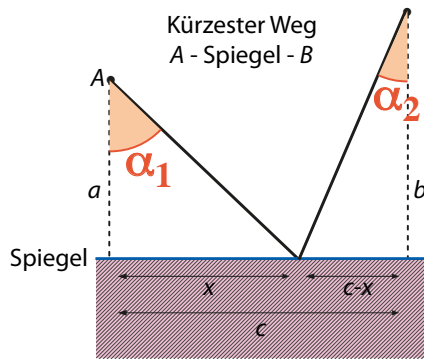


Abbildung 7.31: Herleitung des Reflexionsgesetzes aus dem Prinzip von Fermat.

Abb. 7.31 zeigt ein weiteres Beispiel: Ein Lichtstrahl wird auf einem Spiegel reflektiert. Wir suchen also den kürzesten Weg, auf dem das Licht vom Punkt A über den Spiegel zu Punkt B gelangt. Aus dem obigen Resultat entnehmen wir, dass es geradlinig von A zur Oberfläche und von dort geradlinig zu B läuft. Zu bestimmen sind die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Die Länge des gesamten Weges beträgt

$$\Delta = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Dieser Weg wird minimal wenn er sich bei einer infinitesimalen Änderung von  $x$  nicht ändert, d.h. wenn

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0.$$

Die beiden Brüche beschreiben jeweils den Sinus des Winkels. Damit müssen die beiden Winkel gleich sein,  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Dies ist das Reflexionsgesetz: Der Einfallswinkel und der Ausfallswinkel sind gleich.

Wir können dieses Problem auf das Problem im freien Raum zurückführen, indem wir (geometrisch) den Ausgangspunkt und den Weg bis zum Spiegel in diesem reflektieren. Damit ist wiederum die direkte Verbindung die kürzeste, und man sieht leicht, dass in diesem Fall der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel wird, d.h. wir haben mit Hilfe des Prinzips von Fermat sehr einfach das Reflexionsgesetz hergeleitet.

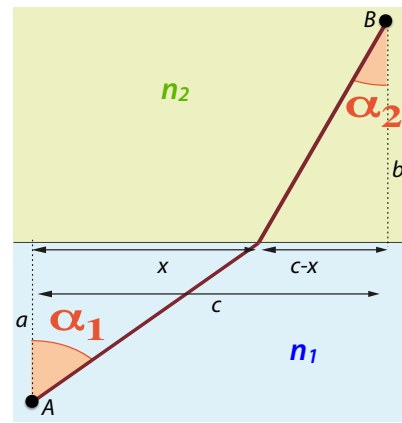


Abbildung 7.32: Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Prinzip von Fermat.

Wirklich wichtig wird das Prinzip erst wenn das Medium nicht mehr homogen ist, z.B. wenn wir zwei Halbräume mit unterschiedlichem Brechungsindex betrachten, wie in Abb. 7.32. Hier erreicht das Licht offenbar das Ziel am schnellsten wenn der Weg im langsameren Medium gering gehalten wird. Der optische Weg beträgt jetzt

$$\Delta = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Der Extremalwert wird erreicht für

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2 (c-x)}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0,$$

d.h. für

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$



Diese Beziehung wird als Snelliussches Brechungsgesetz bezeichnet.

auch wenn sie sich rein geometrisch schon unter dem Horizont befindet.

### 7.2.7 Gekrümmte Lichtstrahlen

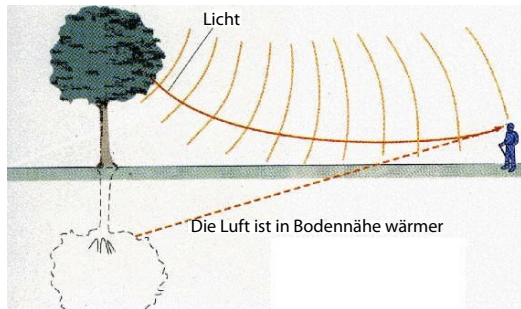


Abbildung 7.33: Weg der Lichtstrahlen bei einer Fata Morgana.

Wenn der Brechungsindex variiert, so kann der optische Weg auch krumm sein. Abb. 7.33 zeigt als Beispiel den Fall, dass die Luft über dem Boden besonders heiß, so ist dort der Brechungsindex kleiner und der optische Weg entlang dem Boden kann kürzer sein als der direkte Weg.



Abbildung 7.34: Spiegelung auf einer heißen Straße.

Dies kann dazu führen, dass Gegenstände scheinbar am Boden gespiegelt werden, wie in Abb. 7.34.

Ein Sonnenstrahl erreicht uns am schnellsten wenn er einen möglichst langen Teil des Weges in den dünnen oberen Luftschichten der Atmosphäre zurücklegt und erst gegen Ende "nach unten abbiegt". Dies führt z.B. auch dazu, dass wir die Sonne noch sehen

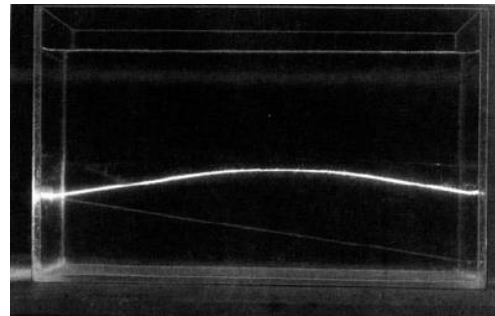


Abbildung 7.35: Gekrümmter Lichtstrahl in einer geschichteten Flüssigkeit.

Dies kann man bei entsprechend großer Variation des Brechungsindexes auch im Labormaßstab reproduzieren. Abb. 7.35 zeigt als Beispiel eine Wanne mit einer Flüssigkeit, in der der Brechungsindex von unten nach oben zunimmt. Der Lichtstrahl wählt den Weg so, dass die Zeit vom Anfangs- zum Endpunkt minimiert wird.

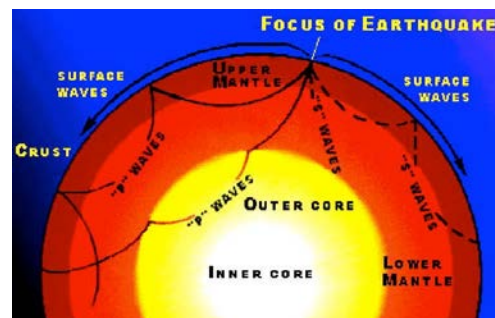


Abbildung 7.36: Ausbreitung von Erdbebenwellen.

Das gleiche Prinzip gilt auch für andere Arten von Wellen, wie z.B. seismische Wellen. Wie in Abb. 7.36 gezeigt, verlaufen diese im Erdinneren nicht geradlinig, sondern werden durch den Dichtegradienten gebogen.

### 7.2.8 Huygens'sches Prinzip

Ein weiteres nützliches Prinzip für die Diskussion der Lichtausbreitung (und Wellenausbreitung allgemein) ist das Prinzip von Huygens (→ Abb. 7.37). Es besagt, dass man die Lichtausbreitung beschreiben





Abbildung 7.37: Christiaan Huygens (1629-1695).

kann, indem man annimmt, dass von jedem Punkt der Welle eine kugelförmige Lichtwelle ausgeht.

Das Huygens'sche Prinzip kann man experimentell sichtbar machen: Trifft eine Welle auf ein punktförmiges Hindernis, so wird dieses zu einer Quelle einer Sekundärwelle, welche sich kreisförmig um dieses Hindernis ausbreitet. Die Ausbreitung des gesamten Feldes ergibt sich durch Summierung über alle elementaren Sekundärwellen. Diese Beobachtung überträgt man von materiellen auf mathematische Punkte und betrachtet jeden Punkt im Raum als die Quelle einer Elementarwelle, wobei Amplitude, Phase und Frequenz durch die einfallende Welle bestimmt werden.

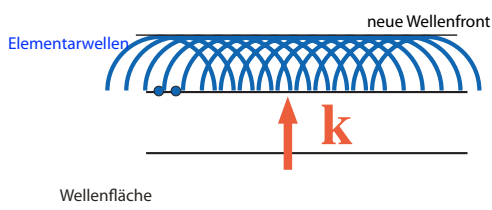


Abbildung 7.38: Bildung von Wellenfronten nach Huygens.

Wie dies funktioniert, kann man schon am Beispiel einer ebenen Welle zeigen. Wie in Abb. 7.38 skizziert, kann jeder Punkt auf einer Wellenfront als Quelle einer sekundären Elementarwelle verstanden

werden.

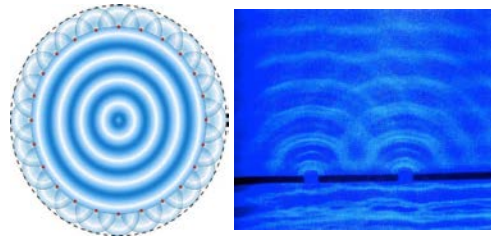


Abbildung 7.39: Ausbreitung von Wellen von einem Punkt.

Dadurch kann man die Ausbreitung unterschiedlicher Wellen erklären, sowohl ebene wie Kugelwellen, elektromagnetische wie Wasserwellen. Abb. 7.39 zeigt das Prinzip (links) und ein entsprechendes Experiment (rechts).

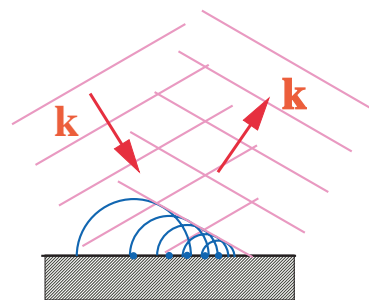


Abbildung 7.40: Reflexionsgesetz nach Huygens.

Auf ähnliche Weise erlaubt einem das Prinzip von Huygens z.B. das Reflexionsgesetz im Wellenbild zu erklären: trifft eine ebene Welle auf eine Oberfläche, so werden dort zuerst Elementarwellen ausgestrahlt, wo die Wellenfront zuerst eintrifft. Wie in Abb. 7.40 gezeigt, ergibt die Überlagerung der einzelnen Elementarwellen wieder eine ebene Welle, die im gleichen Winkel gegenüber der Normalen auf der Oberfläche läuft wie die einfallende Welle.

## 7.3 Reflexion und Brechung

### 7.3.1 Reflexion: Grundlagen

Wie bereits bei den Seilwellen diskutiert, werden Wellen reflektiert, wenn die Bedingungen für die Ausbreitung sich ändern. Das einfachste Beispiel war das Seil, welches am Ende befestigt war. In diesem Fall wurde die gesamte Welle reflektiert, es bildete sich eine stehende Welle aus.

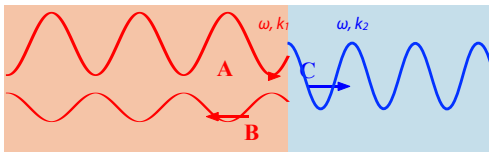


Abbildung 7.41: Reflexion an einer ebenen Grenzfläche.

Allgemein treten Reflexionen auf wenn sich Wellen über Grenzflächen ausbreiten, unabhängig von der Art der Welle. Grenzflächen sind hierbei Punkte, an denen sich der Wellenwiderstand ändert, wie in Abb. 7.41 gezeigt. In der Optik ist der Wellenwiderstand durch den Brechungsindex bestimmt, bei einer Seilwelle z.B. durch die Dicke oder die Spannung des Seils. Hier treten also z.B. Reflexionen auf, wenn die Dicke des Seils sich ändert.

Für den einfachen Fall einer eindimensionalen Welle kann man über die Erhaltung der Energie, welche mit der Welle transportiert wird, allgemein folgende Ausdrücke für die Reflexion und Transmission herleiten:

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

wobei A die Amplitude der einlaufenden Welle, B diejenige der reflektierten, und C die Amplitude der transmittierten Welle bezeichnen. Die Frequenz  $\omega$  ist für alle drei Wellen identisch.

In drei (oder auch in zwei Dimensionen) tritt ebenso Reflexion auf. Wir beschränken uns hier ausschließlich auf ebene Wellen, so dass die Ausbreitung ebenfalls eindimensional erfolgt. Wenn wir eine ebene Welle betrachten, die senkrecht auf eine Grenzfläche

einfällt, so ist das Problem exakt analog zum eindimensionalen Fall. Trifft die Welle unter einem Winkel auf die Grenzfläche auf, so ist nicht mehr von vornherein klar, unter welchem Winkel sie reflektiert wird.

Zunächst unterscheidet man diffuse und spekuläre Reflexion. Diffuse Reflexion ist eigentlich das allgemeinere Phänomen. Es ist z.B. dafür verantwortlich, dass Sie die Schrift an der Tafel lesen können.

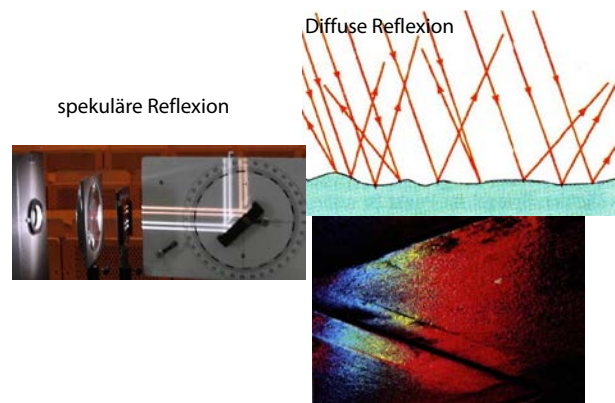


Abbildung 7.42: Spekuläre und diffuse Reflexion an einer Grenzfläche.

Wir können es zum mindesten qualitativ darauf zurückführen, dass Licht auf eine raue Oberfläche auftrifft und in unterschiedliche Richtungen reflektiert wird. Offensichtlich ist dieses Phänomen sehr stark von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängig, wie in Abb. 7.42 gezeigt. Da wir hier an einfach zu behandelnden Modellsystemen interessiert sind behandeln wir ausschließlich den Fall der spekulären Reflexion, also der Reflexion an einer idealen glatten Oberfläche, die entlang der gesamten Fläche identische Eigenschaften aufweist.

Eine einfache Messung bestätigt unser Erfahrungswissen dass ein Lichtstrahl so reflektiert wird dass die rücklaufende Welle einen Winkel zur Flächennormalen aufweist, der gerade gleich dem Winkel der einlaufenden Welle ist, d.h.

- der einfallende und der reflektierende Strahl liegen in einer Ebene mit dem Einfallslot.
- der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel sind gleich,  $\theta_r = \theta_e$ . Diese Beziehung hatten

wir bereits aus dem Prinzip von Fermat hergeleitet.

### 7.3.2 Herleitung des Reflexionsgesetzes

Dieses Gesetz wurde erstmals von Euklid 300 v Chr. formuliert. Es ist im Rahmen der Korpustheorie leicht herleitbar aus den Gesetzen über den elastischen Stoß: die Komponente des Impulses parallel zur Grenzfläche wird durch die Reflexion nicht beeinflusst, die senkrechte Komponente wird elastisch invertiert.

Dieses Argument lässt sich direkt in das Wellenbild überführen. Dafür beschreiben wir das Licht nicht mehr als Strahl, sondern als Welle. Der einfallende Strahl sei durch den Wellenvektor

$$k^{(i)} = \{k_x, 0, k_z\}$$

definiert, wobei  $k_x$  die Komponente des  $k$ -Vektors parallel und  $k_z$  die Komponente senkrecht zur Grenzfläche bezeichnet. Damit sind die Abstände der Knotenflächen auf der Grenzfläche festgelegt. Die Grenzfläche legt immer gewisse Randbedingungen für die Wellen fest; so müssen an einer metallischen Grenzfläche die parallelen Komponenten des elektrischen Feldes verschwinden. Diese Randbedingungen können nur dann eingehalten werden wenn die einfallende und die reflektierte Welle an der Grenzfläche das gleiche zeitliche Verhalten (d.h. die gleiche Frequenz  $\omega$ ) und das gleiche räumliche Verhalten (d.h. gleiche Wellenvektoren parallel zur Grenzfläche) aufweisen.

Da der Brechungsindex und somit die Phasengeschwindigkeit für die einfallende und die reflektierte Welle gleich sind, muss somit auch die  $z$ -Komponente des Wellenvektors den gleichen Betrag haben - sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Somit ist der Wellenvektor der reflektierten Welle gegeben durch

$$k^{(r)} = \{k_x, 0, -k_z\}$$

Die impliziert die obige Beziehung für die Winkel.

Diese Herleitung ist mit der Diskussion der Impulserhaltung eng verbunden, da der Wellenvektor proportional zum Impuls des Lichtes ist: die

$z$ -Komponente wird invertiert, die beiden parallel Komponenten bleiben erhalten.

### 7.3.3 Brechung des Lichts an einer ebenen Grenzfläche

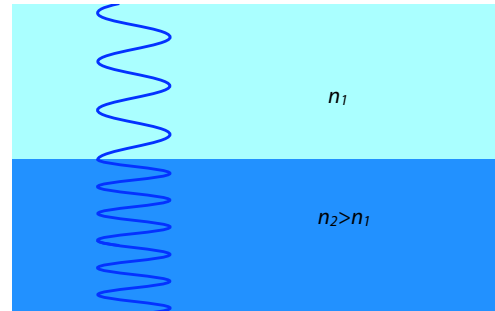


Abbildung 7.43: Änderung der Wellenlänge bei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex.

Wir betrachten zunächst eine Welle, die senkrecht auf die Grenzfläche einfällt, wie im Beispiel von Abb. 7.43. Die Brechungsindizes seien  $n_1$  und  $n_2$ . Da wir bereits gesehen hatten, dass ein Teil der Welle reflektiert wird muss die transmittierte Welle eine geringere Intensität besitzen. Außerdem ist im Allgemeinen ihre Wellenlänge anders: Die Frequenz ist gleich, aber die Phasengeschwindigkeit unterscheidet sich um das Verhältnis der Brechungsindizes,

$$v_1 n_1 = v_2 n_2 = c$$

oder

$$k_{1,2} = \omega \frac{n_{1,2}}{c}.$$

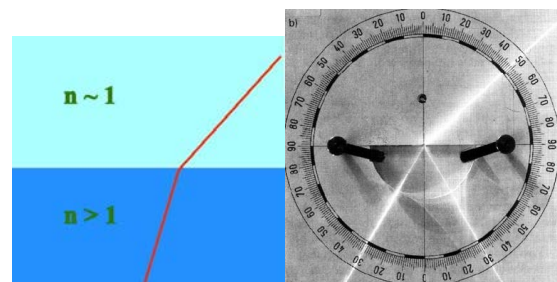


Abbildung 7.44: Brechung an einer Grenzfläche.

Jetzt betrachten wir eine Welle, die in einem Winkel  $\theta$  von der Senkrechten auf eine Grenzfläche einfällt, wie in Abb. 7.44. Wie bei einem Spiegel hat der reflektierte Strahl den gleichen Winkel zur Senkrechten wie der einfallende Strahl. Der gebrochene Strahl hat einen kleineren Winkel,  $\theta_2 < \theta_1$ , falls der Übergang von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium geht (z.B. Luft  $\rightarrow$  Wasser).

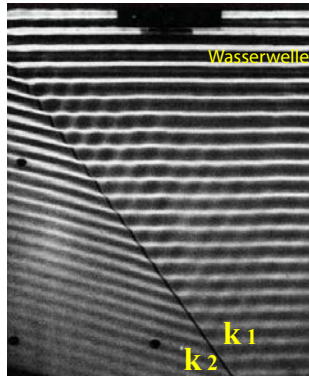


Abbildung 7.45: Brechung einer Wasserwelle an einer ebenen Grenzfläche.

Diesen Winkel kann man aus der Bedingung herleiten, dass die Welle an der Grenzfläche stetig ins andere Medium übergehen muss. Abb. 7.45 illustriert dies für eine Oberflächenwelle. In den beiden Medien beträgt die Wellenlänge, d. h. der Abstand zwischen den Phasenflächen,

$$\frac{2\pi}{k_1}, \quad \text{resp.} \quad \frac{2\pi}{k_2},$$

Wie bereits bei der Reflexion diskutiert müssen die Wellenvektoren parallel zur Grenzfläche gleich sein, d.h. Knoten und Maxima der beiden Wellen müssen an der Grenzfläche am gleichen Ort auftreten. Somit ist die Projektion des Abstandes zwischen den Phasenflächen, d.h.  $2\pi/k_i$  auf die Grenzfläche identisch,

$$\frac{2\pi}{k_1 \sin \theta_1} = \frac{2\pi}{k_2 \sin \theta_2}.$$

Mit  $k_i = \omega n_i/c$  erhalten wir

$$\frac{n_1}{\sin \theta_1} = \frac{n_2}{\sin \theta_2}$$

oder

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Dies wird auch als das Brechungsgesetz von Snellius bezeichnet. Wir hatten diesen Ausdruck auch schon aus dem Prinzip von Fermat hergeleitet.

### 7.3.4 Reflexionsgesetz aus dem Huygens'schen Prinzip

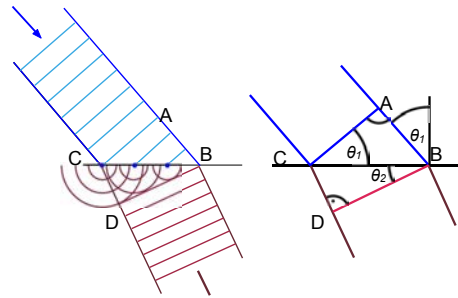


Abbildung 7.46: Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Prinzip von Huygens.

Eine weitere Erklärung des Brechungsgesetzes kann man aus dem Prinzip von Huygens herleiten. Wie in Abb. 7.46 gezeigt, nimmt man an dass an der Grenzfläche Elementarwellen ausgestrahlt werden, wobei der Zeitpunkt für die Ausstrahlung vom Eintreffen der einfallenden Wellenfronten bestimmt wird. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in den beiden Medien sei  $v_1 = c/n_1$ , resp.  $v_2 = c/n_2$ . Für die beiden Dreiecke  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BCD$  gilt

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{AB}{CB} = t \frac{v_1}{CB} = \frac{t}{n_1} \frac{c}{CB} \\ \sin \theta_2 &= \frac{CD}{CB} = t \frac{v_2}{CB} = \frac{t}{n_2} \frac{c}{CB}. \end{aligned}$$

Daraus folgt das Brechungsgesetz von Snellius:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$\sin \theta_1 n_1 = \sin \theta_2 n_2.$$

Ist der eine Brechungsindex  $\sim 1$  (z.B. Luft), so kann der Ausdruck vereinfacht werden

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = n_1.$$

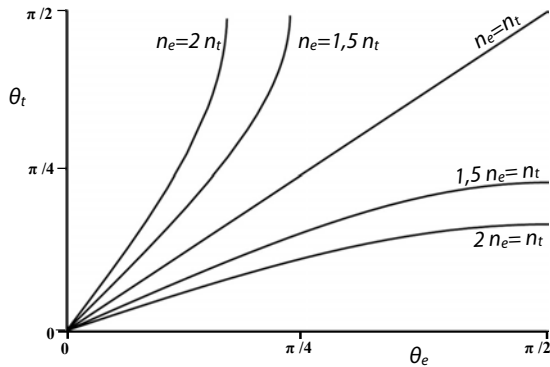


Abbildung 7.47: Einfallswinkel vs. Transmissionswinkel für unterschiedliche Verhältnisse der Brechungsindizes.

Abb. 7.47 stellt das Verhältnis von Einfalls- zu Transmissionswinkel dar. Bei kleinen Einfallswinkeln sind Einfalls- und Ausfallswinkel direkt proportional. Qualitativ kann man das Resultat so zusammenfassen, dass beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium der Strahl in Richtung auf die Senkrechte gebrochen wird, beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium weg von der Senkrechten. Offenbar erreicht der Transmissionswinkel im optisch dichteren Medium einen Maximalwert, d.h. es gibt einen Winkelbereich, der von außen nicht zugänglich ist.

### 7.3.5 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Das einfallende Licht wird an der Grenzfläche in zwei Teilwellen aufgeteilt, die reflektierte und die transmittierte Welle. Um das Teilungsverhältnis zu bestimmen, benötigt man offenbar zwei Gleichungen um die beiden unbekannten Amplituden zu berechnen. Die beiden Gleichungen erhält man aus der Energieerhaltung sowie aus den Maxwell Gleichungen.

Die Energieerhaltung sagt, dass die Leistung des einfallenden Strahls gleich der Summe der Leistungen des reflektierten und des transmittierten Strahles sein muss. Die Leistung in einem Lichtstrahl kann berechnet werden aus Energiedichte  $\rho$ , Lichtgeschwin-

digkeit  $c$  und Querschnitt  $A$ :

$$P = c\rho A.$$

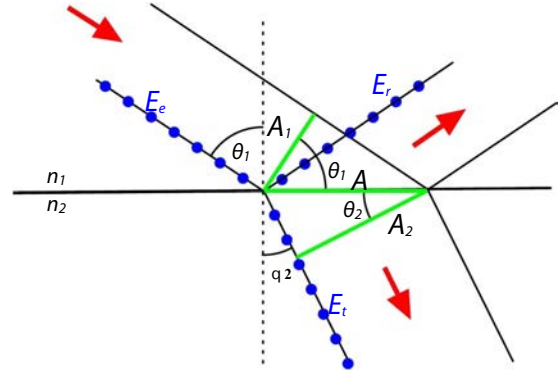


Abbildung 7.48: Energiebilanz aus Feldstärken und Querschnittsflächen für Licht mit senkrechter Polarisation.

Somit gilt

$$c_1\rho^e A_1 = c_1\rho^r A_1 + c_2\rho^t A_2.$$

Hier bezeichnet der Index 1 das Medium, aus dem der Lichtstrahl einfällt, 2 das untere Medium; die oberen Indices bezeichnen den einfallenden, reflektierten und transmittierten Strahl. Wie in Abb. 7.48 gezeigt, können die Querschnitte  $A_1$  und  $A_2$  auf die entsprechende Fläche auf der Grenzfläche bezogen werden:

$$A_1 = A \cos \theta_1 \quad A_2 = A \cos \theta_2.$$

Die Energiedichte beträgt jeweils

$$\rho^i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i^2$$

und die Lichtgeschwindigkeit im Medium  $c_i = c/n_i$ .

Somit wird die Energiebilanz

$$\begin{aligned} \frac{c}{n_1} \epsilon_0 \epsilon_1 E_e^2 A \cos \theta_1 &= \frac{c}{n_1} \epsilon_0 \epsilon_1 E_r^2 A \cos \theta_1 \\ &+ \frac{c}{n_2} \epsilon_0 \epsilon_2 E_t^2 A \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Mit  $\epsilon_i = n_i^2$  erhält man

$$n_1 (E_e^2 - E_r^2) \cos \theta_1 = n_2 E_t^2 \cos \theta_2.$$



Dies ist die erste der beiden notwendigen Gleichungen. Die zweite erhält man aus der Maxwell-Gleichung: die elektrische Feldkomponente parallel zur Grenzfläche muss stetig sein. Für eine Welle, die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, sind alle Feldkomponenten parallel zur Oberfläche. Damit ist

$$E_1 = E_2 = E_{e,s} + E_{r,s} = E_{t,s}.$$

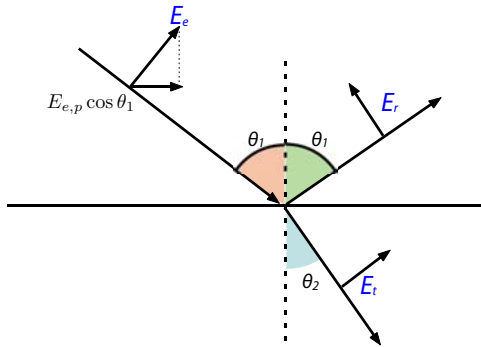


Abbildung 7.49: Felder der Teilstrahlen für parallele Polarisation.

Gemäß Abb. 7.49 muss für den Fall, dass die Polarisation in der Einfallsebene liegt gelten

$$(E_{e,p} - E_{r,p}) \cos \theta_1 = E_{t,p} \cos \theta_2.$$

### 7.3.6 Fresnel-Formeln

Aus den beiden Bedingungen erhält man

$$\begin{aligned} r_s &= \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_\perp = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\ &= -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \\ t_s &= \left( \frac{E_t}{E_e} \right)_\perp = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\ &= 1 - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}. \\ r_p &= \left( \frac{E_r}{E_e} \right)_\parallel = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\ &= \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}. \\ t_p &= \left( \frac{E_t}{E_e} \right)_\parallel = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + n_2 \cos \theta_1}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden als Fresnel-Gleichungen bezeichnet.

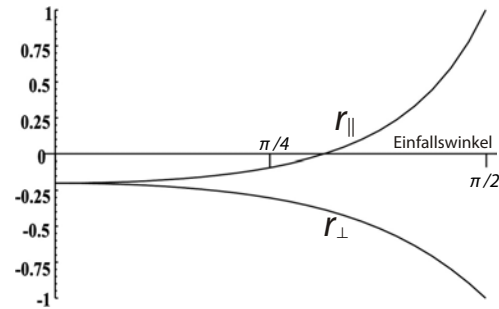


Abbildung 7.50: Reflexionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels.

Trägt man die beiden Reflexionskoeffizienten für  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$  gegen den Einfallswinkel auf, wie in Abb. 7.50, so findet man, dass die beiden Reflexionskoeffizienten bei kleinem Winkel, also senkrechtem Einfall, den gleichen Betrag aufweisen. Dies ist nicht verwunderlich: Bei senkrechtem Einfall sind die beiden Polarisationen nicht unterscheidbar. Sie betragen dann

$$-r_s(\theta_1 = \theta_2 = 0) = r_p(\theta_1 = \theta_2 = 0) = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Das negative Vorzeichen zeigt dass die reflektierte Welle einen Phasensprung von  $\pi$  gegenüber der einfallenden Welle hat, falls sie an einem optisch dichteren Medium ( $n_2 > n_1$ ) reflektiert wird, jedoch nicht im umgekehrten Fall.

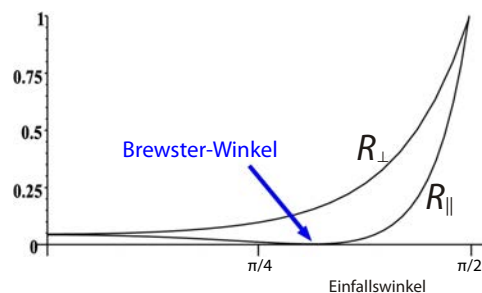


Abbildung 7.51: Reflexionsvermögen als Funktion des Einfallswinkels.

Häufig verwendet man auch das Reflexionsvermögen, welches definiert ist als das Verhältnis der reflektierten Intensität zur einfallenden Intensität. Abb.

**7.51** zeigt diese Größen als Funktion des Einfallswinkels. Für senkrechten Einfall

$$R = \frac{I_r}{I_e} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2.$$

Typische Zahlen für die Grenzfläche Luft / Glas ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.5$ ) sind

$$r(\alpha = 0) \approx \frac{0,5}{2,5} = 0,2. \quad R = r^2 \approx 0,04.$$

Sowohl beim Eintritt wie beim Austritt aus Glas wird also rund 4% der Lichtintensität reflektiert.

Die Reflexion von parallel polarisiertem Licht weist einen Nulldurchgang auf. Der zugehörige Winkel wird als Brewster-Winkel bezeichnet. Aus den Fresnel-Gleichungen sieht man, dass die Bedingung als

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \infty \quad \text{d.h.} \quad (\theta_1 + \theta_2) = \frac{\pi}{2}$$

beschrieben werden kann. Somit stehen der transmittierte und reflektierte Strahl stehen senkrecht aufeinander. Nach dem Brewster-Winkel nehmen beide Reflexionskoeffizienten zu und erreichen eins bei  $\theta_1 = \pi/2$ , d.h. bei streifendem Einfall.

### 7.3.7 Totalreflexion

Ein interessanter Fall tritt ein wenn ein Strahl aus dem optisch dichteren Medium ins optisch dünnere Medium austritt, d.h. wenn das Verhältnis  $n_2/n_1 < 1$  ist. Offenbar wird der Strahl dann von der Senkrechten weg gebrochen. Da  $\sin \theta_1 \leq 1$  ist kann die Gleichung nicht für alle Werte von  $\theta_1$  Lösungen aufweisen. Am kritischen Winkel

$$\theta_c = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

wird der gebrochene Strahl unter einem Winkel von  $\pi/2$  abgestrahlt, d.h. parallel zur Grenzfläche. Wird der Einfallswinkel weiter erhöht, so kann das Licht nicht mehr aus dem Material austreten. Man bezeichnet diesen Bereich als Totalreflexion. Abb. **7.52** zeigt ein entsprechendes Experiment: Der Lichtstrahl kann das Wasser als optisch dichteres Medium

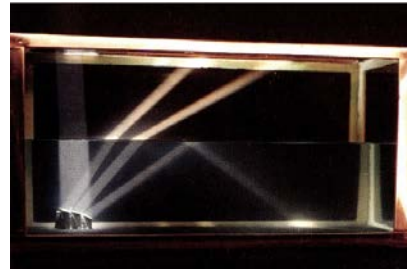


Abbildung 7.52: Totalreflexion von Lichtstrahlen an einer Wasser-Luft Grenzfläche.

nicht verlassen, wenn der Einfallswinkel unterhalb des Grenzwinkels liegt.

Das Feld im optisch dünneren Medium kann aber nicht einfach verschwinden, da sonst die Kontinuitätsbedingungen verletzt wären. Der Feldverlauf im Medium 2 ist in diesem Fall exponentiell. Diese Welle, die parallel zur Grenzfläche läuft und deren Amplitude im Medium exponentiell mit dem Abstand von der Grenzfläche abfällt, wird als evaneszente oder quergedämpfte Welle bezeichnet.

Die Eindringtiefe divergiert am kritischen Winkel. Für größere Winkel nimmt sie rasch ab bis auf die Größe der optischen Wellenlänge, also typischerweise weniger als ein  $\mu\text{m}$ . Dieser Teil des optischen Feldes wird auch gerne für Experimente verwendet. Das interessante daran ist, dass es eine Möglichkeit darstellt, Licht in der Nähe einer Grenz- oder Oberfläche zu lokalisieren.

Die Totalreflexion wird z.B. in Glasfasern für die Übertragung von Licht verwendet. Geführt werden kann das Licht wenn der Einfallswinkel kleiner als der kritische Winkel ist, der durch die Differenz der Brechungsindizes bestimmt ist. Typische Parameter sind z.B.  $n_1 = 1.474$ ,  $n_2 = 1.453 \rightarrow \theta_c = 80,3^\circ$ , resp. rund 10 Grad von der Grenzfläche aus gemessen.

Abb. **7.53** zeigt, wie Licht in einer Glasfaser mit variablem Brechungsindex geführt wird. Im Rahmen der Strahlenoptik erscheinen die entsprechenden Pfade gekrümmt.

Glasfasern werden für die Datenübertragung verwendet, aber auch für die Übermittlung von Bildern. Im Beispiel von Abb. **7.54** überträgt jede Faser einen einzelnen Bildpunkt. Diese Technik wird zum Bei-

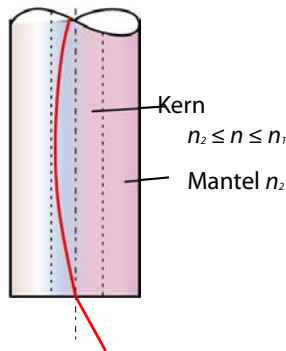


Abbildung 7.53: Totalreflexion in einer Glasfaser.

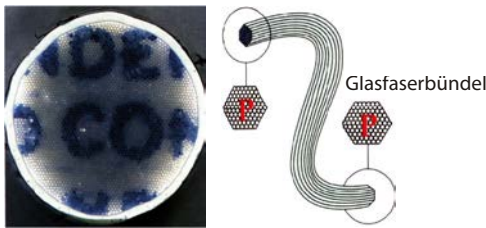


Abbildung 7.54: Bildübertragung in einem Glasfaserbündel.

spiel in der Endoskopie (medizinische Bildgebung) genutzt.

### 7.3.8 Brechung am Prisma

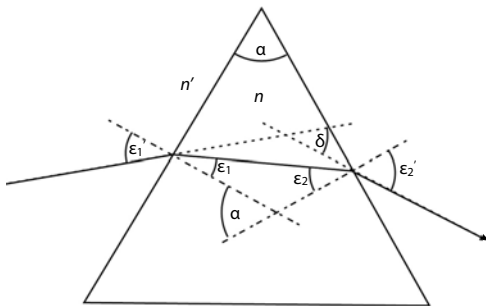


Abbildung 7.55: Brechung am Prisma.

Wir betrachten einen Lichtstrahl, der durch ein Prisma mit Brechungsindex  $n$  und Winkel  $\alpha$  läuft, wie in Abb. 7.55 gezeigt. Er wird beim Eintritt und beim Austritt gebrochen. Der Ablenkungswinkel  $\delta$  beträgt

$$\delta = \epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \alpha.$$

Nach Snellius ist

$$\begin{aligned} \sin \epsilon'_1 &= n \sin \epsilon_1 \\ \sin \epsilon'_2 &= n \sin \epsilon_2. \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \alpha$ . Mit

$$\epsilon'_2 = \sin^{-1}(n \sin \epsilon_2) = \sin^{-1}(n \sin(\alpha - \epsilon_1)).$$

Wir eliminieren alle Variablen außer  $\epsilon_1$ , indem wir verwenden

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta :$$

$$\begin{aligned} \epsilon'_2 &= \sin^{-1}(n(\sin \alpha \cos \epsilon_1 - \cos \alpha \sin \epsilon_1)) \\ &= \sin^{-1}(n \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon_1} - \cos \alpha \sin \epsilon_1) \\ &= \sin^{-1}(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1} - \cos \alpha \sin \epsilon_1). \end{aligned}$$

Damit wird der Ablenkungswinkel

$$\delta = \epsilon'_1 - \alpha + \sin^{-1}(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \epsilon_1} - \cos \alpha \sin \epsilon_1).$$

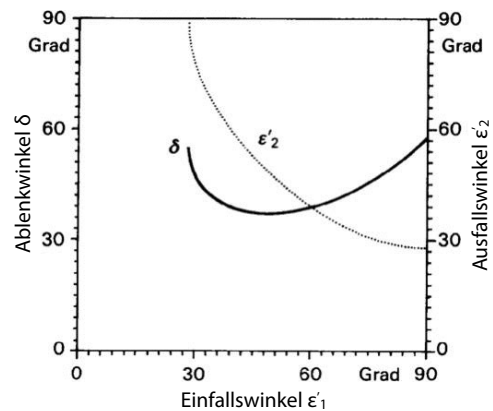


Abbildung 7.56: Ablenkung am Prisma.

Wie in Abb. 7.56 gezeigt, wird die Strahlablenkung minimal, wenn der Eintrittswinkel gleich dem Austrittswinkel ist, d.h. für einen symmetrischen Strahlengang:

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \epsilon'_2 = \frac{1}{2}(\delta + \alpha), \\ \epsilon_1 &= \epsilon_2 = \frac{\alpha}{2} \\ \delta_{min} &= 2 \sin^{-1}(n \sin \frac{\alpha}{2}) - \alpha. \end{aligned}$$

Prismen werden außerdem gerne verwendet für die Umlenkung von Strahlen oder als Umkehrprismen (durch 2-malige Reflexion), z.B. zur Umkehrung von Bildern in Feldstechern.

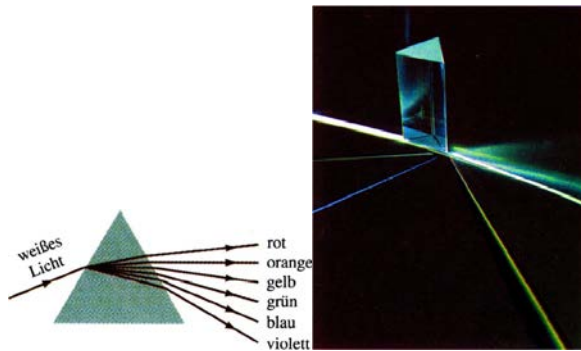


Abbildung 7.57: Zerlegung von weißem Licht am Prisma.

Ist der einfallende Lichtstrahl nicht eine einheitliche Farbe, so ist der Brechungsindex für die einzelnen Komponenten unterschiedlich und sie werden unterschiedlich stark gebrochen. Wie in Abb. 7.57 gezeigt, wird violettes Licht am stärksten gebrochen, Komponenten mit längerer Wellenlänge schwächer (siehe auch Abb. 7.22).

## 7.4 Abbildende Optik

### 7.4.1 Bildentstehung

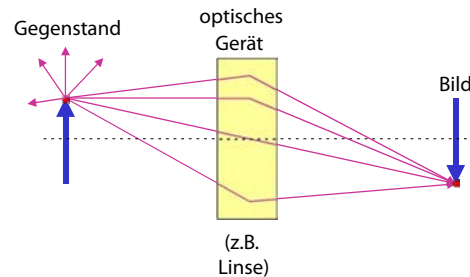


Abbildung 7.58: Entstehung eines Bildes.

Zu den wichtigsten Anwendungen der Optik gehört die Möglichkeit, mit Hilfe optischer Instrumente Gegenstände abzubilden. Wie in Abb. 7.58 gezeigt, werden dafür Lichtstrahlen, die von einem Objekt ausgehen, durch ein optisches Gerät (Linse, Spiegel, Fernrohr, Auge ...) so geführt, dass sie ein Bild erzeugen. Das Bild ist dadurch charakterisiert, dass alle Strahlen, die durch einen bestimmten Bildpunkt laufen, vom gleichen Punkt des Objektes stammen. Somit kann man jeden Punkt des Bildes mit genau einem Punkt des Objektes identifizieren.

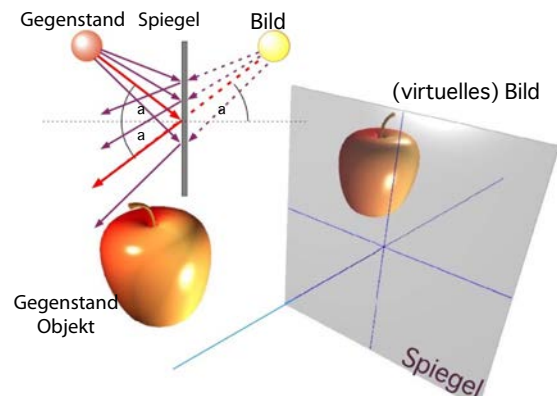


Abbildung 7.59: Spiegelbild.

Ein einfaches Beispiel für ein optisches Instrument ist ein ebener Spiegel, wie in Abb. 7.59. Wie im Rahmen des Kapitels "Reflexion" besprochen werden die Strahlen so gebrochen, dass der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist. Dadurch scheinen für den Betrachter alle Strahlen aus dem Spiegel zu

kommen; er sieht das Objekt hinter dem Spiegel. Allerdings wird in diesem Fall durch den Spiegel selber kein Bild erzeugt. Man bezeichnet das Spiegelbild als virtuelles Bild, da die Lichtstrahlen nie den Punkt erreichen an dem der Apfel dem Betrachter erscheint. Dieses virtuelle Bild hat trotzdem alle Eigenschaften eines reellen Bildes.

## 7.4.2 Parabolspiegel

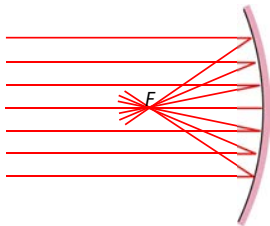


Abbildung 7.60: Parabolspiegel.

Im Gegensatz dazu erzeugt ein Parabolspiegel ein reelles Bild. In einem Parabolspiegel ( $\rightarrow$  Abb. 7.60) und näherungsweise auch in einem sphärischen Spiegel kreuzen sich parallel einfallende Strahlen in einem Punkt im Abstand  $f$  vom Spiegel.

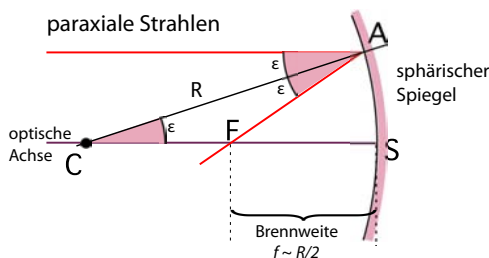


Abbildung 7.61: Fokus eines sphärischen Spiegels.

Die Distanz zwischen dem Spiegel und dem Fokus  $F$ , in dem sich die Strahlen kreuzen, lässt sich für Strahlen in der Nähe der optischen Achse (sog. paraxiale Strahlen) leicht berechnen. Wie in Abb. 7.61 gezeigt, werden die Strahlen an jedem Punkt nach dem Reflexionsgesetz reflektiert. Das Dreieck  $CAF$  ist somit gleichschenkelig und für kleine Winkel  $\epsilon$  ist offenbar die Brennweite  $SF$  gleich der Hälfte des Spiegelradius  $R$ .

In einem entsprechenden Wellenbild erhält man nach

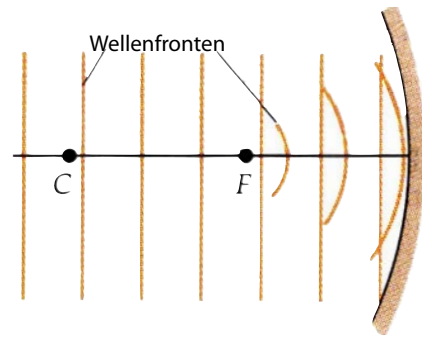


Abbildung 7.62: Fokussierung in einem Wellenbild.

Reflexion einer zusammenlaufenden Kugelwelle, wie in Abb. 7.62 gezeigt.

## 7.4.3 Bildweite und Maßstab

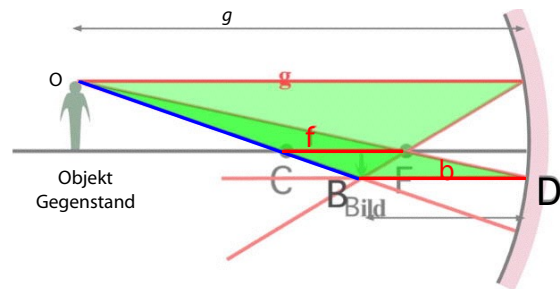


Abbildung 7.63: Maßstabverhältnisse bei der Bildentstehung.

Wenn die Strahlen nicht parallel einfallen, sondern von einem Objekt ausgehen, das um die Gegenstandsweite  $g$  vom Spiegel entfernt ist, entsteht ein Bild im Bildabstand  $b$  vom Spiegel, wie in Abb. 7.63 gezeigt. Diesen Bildabstand kann man mit Hilfe des Strahlensatzes aus der Brennweite  $f$  berechnen:

$$\frac{f}{g} = \frac{FD}{OD} \quad \text{und} \quad \frac{f}{b} = \frac{OF}{OD}.$$

Somit ist

$$\frac{f}{g} + \frac{f}{b} = \frac{FD}{OD} + \frac{OF}{OD} = \frac{OD}{OD} = 1$$

oder

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (7.1)$$



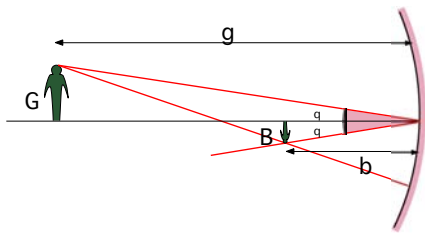


Abbildung 7.64: Berechnung des Abbildungsmaßstabs.

Der Abbildungsmaßstab  $\beta$  ist das Verhältnis der Größe  $B$  des Bildes relativ zur Größe  $G$  des Gegenstandes. Diese lässt sich z.B. berechnen, wenn wir, wie in Abb. 7.64 gezeigt, zwei Strahlen betrachten, welche vom gleichen Punkt des Objekts ausgehen und sich am entsprechenden Punkt des Bildes wieder treffen. Diese zeigen, dass

$$\frac{B}{b} = \frac{G}{g}$$

und somit auch

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}.$$

Mit Hilfe der Abbildungsgleichung (7.1) können wir  $b$  eliminieren:

$$b = \frac{fg}{g-f} \rightarrow \beta = \frac{f}{g-f}.$$

Offenbar erzeugt ein gekrümmter konkaver Spiegel ein Bild, welches für den Betrachter an unterschiedlicher Stelle erscheinen kann: Befindet sich das Original in einem Abstand, der größer ist als die doppelte Brennweite, so erscheint ein reelles, verkleinertes, umgekehrtes Bild zwischen  $f$  und  $2f$ .

Befindet sich das Original im Bereich zwischen  $f$  und  $2f$ , so erscheint das reelle Bild größer und im Abstand  $> 2f$ . Beträgt der Abstand weniger als  $f$ , so erscheint ein virtuelles Bild, d.h. hinter dem Spiegel, wie in Abb. 7.65 gezeigt. Das virtuelle Bild ist größer als das Objekt.

Parabolspiegel werden z.B. für Teleskope eingesetzt, sowohl für optische wie auch für Radioteleskope wie im Beispiel von Abb. 7.66, oder als Satellitenantennen.

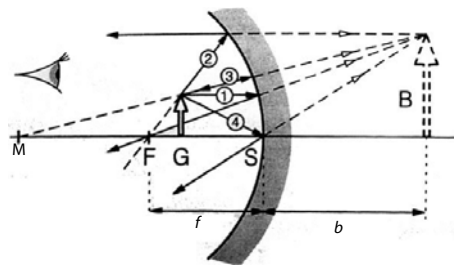


Abbildung 7.65: Virtuelles Bild hinter konkavem Spiegel.

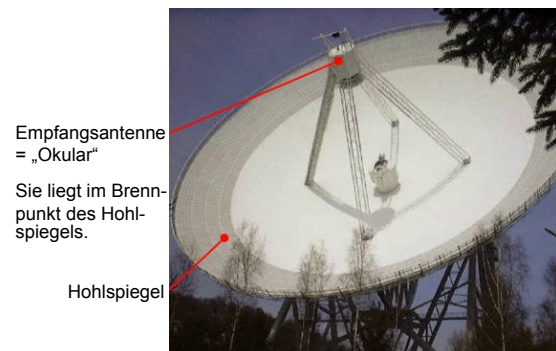


Abbildung 7.66: Das Radioteleskop Effelsberg.

Ein konvexer Spiegel wie in Abb. 7.67 erzeugt kein reelles Bild, sondern immer ein virtuelles, welches kleiner ist als das Original. Diese Art von Spiegel wird z.B. in Rückspiegeln verwendet, wo ein großes Blickfeld gewünscht wird.

#### 7.4.4 Brechung an einer sphärischen Oberfläche

Trifft ein Lichtstrahl auf eine gekrümmte Grenzfläche, so hängt seine Richtung nach der Grenzfläche davon ab, an welchem Punkt er auf die Grenzfläche auftrifft. Dies wird z.B. in Sammellinsen benutzt.

Wir betrachten zunächst den Fall einer einzelnen sphärischen Oberfläche, d.h. eines Glaskörpers, der nach rechts unendlich weit ausgedehnt ist, wie in Abb. 7.68 gezeigt. Wir berechnen den Weg, den ein Lichtstrahl nimmt, wenn er an der Oberfläche gebrochen wird, indem wir das Prinzip von Fermat verwenden. Das Brechungsgesetz liefert das gleiche Resultat, aber mit größerem Aufwand.

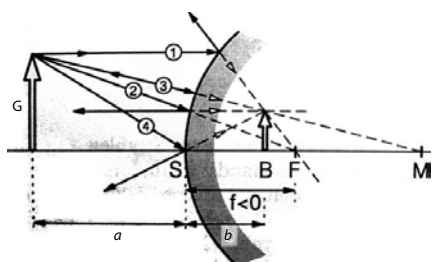


Abbildung 7.67: Konvexer Spiegel.

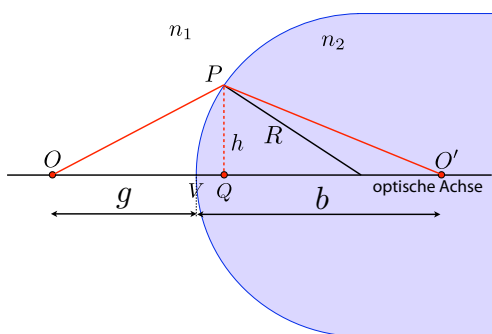


Abbildung 7.68: Brechung an einer sphärischen Grenzfläche.

Für Strahlen mit einem geringen Abstände von der optischen Achse, sogenannte paraxiale Strahlen, kann man die Oberfläche durch eine Parabel annähern. Die Zeit, welche das Licht für den Weg  $OPO'$  durch einen Punkt  $P$  im Abstand  $h$  von der optischen Achse benötigt, ist

$$n_1 OP + n_2 PO'.$$

Im Rahmen der paraxialen Näherung  $h \ll g$  ist die Strecke  $OP$

$$OP = OV + VQ + \frac{h^2}{2g}$$

und analog für  $PO'$ . Damit wird die Zeit für den Weg  $OPO'$ :

$$\begin{aligned} n_1 OP + n_2 PO' &= n_1 \left( OV + VQ + \frac{h^2}{2g} \right) \\ &\quad + n_2 \left( QO' + \frac{h^2}{2b} \right). \end{aligned}$$

Gemäß dem Prinzip von Fermat sollte dies gleich der

Zeit für den direkten Weg sein, also

$$\begin{aligned} n_1 \left( OV + VQ + \frac{h^2}{2g} \right) + n_2 \left( QO' + \frac{h^2}{2b} \right) \\ = n_1 OV + n_2 (VQ + QO'). \end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$VQ(n_1 - n_2) + \frac{h^2}{2g}n_1 + \frac{h^2}{2b}n_2 = 0.$$

In der gewählten Näherung ist  $VQ = h^2/2R$  mit  $R$  dem Radius der Grenzfläche und

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (7.2)$$

also unabhängig von  $h$ . Somit benötigt das Licht auf allen Pfaden die gleiche Zeit und erfüllt damit das Prinzip von Fermat. Diese Gleichung wird als Abbildungsgleichung bezeichnet: Bei gegebenem Radius  $R$ , Brechungsindex  $n_{1,2}$  und Objektdistanz  $g$  bestimmt sie die Bilddistanz  $b$ .

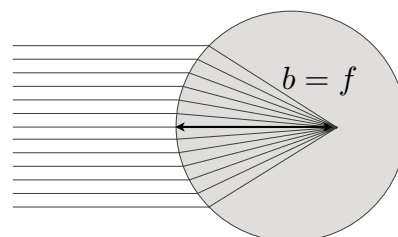


Abbildung 7.69: Fokus in einer Kugel.

Einen Spezialfall erhält man, wenn man die Objektdistanz  $g$  gegen Unendlich gehen lässt, wenn also parallele Strahlen auf die Grenzfläche einfallen. Die Bilddistanz  $b$  wird dann als Brennweite  $f$  bezeichnet ( $\rightarrow$  Abb. 7.69). Offenbar ist

$$\frac{n_2}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

oder

$$f = R \frac{n_2}{n_2 - n_1}$$

Die Sammelwirkung einer gekrümmten Oberfläche ist somit bestimmt durch den Krümmungsradius  $R$  und die Differenz zwischen den Brechungsindizes.

Die Tatsache, dass die Brechkraft von der Differenz der Brechungsindizes abhängt kann man sehr einfach nachprüfen wenn man beim Schwimmen unter Wasser die Augen öffnet: Man sieht nicht scharf, da hier die Brechkraft der Linse im Auge kleiner ist.

### 7.4.5 Entstehung des Regenbogens

Die Entstehung des Regenbogens kann auf Brechung in Wassertropfen und Dispersion zurückgeführt werden.

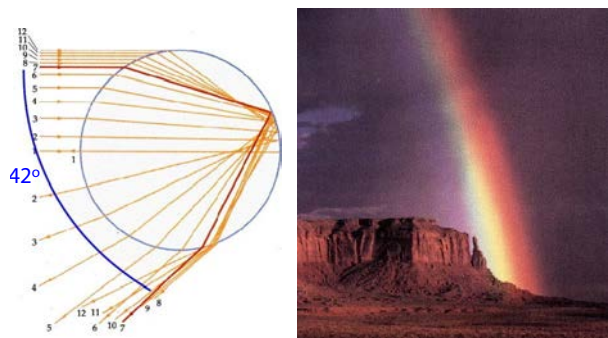


Abbildung 7.70: Strahlenverlauf in einem Wassertropfen und Regenbogen.

Der Strahlenverlauf in einem Regentropfen wurde von Descartes untersucht. Wie in Abb. 7.70 gezeigt, betrachtet man zunächst alle Strahlen, welche beim Eintritt in den Wassertropfen gebrochen, an der Rückseite reflektiert und beim Austritt wiederum gebrochen werden. Während ein Strahl, der zentral einfällt, in sich selbst reflektiert wird, weisen alle Strahlen, die abseits vom Zentrum einfallen, nach dem Durchgang durch den Wassertropfen einen Winkel zwischen einfallendem und austretendem Strahl auf. Dieser Winkel nimmt mit dem Abstand vom Zentrum zunächst zu, erreicht bei 42 Grad ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Dadurch erhält man bei 42 Grad eine Häufung.

Für einen Beobachter mit der Sonne im Rücken ergibt sich ein heller Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel 42 Grad, wobei die Symmetrieachse durch die Sonne läuft (siehe Abb. 7.71). Mindestens die Hälfte des theoretischen Kreises befindet sich unter dem Horizont; einen Halbkreis erhält man wenn die Sonne gerade auf dem Horizont steht.

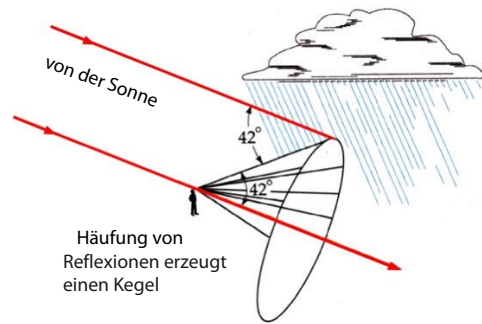


Abbildung 7.71: Strahlenverlauf für einen Beobachter.

Im Experiment verwenden wir eine einzelne, mit Wasser gefüllte Glaskugel. Der weiße Lichtstrahl der Bogenlampe wird hier ebenfalls in einem Winkel von 42 Grad reflektiert und spektral aufgefächert.

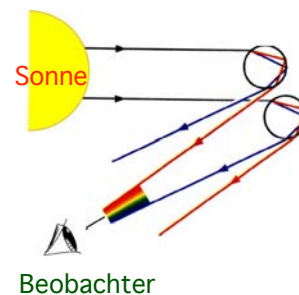


Abbildung 7.72: Dispersion der Regenbogenfarben.

Aufgrund der Dispersion ist der Ablenkungswinkel nicht für alle Farben der gleiche. Kurze Wellenlängen, also blau und violett, werden stärker gebrochen. Wie in Abb. 7.72 gezeigt erscheinen die entsprechenden Maxima deshalb bei einem kleineren Öffnungswinkel, also innerhalb des roten Kreisbogens.

### 7.4.6 Linsen

Anstelle einer einzelnen sphärisch gekrümmten Oberfläche betrachten wir nun einen Glaskörper mit zwei sphärisch gekrümmten Oberflächen. Dies entspricht einer Linse, wobei der Krümmungsradius von beiden Oberflächen positiv, negativ oder unendlich sein kann.

Den Strahlengang für eine bikonvexe Linse (→ Abb. 7.73) finden wir, indem wir das Resultat für eine

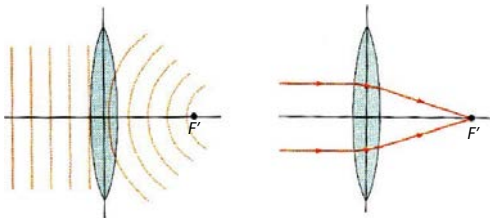


Abbildung 7.73: Sammellinse.

sphärische Oberfläche zweimal anwenden. Wir vereinfachen dabei Gleichung (7.2) für den Fall  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n$ . Zunächst für die erste Grenzfläche gilt

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{z} = \frac{n-1}{R_1}.$$

Hier stellt  $z$  die Bildweite für das Zwischenbild dar, welches rechts von der ersten Grenzfläche entstehen würde. Für dieses einfache Modell nehmen wir jedoch an, dass die Dicke der Linse sehr klein ist, so dass wir sie vernachlässigen können und sich die zweite Grenzfläche am gleichen Ort befindet wie die erste Grenzfläche. Dann entspricht die Bildweite für das Zwischenbild gleichzeitig der negativen Gegenstandsweite für die zweite Grenzfläche. Damit lautet die Gleichung für die zweite Brechung

$$-\frac{n}{z} + \frac{1}{b} = -\frac{n-1}{R_2}.$$

Dabei muss das Vorzeichen von  $z$  und  $R$  beachtet werden: es hängt von der Richtung ab. Bei der Objekt- / Bilddistanz ist es gemäß unserer Definition positiv wenn das Objekt / Bild links / rechts der Grenzfläche liegt. Beim Krümmungsradius entsprechend positiv wenn das Zentrum auf der rechten Seite liegt, negativ im umgekehrten Fall.

Wir addieren die beiden Gleichungen um  $z$  zu eliminieren und erhalten

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}.$$

Somit ist die Brennweite

$$f = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_2 - R_1)}$$

der Linse durch die Radien  $R_{1,2}$  der beiden Linsenflächen gegeben, welche jeweils vorzeichenbehaftet

sind. Man kann dieses Resultat einfach so interpretieren dass sich die Brechkraft  $(n-1)/R$  der beiden Oberflächen addiert, wobei bei der zweiten Oberfläche aufgrund des umgekehrten Verhältnisses der Brechungsindizes ein positiver Radius eine negative Sammelwirkung, d.h. eine aufweitende Wirkung hat.

Die “Brechkraft” oder Sammelwirkung einer Linse ist das Inverse der Brennweite und wird oft in “Dioptrien”  $= 1/m$  gemessen. 5 Dioptrien bezeichnen eine Brennweite von 20 cm.

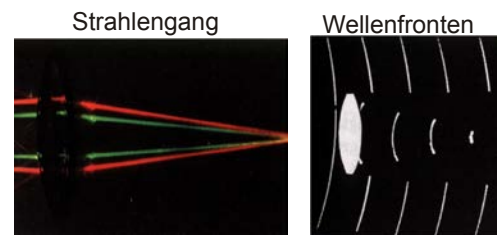


Abbildung 7.74: Strahlengang und Wellenfronten durch eine Sammellinse.

Abb. 7.74 zeigt, wie man den Strahlengang im Experiment mit Hilfe von Laserstrahlen messen kann. Im Rahmen der Wellenoptik wird die Sammellinse über eine Verbiegung der Wellenfronten diskutiert. Mit Hilfe von Pulslasern und holographischen Abbildungsverfahren kann diese ebenfalls gemessen werden.

### 7.4.7 Linsentypen


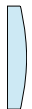
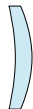



Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	positiver Meniskus	bi-konkav	plan-konav	negativer Meniskus
Radien	$R_1 > 0$ $R_2 < 0$	$R_1 = \infty$ $R_2 < 0$	$R_1 < R_2 < 0$	$R_1 < 0$ $R_2 > 0$	$R_1 = \infty$ $R_2 > 0$	$R_2 < R_1$ $< 0$
Brennweite	$f > 0$			$f < 0$		

Abbildung 7.75: Linsenformen.

Je nach Vorzeichen und Betrag der beiden Radien unterscheiden man bikonvexe, plankonvexe, bikon-

kave, plankonkave und Meniskus- Linsen. Abb. 7.75 zeigt einige Beispiele.

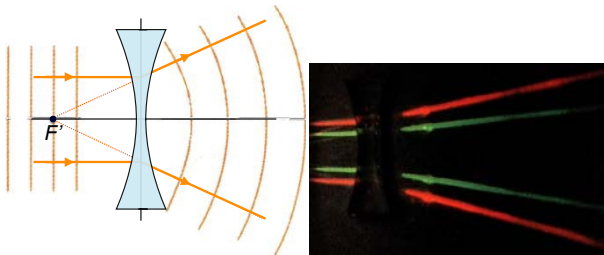


Abbildung 7.76: Strahlengang und Wellenfronten durch eine Zerstreuungslinse.

Bei einer Zerstreuungslinse (siehe Abb. 7.76) werden die Wellenfronten im Außenbereich der Linse verzögert, resp. die Strahlen nach außen gebrochen.

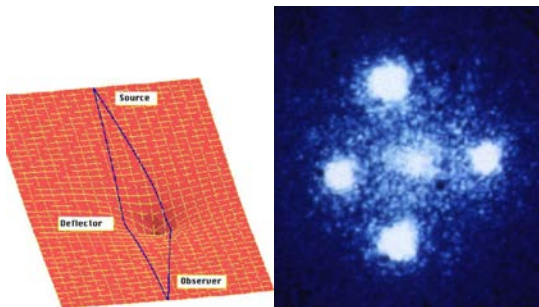


Abbildung 7.77: Prinzip und Beispiel für eine Gravitationslinse.

Linsen müssen nicht aus Glas bestehen. Die Lichtausbreitung wird z. B. auch durch Gravitationskräfte beeinflusst, wie in Abb. 7.77 gezeigt. Schwere Objekte im Weltraum wirken deshalb als sogenannte Gravitationslinsen: sie biegen Lichtstrahlen. Dies kann z.B. dazu führen, dass ein entferntes Objekt mehrfach sichtbar wird, wie im Beispiel von Abb. 7.77 ein Quasar, dessen Licht durch eine auf dem optischen Weg liegende Galaxis fokussiert wird.

Diesen Effekt kann man mit Hilfe eines einfachen Modells auch im Hörsaal nachvollziehen. Hier wird ein Weinglas als Linse verwendet.

#### 7.4.8 Abbildung und Vergrößerung

Das Bild eines bestimmten Objekts, das durch eine dünne Linse erzeugt wird, kann durch die in Abb.

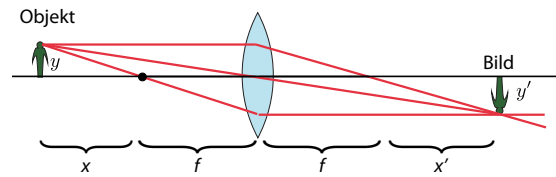


Abbildung 7.78: Optische Abbildung.

7.78 gezeigte Konstruktion erhalten werden:

- Jeder Strahl parallel zur Achse geht durch den Fokus auf der gegenüberliegenden Seite
- Ein Strahl, der durch den Fokus läuft, tritt auf der anderen Seite parallel zur Achse aus.

Damit erhalten wir folgenden Gleichungen zwischen Größe und Abstand von Objekt und Bild:

$$\frac{B}{f} = \frac{G}{x} \quad \text{und} \quad \frac{B}{x'} = \frac{G}{f}. \quad (7.3)$$

Das Abbildungsverhältnis, also das Verhältnis der Größe  $B$  des Bildes relativ zur Größe  $G$  des Objekts wird

$$\frac{B}{G} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f}.$$

Das Verhältnis ist somit gegeben durch das Verhältnis der Brennweite  $f$  zum Abstand  $x$  des Objekts vom Brennpunkt, resp. durch das Verhältnis des Abstandes  $x'$  des Bildes vom zweiten Brennpunkt. Den Ort des Bildes erhält man aus den beiden Gleichungen (7.3) z.B. indem man die erste auflöst nach

$$B = G \frac{f}{x}$$

und dies in die zweite einsetzt:

$$\frac{Gf}{(xx')} = \frac{G}{f} \rightarrow xx' = f^2.$$

Das Produkt von Objekt- und Bilddistanz (gemessen vom Brennpunkt) ist somit immer gleich dem Quadrat der Brennweite. Diese Form ist äquivalent zur Linsengleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

wenn die Distanzen durch  $g = x + f$  und  $b = x' + f$  ersetzt werden.



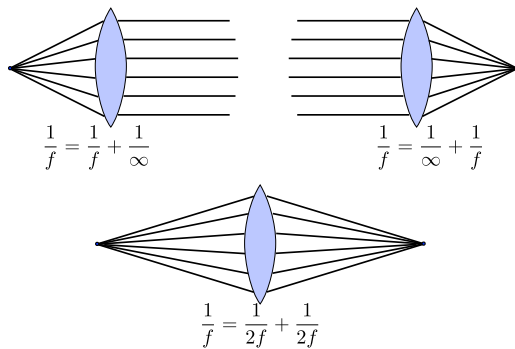


Abbildung 7.79: Spezialfälle für die Abbildungsgleichung.

Abb. 7.79 stellt einige wichtige Spezialfälle der Linsengleichung dar. Im Fall  $x = x' = f$  sind Objekt und Bild je um  $f$  von den Brennpunkten entfernt, resp. um  $2f$  von der Linse. Dabei sind Objekt- und Bildstanz identisch und das Abbildungsverhältnis gerade gleich 1. Wenn einer der beiden Abstände vom Brennpunkt gegen Null geht, so muss der andere gegen Unendlich gehen. Dies entspricht den beiden Fällen wo ein paralleler Strahl in den Brennpunkt der Linse fokussiert wird, resp. wo eine punktförmige Quelle im Brennpunkt der Linse kollimiert wird.

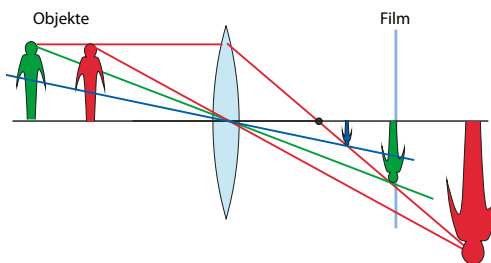


Abbildung 7.80: Abbildung von unterschiedlich weit entfernten Objekten in einer Kamera.

Die Tatsache, dass unterschiedlich entfernte Gegenstände auf unterschiedliche Bildebenen abgebildet werden, ist jedem Hobby-Fotografen bekannt. Sie führt zur endlichen "Tiefenschärfe" eines Bildes. Wie in Abb. 7.80 gezeigt, weist der Bildsensor oder Film einen bestimmten Abstand zum Objektiv auf. Deshalb werden nur Gegenstände in der "richtigen" Entfernung scharf abgebildet.

## 7.4.9 Linsenfehler

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Linsen perfekt seien. Allerdings haben wir bei der Herleitung der Linsengleichung verschiedene vereinfachende Annahmen gemacht, die in der Praxis nie exakt erfüllt sind. So hatten wir z.B. angenommen, dass die Dicke der Linsen vernachlässigt werden kann, oder dass die Oberfläche durch eine Parabel angenähert werden kann. In der Praxis benutzt man hingegen sphärische Oberflächen, da solche Linsen sehr viel einfacher herzustellen sind. Aus diesen Unterschieden ergeben sich sogenannte "Linsenfehler", d.h. Unterschiede zwischen den hier angenommenen "Gesetzen" und den wirklichen Strahlengängen. Technisch werden diese folgendermaßen klassifiziert:

1) sphärische Aberration: Die hier benutzten Gleichungen gelten nur für Strahlen in der Nähe der optischen Achse. Strahlen, die zu weit davon entfernt sind, werden nicht mehr in den gleichen Punkt fokussiert. Natürlich kann man eine Linse immer klein genug machen, dass solche Fehler vernachlässigbar sind. Andererseits ist die Lichtstärke einer Linse proportional zu ihrer Fläche, also zum Quadrat des Durchmessers. Es gibt zwei Möglichkeiten, sphärische Aberration auch bei großen Linsen gering zu halten:

i) Man kombiniert verschiedene Linsen in ein Objektiv

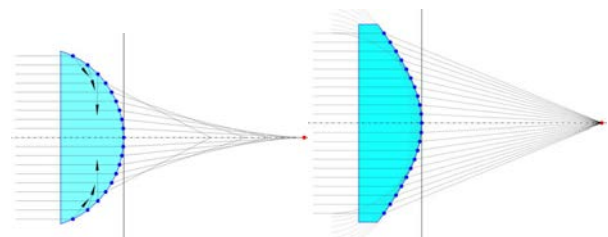


Abbildung 7.81: Plankonvexe Linse mit sphärischer Aberration (links) und asphärisch optimierte Linse (rechts).

ii) Man benutzt asphärische Linsen, d.h. man optimiert die Form der Linse so, dass diese Fehler verschwinden. Abb. 7.81 zeigt ein solches Beispiel. Dies wird allerdings nur für teure Spezialoptiken

gemacht, weil das Herstellungsverfahren wesentlich aufwendiger ist. Heute ist dies aber eindeutig ein zunehmender Trend.

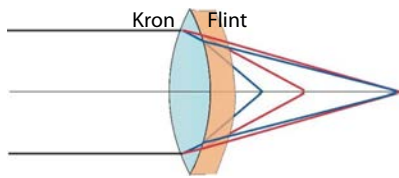


Abbildung 7.82: Chromatische Aberration: Korrektur durch Linsenkombination.

2) Chromatische Aberration: Aufgrund der Dispersion des Glases werden unterschiedliche Wellenlängen unterschiedlich stark gebrochen. Auch dieses Problem kann durch die Kombination unterschiedlicher Linsen weitgehend vermieden werden. Dabei werden Linsen mit unterschiedlichen Brechungsindizes und unterschiedlicher Dispersion kombiniert. Solche Linsenkombinationen werden kommerziell als „Achromaten“ angeboten. Das Beispiel von Abb. 7.82 reduziert die Dispersion über den sichtbaren Spektralbereich auf weniger als 0.5%.

3) Coma, Astigmatismus: Weitere Aberrationen werden als Coma und Astigmatismus bezeichnet. Dabei handelt es sich um Fehler, die dadurch zustande kommen, dass Objekt und Bild nicht auf der Achse der Linse liegen.

#### 7.4.10 Maximale Auflösung

Aus den Linsengleichung ergibt sich, dass Objekte durch Abbildungen beliebig vergrößert oder verkleinert werden können. Dies ist aber nicht möglich, wenn man in einen Bereich kommt, wo die geometrische Optik nicht mehr gültig ist. Voraussetzung für deren Anwendbarkeit ist, dass die relevanten Dimensionen groß sind im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes.

Eine Abschätzung für das maximal erreichbare Auflösungsvermögen eines Mikroskops erhält man mit folgender Überlegung: Zwei Punkte  $P$  und  $P'$  befinden sich im Abstand  $d$  voneinander, wie in Abb. 7.83 gezeigt. Damit man sie unterscheiden kann, müssen Kugelwellen, die von den beiden Punkten ausgesandt werden, mindestens auf einem Teil der Linse

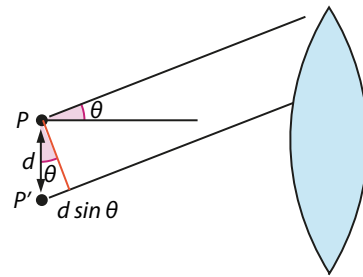


Abbildung 7.83: Auflösungsgrenze für optische Abbildungen.

unterschiedliche Phasen aufweisen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass sie sich in der Nähe der Linsenachse befinden, so dass zwei Kugelwellen, die zu gleicher Zeit von den beiden Punkten ausgehen, auf der Achse mit identischer Phase eintreffen. Als unterscheidbar betrachten wir die Punkte dann, wenn die beiden Wellen am Rand der Linse eine Phasendifferenz  $\Delta\phi \geq \pi$  besitzen, d.h. wenn die Weglängendifferenz mindestens  $\lambda/2$  beträgt. Beträgt der Winkel zwischen dem Zentrum und dem Rand der Linse  $\theta$ , so ist der Weglängenunterschied

$$d \sin \theta \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Eine hohe Auflösung erhält man somit, wenn

- die Wellenlänge klein
- und der Öffnungswinkel groß ist.

Die maximale Auflösung wird dann erzielt wenn das Objekt sich in der Brennebene befindet. Der Öffnungswinkel  $\theta$  kann somit als das Verhältnis aus Radius und Brennweite geschrieben werden. Man bezeichnet den Sinus des Öffnungswinkels ( $\sin \theta$ ) als numerische Apertur (NA).

Die hier verwendete Bedingung gibt nur die Größenordnung an. Es werden anstelle von  $\lambda/2$  auch die Werte von  $0.62 \lambda$  und  $0.82 \lambda$  verwendet, welche z.B. aus der Theorie der Beugung stammen. Für eine unendlich große Linse und sichtbares Licht würde man somit erhalten  $2d \geq 0.6 \mu\text{m}$  oder  $d \geq 0.3 \mu\text{m}$ . In der Praxis ist der Winkel  $\theta$  immer kleiner als  $\pi/2$ . Für ein Mikroskop mit hoher numerischer Apertur kann die Auflösungsgrenze trotzdem deutlich unter  $1 \mu\text{m}$  liegen.

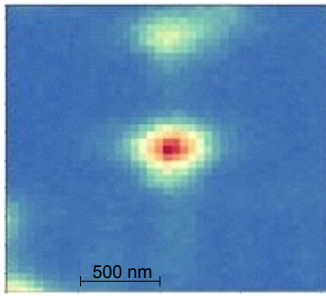


Abbildung 7.84: Bild einer punktförmigen Quelle als Auflösungstest.

Abb. 7.84 zeigt als Beispiel ein Bild einer punktförmigen Lichtquelle, welches mit Hilfe eines konfokalen Mikroskops aufgenommen wurde.

Das gleiche Prinzip der maximalen Auflösung gilt auch für den umgekehrten Prozess, die Erzeugung eines möglichst kleinen Bildes aus einer größeren Vorlage. Bilddetails können nur dann mit einer Linse dargestellt werden, wenn sie nicht kleiner als  $\lambda/(2 \sin \theta)$  sind. Diese Abbildungsgrenze ist u. A. relevant für die Photolithographie, welche für die Herstellung elektronischer Schaltkreise verwendet wird. Die Dimensionen der auf diese Weise erzeugten Schaltungen können nicht wesentlich kleiner sein als die Wellenlänge des verwendeten Lichts. Deshalb werden heute in der Chipherstellung ultraviolette Lichtwellen verwendet.

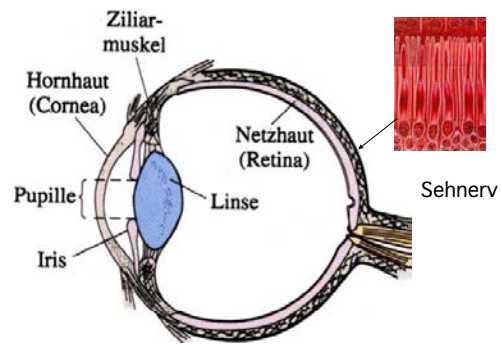


Abbildung 7.85: Querschnitt durch ein Auge.

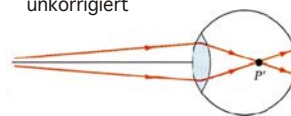
## 7.5 Optische Instrumente

### 7.5.1 Das Auge

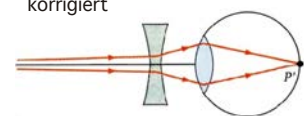
Das Auge ist das wichtigste optische Instrument, welches von der Natur stark optimiert wurde. Wie in Abb. 7.85 gezeigt, besteht es aus einem kugelförmigen Körper von ca. 25 mm Durchmesser. Darin enthalten ist eine Linse, welche durch einen Muskel verformt werden kann. Da Linse und Augenkörper ähnliche Brechkraft besitzen, dient diese Anpassung nur für geringe Korrekturen. Die lichtempfindlichen Zellen befinden sich auf der Rückseite des Auges, in der Netzhaut. Man unterscheidet zwischen den stäbchenförmigen Zellen, welche tagsüber farbige Bilder liefern und den zapfenförmigen, nicht farbempfindlichen Zellen, welche nachts geringe Lichtstärken wahrnehmen können.

Kurzsichtig: Brennweite zu kurz

unkorrigiert

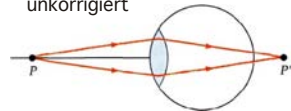


korrigiert



Weitsichtig: Brennweite zu lang

unkorrigiert



korrigiert

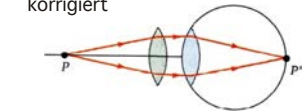


Abbildung 7.86: Ursache von Sehfehlern und Korrektur durch Brille.

Sehfehler entstehen wenn die Brechkraft der Lin-

se nicht mit der Größe des Auges übereinstimmt. Im Falle der Kurzsichtigkeit ist die Brechkraft zu groß und das Bild entsteht vor der Netzhaut. Wie in Abb. 7.86 gezeigt, kann dies korrigiert werden, indem man eine Zerstreuungslinse einsetzt. Bei der Weitsichtigkeit ist die Brechkraft zu gering. Sie wird korrigiert durch eine Sammellinse.

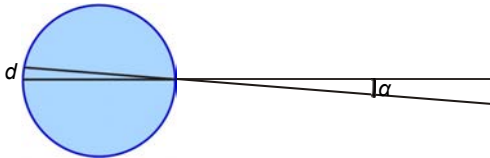


Abbildung 7.87: Auflösungs Grenze für das Auge.

Die Auflösungs Grenze gilt auch für das Bild auf der Netzhaut. Für einen Abstand von 25 mm (= Durchmesser des Auges) und eine Wellenlänge von 600 nm findet man eine Auflösungs Grenze von ca. 3-4.8  $\mu\text{m}$ . Die Abstände zwischen den Sehzellen betragen ca. 3-5  $\mu\text{m}$  (im "gelben Fleck": 1  $\mu\text{m}$ ), also optimiert auf die Auflösung. Die Auflösungs Grenze können wir auch auf das Objekt beziehen: die Größe von 3  $\mu\text{m}$  entspricht einem Winkel des Bildes ( $\rightarrow$  Abb. 7.87) von

$$\alpha = \frac{3 \mu\text{m}}{25 \text{ mm}} = 1,2 \cdot 10^{-4}.$$

Damit kann man z.B. ein Objekt von der Größe 1.2 cm in einer Distanz von 100 m noch erkennen.

### 7.5.2 Vergrößerung und Mikroskop

Eine Motivation für das Studium der Optik war immer die Entwicklung von Geräten, welche das menschliche Sehvermögen erweitern. Das einfachste derartige Instrument ist die Lupe. Sie kann als zusätzliche Linse vors Auge gehalten werden, so dass man Gegenstände betrachten kann, die sich näher beim Auge befinden. Die Vergrößerung wird somit primär durch die Verringerung des Objektabstandes erreicht.

Mit bloßem Auge kann man typischerweise bis auf eine Distanz von  $s_0 \approx 25 \text{ cm}$  scharf sehen. Das Bild eines Objektes der Größe  $G$  erscheint dann maximal unter dem Winkel  $\varepsilon_0 \approx G/s_0$  ( $\rightarrow$  Abb. 7.88 links).

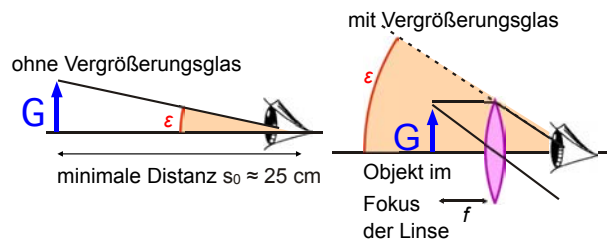


Abbildung 7.88: Vergrößerungsglas.

Verwendet man dagegen eine Linse, so kann man das Objekt bis auf die Brennweite  $f$  an die Linse heranbringen, ohne dass das Auge angestrengt wird. Das Objekt erscheint jetzt unter dem Winkel  $\varepsilon = G/f$ , das heißt um den Faktor

$$V = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}$$

vergrößert. Je kleiner die Brennweite einer Lupe, desto höher ist somit der Vergrößerungsfaktor.

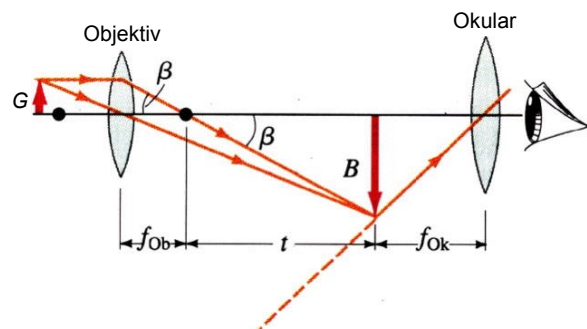


Abbildung 7.89: Mikroskop.

Eine wesentlich stärkere Vergrößerung erzielt man mit dem Mikroskop. Wie in Abb. 7.89 gezeigt, besteht dieses aus einer Kombination von mindestens 2 Linsen. Die erste Linse, das Objektiv, erzeugt ein Zwischenbild, welches größer ist als das Objekt. "Groß" bezieht sich hier immer auf den Winkel  $\varepsilon$ , unter dem das Objekt für den Betrachter erscheint.

Der Vergrößerungsfaktor beträgt

$$v_{ZB} = \frac{t}{f_{Ob}}.$$

Eine zusätzliche Vergrößerung dieses Zwischenbildes erreicht man, indem man es nicht mit dem nackten Auge betrachtet, sondern mit einem Okular und

damit wie bei einer Lupe einen geringeren Objektstand erreicht. Dadurch wird eine weitere Vergrößerung um den Faktor

$$v_O = \frac{s_0}{f_{Ok}}$$

erreicht, wobei  $s_0 \approx 25 \text{ cm}$  die "deutliche Sehweite" beschreibt. Die gesamte Vergrößerung beträgt somit

$$v = v_{ZB} v_O = \frac{t s_O}{f_{Ob} f_{Ok}}.$$

### 7.5.3 Fernrohr

Ein Fernrohr ist wie das Mikroskop aus einem Objektiv und einem Okular aufgebaut.

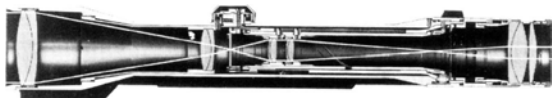


Abbildung 7.90: Querschnitt durch ein Fernrohr.

Der wesentliche Unterschied zum Mikroskop besteht darin, dass hier ein weit entferntes Objekt in ein Zwischenbild abgebildet wird. Damit ist  $v_{ZB}$  immer kleiner als 1, d.h. das Zwischenbild ist kleiner als das Objekt. Es ist aber auch näher als das Objekt und erscheint deshalb - nach Betrachtung durch das Okular - größer. Der Vergrößerungsfaktor wird hier sinnvollerweise über den Sehwinkel berechnet.

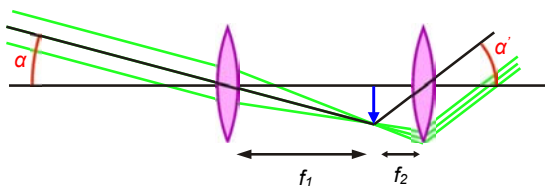


Abbildung 7.91: Schema des Kepler'schen Fernrohrs.

Ein einfaches Kepler'sches Fernrohr kann man aus zwei Linsen aufbauen, wie in Abb. 7.91 gezeigt. Wie man leicht erkennt, wird ein Zwischenbild im Brennpunkt der ersten Linse erzeugt, d.h. beim Abstand  $f_1$ . Die zweite Linse stellt man so ein, dass das Zwischenbild ebenfalls in der Brennebene liegt.

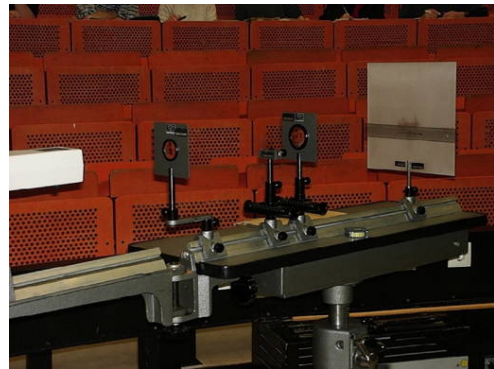


Abbildung 7.92: Kepler'sches Fernrohr im Hörsaal.

Abb. 7.92 zeigt eine Realisierung des Kepler'schen Fernrohrs im Hörsaal.

Der Sehwinkel (genauer: dessen Sinus) vergrößert sich demnach um das Verhältnis der beiden Brennweiten,

$$\alpha f_1 = \alpha' f_2 \rightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}.$$

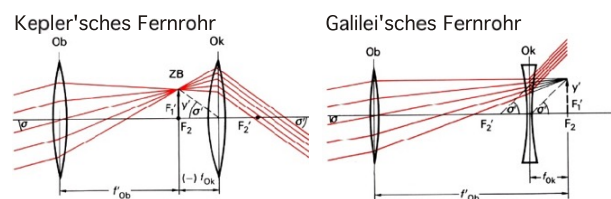


Abbildung 7.93: Kepler'sches und Galilei'sches Fernrohr.

Das Objekt ist aber auch invertiert, d.h. es steht auf dem Kopf. Dies ist bei astronomischen Fernrohren weniger relevant, bei terrestrischen Anwendungen jedoch störend. Man kann dies auf unterschiedliche Arten korrigieren, indem man für das Okular eine Zerstreuungslinse verwendet und diese vor das Zwischenbild stellt, wie im Galilei'schen Fernrohr (Abb. 7.93 rechts), oder indem man eine dritte Sammellinse einsetzt, welche das Bild nochmals invertiert (siehe Abb. 7.90). In diesem Fall wird das Gerät jedoch sehr lang.

In einem Fernglas (siehe Abb. 7.94) richtet man das Bild auf, indem man es durch zwei Prismen nochmals invertiert. Diese falten gleichzeitig den Strahl



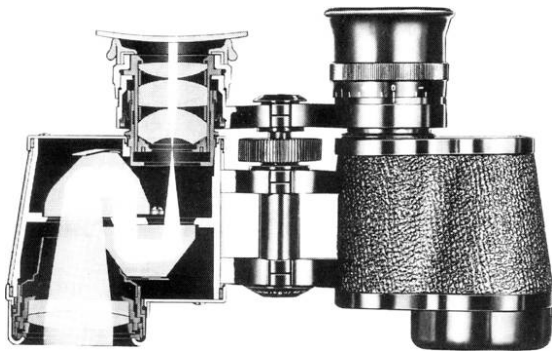


Abbildung 7.94: Strahlengang durch ein Fernglas.

lengang, so dass auch relative große Distanzen zwischen Objektiv und Okular noch in ein handliches Gerät passen.

Die größten Fernrohre werden in der Astronomie benutzt. Allerdings benutzt man dort nicht Linsen für die Abbildung. Diese wären zum einen zu groß und würden andererseits zu starke Abbildungsfehler, insbesondere chromatische Aberration erzeugen.

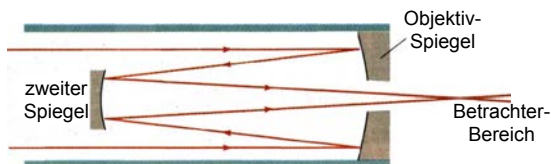


Abbildung 7.95: Spiegelteleskop.

Dies wird eliminiert, indem man Spiegel verwendet: diese weisen keine chromatische Aberration auf, da die Wellenlänge beim Reflexionswinkel nicht auftaucht. Abb. 7.95 zeigt den entsprechenden Strahlengang in einem Spiegelteleskop. Spiegelteleskope haben außerdem den Vorteil, dass sie zu wesentlich größeren Durchmessern skaliert werden können.

### 7.5.4 Photometrie

Die Messung von Licht (Intensität, Helligkeit, Strahlungsleistung, räumliche und spektrale Verteilung ...) ist eine eigene Wissenschaft. Die Strahlungsleistung (Einheit: W) bezeichnet die Energie, die pro Zeiteinheit auf den Detektor trifft.

Offensichtlich hängt diese z.B. davon ab, wie weit der Detektor von der Quelle entfernt ist. Bei einer

punktförmigen Quelle ist die Leistung durch eine Fläche  $A$  proportional zum Raumwinkel  $\Omega = A/r^2$ , wobei  $r$  den Abstand darstellen. Für eine volle Kugel wird der Maximalwert von  $4\pi$  erreicht.

Lichtquelle	Lichtstrom
Leuchtdiode	$10^{-2}$ lm
Glühlampe 220 V, 60 W	730 lm
Glühlampe 220 V, 100 W	1 380 lm
Leuchtstoffröhre 220 V, 40 W	2 300 lm
Quecksilberdampf Lampe 220 V, 125 W	5 400 lm
Quecksilberdampf Lampe 220 V, 2000 W	125 000 lm

Abbildung 7.96: Lichtstärke.

Die wichtigsten photometrischen Größen sind der Lichtstrom und die Beleuchtungsstärke. Der Lichtstrom bezeichnet die von einer Quelle ausgehende optische Leistung. Die Einheit ist das Lumen (lm). Davon abgeleitet ist die Lichtstärke ( $\rightarrow$  Abb. 7.96), definiert als Lichtstrom pro Raumwinkel. Die Einheit beträgt 1 Candela,  $1 \text{ cd} = 1 \text{ lm/sr}$ . Sie ist als eine der physikalischen Grundeinheiten, definiert als die Lichtstärke einer Strahlung der Frequenz  $540 \cdot 10^{12}$  Hertz mit einer Strahlstärke von  $1/683$  Watt pro Steradian.

Beleuchtung	Beleuchtungsstärke
Sonne, Sommer	70 000 lx
Sonne, Winter	5 500 lx
Tageslicht, bedeckter Himmel	1 000 bis 2 000 lx
Vollmond	0,25 lx
Sterne ohne Mond, klare Nacht	$10^{-3}$ lx
Grenze der Farbwahrnehmung	3 lx
Arbeitsplatzbeleuchtung, hohe Ansprüche	1 000 lx
Wohnzimmerbeleuchtung	120 lx
Straßenbeleuchtung	1 lx bis 16 lx

Abbildung 7.97: Beleuchtungsstärke.

Die Beleuchtungsstärke ( $\rightarrow$  Abb. 7.97) bezeichnet die Lichtleistung, welche auf eine Flächeneinheit des Objektes fällt. Ihre Einheit ist das Lux (lx). Da es sich bei Licht letztlich um elektromagnetische Felder handelt, kann man die photometrischen Größen

auch mit entsprechenden physikalischen Größen in Beziehung setzen. Die kann zum Beispiel über die abgestrahlte Leistung des schwarzen Strahlers geschehen. Integriert man diese über den gesamten spektralen Bereich, gewichtet aber mit der spektralen Empfindlichkeit des Auges, so erhält man das Verhältnis zwischen Lichtstrom und Energiestrom zu  $K = 680 \text{ lm/W}$ .

## 7.6 Polarisation und Doppelbrechung

### 7.6.1 Polarisation

Wie andere elektromagnetische Wellen ist Licht eine Transversalwelle. Es existieren deshalb zwei orthogonale Polarisationsrichtungen. Licht mit unterschiedlicher Polarisation kann in vielen Fällen ein unterschiedliches Verhalten zeigen; ein Beispiel dafür hatten wir bei der Reflexion diskutiert, wo unterschiedliche Polarisierungen unterschiedliches Reflexionsverhalten zeigen. Polarisationseffekte spielen deshalb in der Optik eine wichtige Rolle.

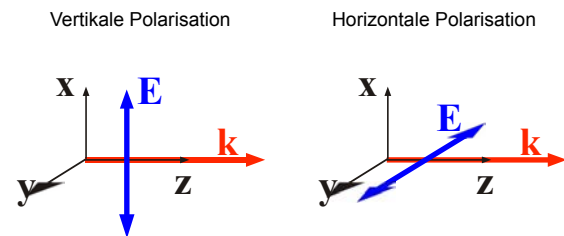


Abbildung 7.98: Elektrische und magnetische Felder für lineare Polarisation.

Für eine mathematische Beschreibung von polarisiertem Licht zerlegt man die Feldamplitude in zwei linear unabhängige Transversalwellen, welche unterschiedlichen Richtungen der Auslenkung entsprechen ( $\rightarrow$  Abb. 7.98). Allgemein kann man eine Basis von solchen Polarisationszuständen wählen und die allgemeine Welle als Superpositionszustand schreiben. Wir beschreiben die beiden Polarisierungen über die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  und das Feld eines allgemeinen Polarisationszustand als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\vec{e}_1 E_1 + \vec{e}_2 E_2) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t).$$

Dabei sind die Amplituden  $E_1$  und  $E_2$  komplexe Zahlen: der Imaginärteil bezeichnet den Phasenunterschied zwischen den beiden Wellen.

Als ein Beispiel wählen wir die Polarisationszustände  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse. Für  $E_1 = E_2 = 1$  erhalten wir lineare Polarisation entlang der Winkelhalbierenden. Allgemein erhält man linear polarisiertes Licht wenn  $E_1$  und  $E_2$  dieselbe Phase

aufweisen, also z.B. beide reell oder beide rein imaginär sind. Das Verhältnis der Amplituden gibt den Winkel der Polarisationssebene an.



Abbildung 7.99: Doppelbrechung in einem Kalkspat-Kristall.

Je nach Material kann die Polarisation einen großen Einfluss auf die Ausbreitung des Lichts haben. Ein einfaches Beispiel ist ein doppelbrechender Kristall auf einer Unterlage. Im Beispiel von Abb. 7.99 besteht der Kristall aus Kalkspat. Man sieht, dass die darunter liegende Schrift doppelt sichtbar ist. Was nicht direkt erkennbar ist: die beiden Bilder sind unterschiedlich polarisiert. Den gleichen Effekt kann man auch zeigen, indem man einen Laserstrahl durch den Kristall laufen lässt. Auf dem Schirm sieht man dann zwei dazugehörige Punkte. Mit dem Polarisationsfilter kann man feststellen, dass die Polarisationsrichtung der beiden Strahlen sich um 90 Grad unterscheidet.

### 7.6.2 Erzeugung und Umwandlung

In einem Laser wird Licht direkt polarisiert erzeugt. In einer Glühlampe hingegen ist die Polarisation der einzelnen Photonen voneinander unabhängig und das Licht insgesamt nicht polarisiert. Man kann in diesem Fall nachträglich polarisiertes Licht herstellen, indem man es entweder in die beiden unterschiedlichen Polarisationen trennt oder eine Polarisationsrichtung herausfiltert. Es existieren viele optische Elemente, die dafür konstruiert wurden, um unterschiedliche Polarisationszustände zu erzeugen, resp. ineinander umzuwandeln.

Am bekanntesten ist sicher der Polarisator, welcher

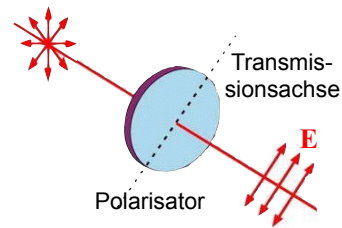


Abbildung 7.100: Transmission durch Polarisator.

auch in Sonnenbrillen Verwendung findet (→ Abb. 7.100). Er erzeugt linear polarisiertes Licht, indem die Anteile des Lichtes, welche die orthogonale Polarisierung aufweisen, abgelenkt oder absorbiert werden. Dass solche optischen Elemente in der Fotografie oder in Sonnenbrillen verwendet werden ist nur sinnvoll, weil das Licht in der Natur polarisiert ist. So ist Licht, welches auf einer Wasseroberfläche reflektiert ist, horizontal polarisiert. Auch das blaue Licht des Himmels, welches durch Streuung von Sonnenlicht entsteht, ist polarisiert, wobei die Polarisationsrichtung von der Richtung bezüglich der Sonne abhängt. Dies kann man einfach überprüfen, wenn man durch einen Polarisator, also z.B. eine polarisierende Sonnenbrille den Himmel betrachtet: Die Helligkeit ist richtungsabhängig, auch wenn der Himmel ohne Sonnenbrille keine Helligkeitsunterschiede zeigt.

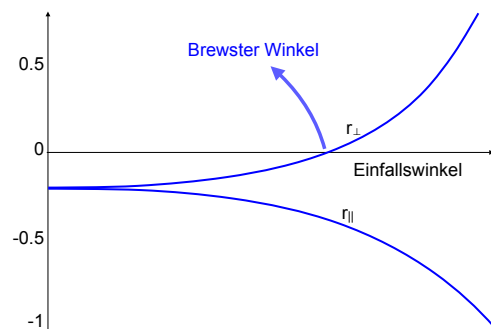


Abbildung 7.101: Reflexionskoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels.

Eine wichtige Möglichkeit für die Erzeugung von polarisiertem Licht ist die Reflexion. Wie in Abb. 7.101 gezeigt, weist der Reflexionskoeffizient für Licht, das parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, als Funktion des Einfallswinkels einen Nulldurch-

gang auf. Somit verschwindet die Reflexion bei einem Winkel

$$\theta_B = \tan^{-1} n.$$

Z.B. Kronglas ist  $n = 1.51$  und somit  $\theta_B = 56,5^\circ$ . Dieser Winkel wird als Brewsterwinkel bezeichnet ( $\rightarrow$  Kap. 7.3.6). Somit wird nur die senkrecht polarisierte Komponente reflektiert, und der reflektierte Strahl ist vollständig polarisiert.

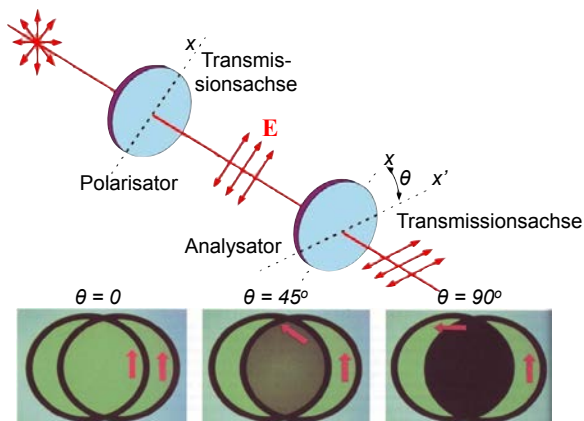


Abbildung 7.102: Transmission durch 2 Polarisatoren unterschiedlicher Orientierung.

Im Beispiel von Abb. 7.102 erzeugt der erste Polarisator aus unpolarisiertem Licht polarisiertes Licht. Diese wird durch einen weiteren Polarisator geschickt, welcher die Funktion eines Analysators hat. Je nach Winkel zwischen den beiden kann Licht durch die Kombination hindurch oder nicht. Man findet eine sinus-förmige Abhängigkeit der Intensität vom Winkel zwischen den beiden Polarisatoren:

$$I_t = I_0 \cos^2 \theta.$$

Stellt man einen dritten Polarisator zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren, so erhöht man damit die Transmission, falls dieser nicht die gleiche Stellung hat wie einer der beiden anderen. Beträgt der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Polarisatoren z.B. 45 Grad, so wird jeweils  $\cos^2(45^\circ) = 1/2$ , insgesamt somit 1/4 transmittiert.

### 7.6.3 Doppelbrechung

Eine andere Möglichkeit ist die Doppelbrechung: Kristalle mit niedriger Symmetrie besitzen für unterschiedliche Polarisation des Lichtes unterschiedliche Brechungsindizes. Man kann sich das so vorstellen, dass die schwingenden Dipole in einem Kristall bezüglich der Kristallachsen fest orientiert sind. Die Stärke der Wechselwirkung zwischen der optischen Welle und den schwingenden Dipolen hängt deshalb davon ab, ob die Polarisation der Welle parallel oder senkrecht zum Dipol orientiert ist.

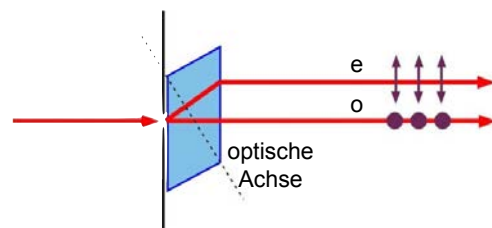


Abbildung 7.103: Strahlengänge in einem doppelbrechenden Material.

Dadurch werden Strahlen je nach Polarisation unterschiedlich gebrochen ( $\rightarrow$  Abb. 7.103). Man unterscheidet die beiden Polarisationen danach, ob der Brechungsindex von der Ausbreitungsrichtung abhängt. Bei einer Polarisation ist der Brechungsindex unabhängig von der Ausbreitungsrichtung; diese Komponente wird als ordentlicher Strahl bezeichnet. Bei der anderen Komponente, welche senkrecht zum ordentlichen Strahl polarisiert ist, variiert der Brechungsindex mit der Ausbreitungsrichtung. Dieser Strahl wird als außerordentlich bezeichnet. Die beiden Brechungsindizes werden als  $n_e$  und  $n_o$  bezeichnet. Die Unterschiede zwischen den beiden können sich im Bereich  $< 0.3$  bewegen, wie in Tabelle 7.1 gezeigt.

Beispiele:

Material	$n_o$	$n_e$
Kalkspat	1.6584	1.4864
Turmalin	1.6425	1.6220
Quarz	1.5442	1.5533
Rutil	2.6158	2.9029

Tabelle 7.1: Brechungsindizes einiger doppelbrechender Materialien.



Die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit für die beiden senkrechten Polarisationen führt auch dazu, dass der außerordentliche Strahl beim senkrechten Auftreffen auf eine ebene Fläche gebrochen wird – dies ist ein qualitativ anderes Verhalten als bei Materialien ohne Doppelbrechung.

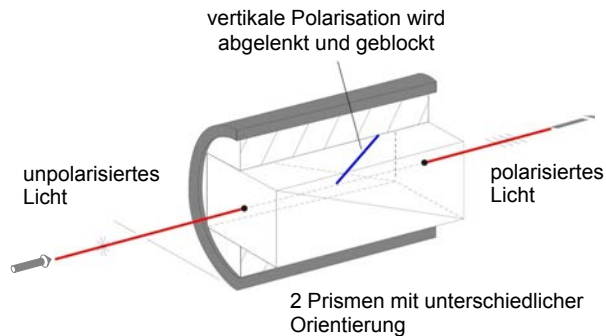


Abbildung 7.104: Aufbau eines Glan-Thompson Polarisators.

Doppelbrechende Materialien werden z.B. in einem Glan-Thompson Polarisator verwendet. Abb. 7.104 zeigt schematisch den Aufbau eines solchen Polarisators. Man kann solche Polarisatoren dazu verwenden, die beiden Polarisationen zu trennen. Blockt man einen der beiden Teilstrahlen, kann damit polarisiertes Licht erzeugt werden.

Außerdem gibt es optische Elemente, welche verschiedene Polarisationen ineinander umwandeln. Die wichtigsten sind sogenannte Verzögerungsplatten. Dazu verwendet man doppelbrechende Kristalle, bei denen der Brechungsindex von der Polarisation des Lichtes abhängt. Dadurch erscheint der Kristall für unterschiedliche Polarisationen unterschiedlich dick.

#### 7.6.4 Anwendungen

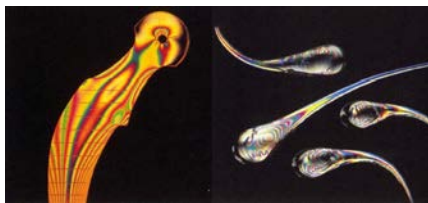
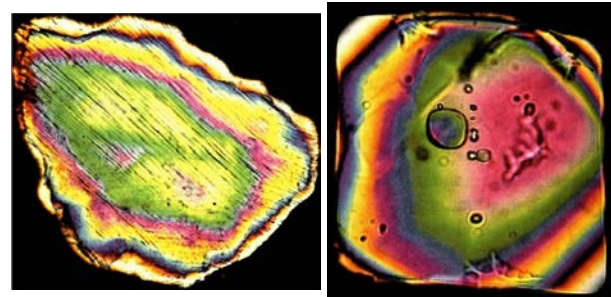


Abbildung 7.105: Spannungs-Doppelbrechung.

Die Doppelbrechung kann von äußeren Parametern abhängen. Insbesondere mechanische Spannungen können die optische Weglänge verändern. Man kann diesen Effekt nachweisen, indem man das Material zwischen zwei gekreuzte Polarisatoren (lineare oder zirkulare) bringt, wie in Abb. 7.105 gezeigt. Ist eine Spannungs-Doppelbrechung vorhanden, so wird die Polarisation in der Probe gedreht und es kommt zu einer Transmission durch den zweiten Polarisator. Der Effekt ist wellenlängenabhängig, so dass bei der Bestrahlung mit weißem Licht unterschiedliche Farben beobachtet werden. Man kann diesen Effekt u. A. zur Untersuchung der Spannungsverteilung benutzen.



Quarz aus Meteorit; Schichtstruktur als Resultat der Schockwellen

Quarz aus vulkanischem Gestein

Abbildung 7.106: Spannungs-Doppelbrechung in Quarz unterschiedlicher Herkunft.

Viele Mineralien zeigen Doppelbrechung. Bringt man sie zwischen gekreuzte Polarisatoren, wird deshalb ein Teil des Lichtes transmittiert. Die Verzögerung ist, wie der Brechungsindex selber, wellenlängenabhängig. Unterschiedliche Wellenlängen werden deshalb unterschiedlich stark verzögert und damit unterschiedlich stark abgeschwächt, so dass farbiges Muster entstehen. Abb. 7.106 zeigt zwei Bilder von Quarzkristallen.

In Abb. 7.107 sind Eiskristalle dargestellt, welche ähnliche Effekte zeigen. Außerdem gibt es Materialien, bei denen der Brechungsindex durch Anlegen von äußeren Feldern variiert werden kann, wie z.B. in elektro-optischen Modulatoren (durch elektrische Felder) oder in akustooptischen Modulatoren durch die Wechselwirkung mit Schallwellen.



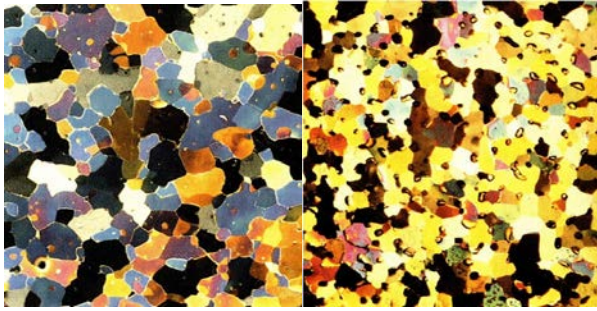


Abbildung 7.107: Unterschiedlich orientierte Eiskristalle mit eingeschlossenen Luftblasen.

### 7.6.5 Optische Aktivität

Viele organische Substanzen zeigen optische Aktivität, d.h. sie besitzen unterschiedlichen Brechungsindex für die beiden entgegengesetzten zirkularen Polarisationen. Dies ist auf ihre molekulare Struktur zurückzuführen. Diese Eigenschaft findet man z.B. in Quarz; sie ist allerdings ca. 100 mal kleiner als die lineare Doppelbrechung.

Schickt man linear polarisiertes Licht durch eine Zuckerlösung, wird die Polarisationssebene gedreht. Diesen Effekt findet man bei allen Molekülen, die keine Inversionssymmetrie aufweisen.

## 7.7 Interferenz

Meist hat man nicht nur eine einzelne Welle, sondern mehrere Wellen mit gleichen oder unterschiedlichen Frequenzen, Phasen, Amplituden und Ausbreitungsrichtungen. Bei ihrer Überlagerung spielt Interferenz zwischen einzelnen (Teil-)Wellen eine wichtige Rolle.



Abbildung 7.108: Überlagerte Wasserwellen.

### 7.7.1 Linearität für Felder, nicht für Intensitäten

Die Maxwell Gleichungen sind linear, sofern die dazu gehörigen Materialgleichungen auch linear sind. Dementsprechend ist auch die daraus abgeleitete Wellengleichung (6.14) linear, genau so wie die übrigen in Kapitel 6 (Wellen) behandelten Gleichungen. Verschiedene Wellen beeinflussen sich deshalb nicht, genau so wie für die Wasserwellen in Abb. 7.108. Mathematisch bedeutet dies: wenn  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  Lösungen einer bestimmten Wellengleichung sind, so sind auch alle Linearkombinationen

$$\Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2$$

Lösungen dieser Wellengleichung.

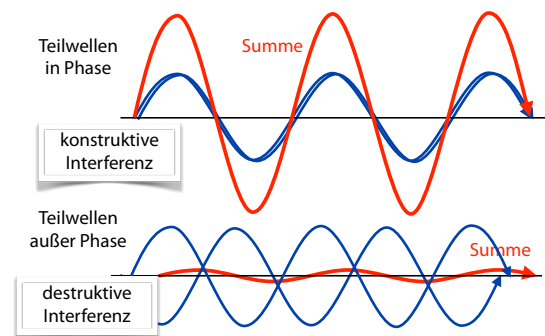


Abbildung 7.109: Konstruktive und destruktive Interferenz.

Wellen gleicher Frequenz und Wellenlänge summieren sich je nach Phasendifferenz zu einer Gesamtwellen, die der Summe, der Differenz oder einem Wert dazwischen entsprechen kann, wie in Abb. 7.109 gezeigt. Dargestellt sind hier jeweils die Amplituden der Felder.

In der Optik beobachtet man in den meisten Fällen nicht die Felder selbst, sondern die Intensität oder Leistung einer Welle. Diese sind proportional zum Quadrat des Feldes,

$$I \propto |E|^2.$$

Deshalb bezeichnet man optische Detektoren als quadratische Detektoren. Praktisch alle Detektoren funktionieren nach diesem Prinzip, so z.B. auch das

menschliche Auge, Halbleiterdetektoren oder fotografische Filme. Für die direkt gemessenen Größen, wie die Intensität, ist die Physik nicht-linear. Damit haben wir eine weitere Grenze der geometrischen Optik erreicht, welche davon ausgeht, dass einzelne Strahlen voneinander unabhängig sind.

### 7.7.2 Der Interferenzterm

Wenn zwei Felder  $A$  und  $B$  auf einen Detektor fallen, so misst dieser das Quadrat des resultierenden Feldes, d.h. das Signal ist proportional zu

$$I \propto |E|^2 = (A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$$

Dieses enthält, zusätzlich zur Summe der beiden Teilsignale ( $= A^2 + B^2$ ), einen zusätzlichen Term  $2AB$ , der als Interferenzterm bezeichnet wird.

Für komplexe Amplituden  $A$ ,  $B$  hängt dieser Term von der relativen Phase der beiden Wellen ab. Das Signal ist in diesem Fall proportional zum Absolutquadrat der Gesamtwellen, d.h.

$$\begin{aligned} I &\propto |A + B|^2 = (A + B)(A + B)^* \\ &= AA^* + AB^* + A^*B + BB^* \\ &= |A|^2 + |B|^2 + 2\Re\{AB^*\}. \end{aligned}$$

Der Interferenzterm kann auch geschrieben werden als

$$2\Re\{AB^*\} = 2|AB|\cos(\varphi_A - \varphi_B),$$

wobei  $\varphi_{A,B}$  die Phasen der einzelnen Wellen darstellen. Die Interferenz wird somit maximal wenn die beiden Phasen identisch sind. Man spricht dann von konstruktiver Interferenz. Unterscheiden sich die beiden Phasen um  $\pi$ , so wird der Signalbeitrag negativ und man spricht von destruktiver Interferenz. Die Interferenz verschwindet, wenn die beiden Wellen um  $\pi/2$  außer Phase sind, so dass  $\cos(\varphi_A - \varphi_B) = 0$ .

Abb. 7.110 zeigt die resultierende Intensität für gleich starke Felder,  $|A| = |B|$  als Funktion der Phasendifferenz

$$I = 2|A|^2(1 + \cos(\varphi_A - \varphi_B)).$$

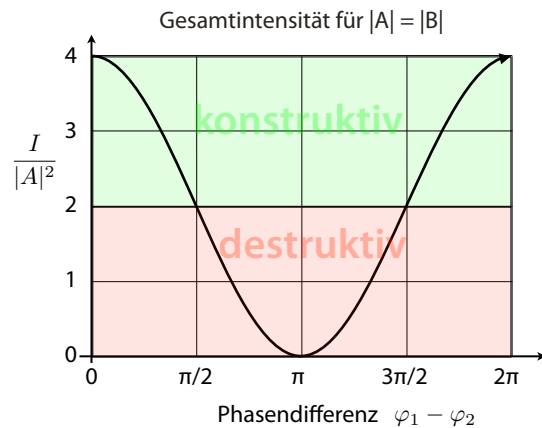


Abbildung 7.110: Gesamtintensität von 2 interferierenden Feldern als Funktion ihrer Phasendifferenz.

$\varphi_1 - \varphi_2$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$s/ A ^2$	4	2	0	2	4
Interfer.	konstr.	0	destr.	0	konstr.

Neben der Phasenlage muss auch die Polarisation der beiden Felder übereinstimmen: Sind die beiden Felder orthogonal polarisiert (z.B.  $x$ - und  $y$ -), so entsteht keine Interferenz.

### 7.7.3 Interferenz von 2 ebenen Wellen

Eine gute Möglichkeit für die Untersuchung solcher Interferenzeffekte bietet die Überlagerung von zwei Laserstrahlen. Die beiden Strahlen können näherungsweise als ebene Wellen betrachtet werden.

Abb. 7.111 zeigt die Überlagerung von zwei ebenen Wellen, die unter einem kleinen Winkel  $\theta$  auf einen Schirm fallen. Die beiden Felder verstärken sich gegenseitig wenn sie in Phase sind und interferieren destruktiv wenn sie außer Phase sind. Dies geschieht jeweils entlang einer Geraden senkrecht zum Schirm. Den Abstand zwischen zwei solchen Geraden findet man, indem man verlangt, dass die Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  beträgt. In der Richtung senkrecht zum Schirm ist dieser Abstand eine Wellenlänge. Parallel zum Schirm

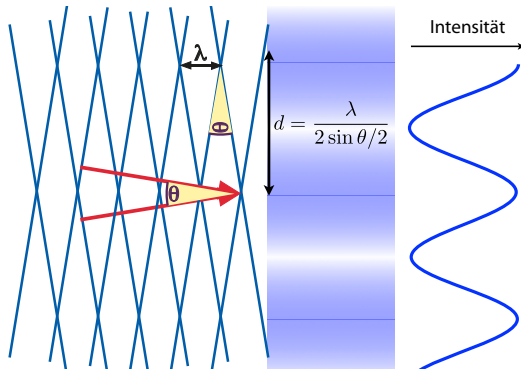


Abbildung 7.111: Gesamtintensität von 2 interferierenden Feldern, die unter einem Winkel  $\theta$  auf einen Schirm fallen.

entspricht er

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2} \approx \frac{\lambda}{\theta},$$

wobei die Näherung für kleine Winkel gilt,  $\theta \ll 1$ . Der Abstand wird also umso größer, je kleiner der Winkel wird. Für parallele Strahlen verschwindet die Ortsabhängigkeit, für gegenläufige Strahlen ( $\theta = \pi$ ) erreicht der Abstand sein Minimum bei der halben Wellenlänge,  $d_{\min} = \lambda/2$ .

### 7.7.4 Zweistrahlinterferenz an dünnen Schichten

Wenn Licht an einer planparallelen Platte reflektiert wird, so erhält man je einen Reflex von der Vorder- und der Rückseite. Diese beiden reflektierten Wellen stammen von der gleichen Welle und können deshalb interferieren. Die erste Welle erhält außerdem eine Phasenverschiebung um  $\pi$ , da sie am optisch dichteren Medium reflektiert wird.

Wie in Abb. 7.112 dargestellt, beträgt die Phasendifferenz für senkrechten Einfall

$$\delta\varphi = \pi + 4\pi n \frac{d}{\lambda_0},$$

mit  $\lambda_0$  als Vakuumwellenlänge und  $n$  und  $d$  Brechungsindex und Dicke der Platte oder des dünnen Films. Somit wird der reflektierte Strahl minimal

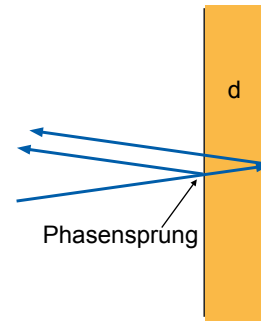


Abbildung 7.112: Reflexionen an einer dünnen Schicht.

wenn die Weglängendifferenz ein Vielfaches der optischen Wellenlänge  $\lambda$  ist, resp.

$$2dn = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

d.h. wenn die Dicke der Schicht ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist.  $m = 0$  entspricht einer Schicht verschwindender Dicke; in diesem Fall tritt keine Reflexion auf.

Verstärkte Reflexion durch konstruktive Interferenz erhält man, wenn die Phasendifferenz ein Vielfaches von  $2\pi$  ist, d.h. wenn

$$2dn = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

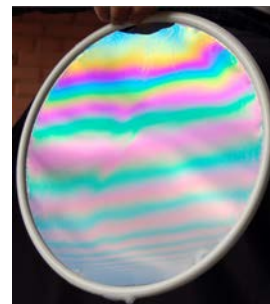


Abbildung 7.113: Interferenzfarben auf einer Seifenlamelle.

Eine solche dünne Schicht kann man z.B. sehr gut durch eine Seifenhaut darstellen, wie z.B. in Abb. 7.113. Da die Interferenzbedingung von der Wellenlänge abhängt wird sie nicht für alle Farben des Spektrums gleichzeitig erfüllt.

Außerdem ist die Dicke der Seifenhaut nicht überall gleich: Die Schwerkraft zieht die Lösung nach unten und führt deshalb zu einer Abfolge von Interferenzstreifen.

### 7.7.5 Farben dünner Filme

Interferenz kann auch Farbwirkungen erzeugen. Man findet solche Effekte z.B. bei Seifenlamellen, Ölfilmen, Aufdampfschichten, Oxidschichten, Schmetterlingen oder Vogelfedern. Die Bedingung für konstruktive Interferenz hängt von der Wellenlänge ab. Wir betrachten als Beispiel eine Lamellendicke 350 nm, Brechungsindex  $n = 1.33$ . Dann erwartet man bei folgenden Wellenlängen positive Interferenz:

$$\lambda_m = \frac{4dn}{2m+1}.$$

Die maximale Wellenlänge ist somit

$$\lambda_0 = 4dn = 1862 \text{ nm}.$$

Die weiteren Wellenlängen sind

$m$	$2m+1$	$\lambda_m/\text{nm}$
0	1	1862
1	3	621
2	5	372
3	7	266

Nur die Wellenlänge 621 nm ist sichtbar. Somit ist diese Lamelle rot. Variiert die Dicke der Schicht, wie z.B. bei einem Seifenfilm, so ändert sich die Wellenlänge, bei der Reflexion maximal wird. Dadurch werden Seifenblasen oder dünne Ölfilme farbig.

Interferenzfarben kommen auch in der Natur vor, wobei entweder die Dicke einer Schicht oder die Größe von kleinen Partikeln angepasst wird. Abb. 7.114 zeigt einige Beispiele.

### 7.7.6 Entspiegelung

Man kann die Interferenz an dünnen Schichten benutzen, um Reflexionen zu eliminieren, z.B. auf einem Brillenglas, einer Kameralinse oder der Optik in



Abbildung 7.114: Interferenzfarben auf einer Seifenblase, einem Ölfilm und bei Tieren.

einem Laser. Wir betrachten als Beispiel eine Glasoberfläche mit Brechungsindex  $n_2 = 1,5$ . Monochromatisches Licht der Wellenlänge  $\lambda_0$  soll senkrecht auf diese Oberfläche auftreffen. Normalerweise erhält man von der Oberfläche eine Reflexion von etwa 4% des Lichtes.

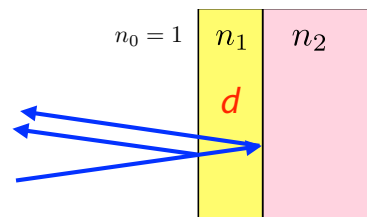


Abbildung 7.115: Reflexion an einer dünnen Schicht auf einem Substrat.

Bringt man auf diese Oberfläche eine Schicht der Dicke  $d$  mit dem Brechungsindex  $n_1$  auf, dann ergeben sich zwei Grenzflächen: eine zwischen Luft ( $n_0 = 1$ ) und  $n_1$  und die andere von  $n_1$  nach  $n_2$ . An beiden Grenzflächen wird eine Teilwelle reflektiert, wie in Abb. 7.115 gezeigt, und die beiden überlagern sich. Der Brechungsindex dieser Schicht liegt zwischen dem Brechungsindex von Glas und dem von

Luft, so dass beide Wellen einen Phasensprung erleiden. Monochromatisches Licht der Wellenlänge  $\lambda$  soll senkrecht auf diese Oberfläche auftreffen.

Die Reflektivität der ersten Grenzfläche ist, für näherungsweise senkrechten Einfall,

$$\frac{E^{(r_1)}}{E^{(i)}} = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}.$$

Als Vereinfachung kann die Abschwächung der transmittierten Welle vernachlässigt werden. Dann ist die Amplitude der zweiten reflektierten Teilwelle

$$\frac{E^{(r_2)}}{E^{(i)}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Diese Teilwelle hat dabei eine zusätzliche optische Weglänge von  $2n_1d$  und dadurch eine Phasenverzögerung um

$$\delta\varphi = 4\pi n_1 \frac{d}{\lambda_0},$$

wobei  $\lambda_0$  die Vakuum-Wellenlänge darstellt.

Diese Summe der beiden Teilwellen ist

$$E^{(r_1)} + E^{(r_2)} = E^{(i)} \left( \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} + \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} e^{i\delta\varphi} \right).$$

Entspiegelung, also Elimination der reflektierten Welle tritt dann auf, wenn destruktive Interferenz zwischen den beiden Teilwellen dazu führt, dass diese Summe verschwindet. Damit dies der Fall ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Der zweite Term muss reell und negativ sein, d.h. der Phasenfaktor  $e^{i\delta\varphi} = -1$  oder

$$\delta\varphi = \pi \rightarrow d = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

Man spricht deshalb von einer  $\lambda/4$  Beschichtung.

2. Der Betrag der beiden Terme muss gleich sein,

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (n_1 - 1)(n_2 + n_1) &= (n_1 + 1)(n_2 - n_1) \\ n_1 n_2 + n_1^2 - n_2 - n_1 &= n_1 n_2 - n_1^2 + n_2 - n_1 \\ n_1 &= \sqrt{n_2}. \end{aligned}$$

Die reflektierte Feldstärke verschwindet somit genau dann, wenn

$$n_1 = \sqrt{n_2} \quad \text{und} \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

Für Glas ( $n \approx 1,5$ ) ist somit eine Entspiegelung mit einem Material mit Brechungsindex  $n_1 \approx 1,22$  möglich. Dabei ist die Wirkung nur bei einer Wellenlänge vollständig. Wird ein breiterer Wellenlängenbereich benötigt, muss man mehrere Schichten aufbringen.

### 7.7.7 Newton'sche Ringe

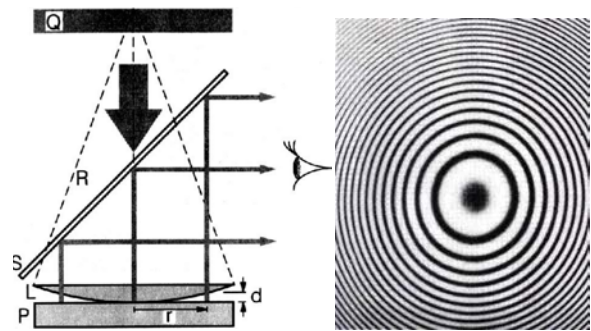


Abbildung 7.116: Newton'sche Ringe.

Eine andere Anwendung sind die Newton'schen Ringe: Sie ergeben sich durch Zweistrahlinterferenz wenn man eine Linse auf einen ebenen Spiegel legt. Wir betrachten die beiden Strahlen, welche sich durch Reflexion an der unteren Linsenfläche und der Oberfläche des Spiegels ergeben. Da die zweite Teilwelle einen bei der Reflexion einen Phasensprung macht, löschen sich die beiden Wellen aus, wenn die Weglängendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist, d.h. wenn

$$2d = m\lambda.$$

Immer wenn die Dicke des Luftspaltes um  $\lambda/2$  zunimmt, entsteht ein zusätzlicher Interferenzring. Die Dicke des Luftspaltes nimmt quadratisch mit dem Abstand  $r$  vom Zentrum der sphärischen Linse zu:

$$d = \frac{r^2}{2R}.$$



Dies kann man auflösen nach den Radien  $r_m$ , bei denen Auslöschung stattfindet:

$$r_m = \sqrt{2R \frac{m\lambda}{2}} = \sqrt{m\lambda R}.$$

Offenbar nimmt der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden dunklen Ringen ab. Dies ist in Abb. 7.116 deutlich erkennbar. Solche Muster werden z.B. zur Qualitätssicherung verwendet, da man sehr genau die Oberfläche ausmessen kann.

Interferenz kommt nur zustande, wenn die interferierenden Wellen die gleiche Polarisation aufweisen. So interferieren die beiden Teilstrahlen nicht, welche beim Durchgang von unpolarisiertem Licht durch Kalkspat entstehen. Bringt man jedoch einen Polarisator in den Strahl, so werden beide Teilstrahlen dadurch auf eine gemeinsame Polarisationssebene projiziert und können deshalb interferieren. Die resultierenden Interferenzmuster sind farbig, da die Differenz der optischen Weglängen von der Wellenlänge abhängt. Verwendet man monochromatisches Licht so sind entsprechend mehr Interferenzringe sichtbar.

### 7.7.8 Interferometer als Messinstrumente

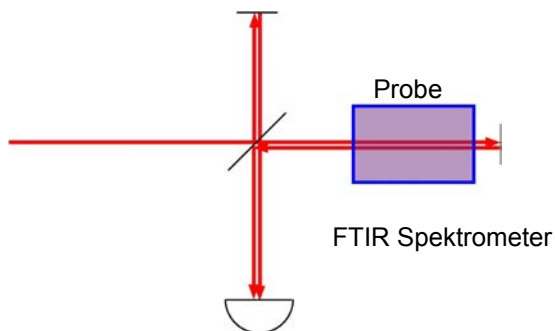


Abbildung 7.117: Michelson Interferometer als Spektrometer für das Fern-Infrarot.

Wahrscheinlich das bekannteste optische Interferometer ist der Typ des Michelson Interferometers, welches in Abb. 7.117 schematisch dargestellt ist. Dieses System wurde von Michelson und Morley zur Messung der Lichtgeschwindigkeit verwendet. Dabei wird ein Lichtstrahl an einem Strahlteiler

in zwei Teile aufgeteilt, die zwei unterschiedliche Wege durchlaufen. Nach Reflexion an einem Spiegel werden sie auf dem gleichen Strahlteiler wieder kombiniert. Haben beide Strahlen den gleichen optischen Weg zurückgelegt, so beobachtet man konstruktive Interferenz; ist der Wegunterschied gerade gleich der halben Wellenlänge, so beobachtet man destruktive Interferenz.

Verwendet man einen Strahl, der nicht vollständig einer ebenen Welle entspricht, so erscheinen auf dem Schirm Ringe, die mit den Newton'schen Ringen vergleichbar sind. Man kann sich aber auf das Zentrum des Ringsystems konzentrieren. Bei diesem Interferometer kann die Länge des einen Arms durchgefahen werden. Führt man mit einem Motor einen der Arme durch, wo sieht man die Ringe über den Schirm wandern.

Michelson Interferometer haben unterschiedlichste Verwendungen. Bei einem Weglängenunterschied von  $d = 0$  ist die Interferenz für alle Wellenlängen positiv, resp. negativ. Bei einer endlichen Weglängendifferenz kann positive Interferenz für bestimmte Wellenlängen auftreten, negative für andere. Man kann Michelson Interferometer deshalb für die Analyse von Lichtwellenlängen verwenden. So enthalten die sog. FTIR (=Fourier Transform Infrarot) Spektrometer ein Michelson Interferometer, in dessen einem Arm die zu untersuchende Probe steht. Andere Anwendungen verwenden diese Interferometer um Weglängen oder Brechungsindizes zu bestimmen.



Abbildung 7.118: Gravitationswellen-Interferometer GEO600.

Abb. 7.118 zeigt einige Bilder vom GEO600 Gravi-

tationswellen Interferometer, welches eine Armlänge von 600 m aufweist. Die größten Geräte dieses Typs weisen eine Armlänge von mehreren km auf und werden für den Nachweis von Gravitationswellen verwendet. Solche Geräte existieren in mehreren Ländern und können relative Längenänderungen von weniger als  $10^{-20}$  nachweisen. Das bedeutet auf die Armlänge von etwa 3 km bezogen eine Längenänderung um weniger als 1 Prozent eines Atomkerndurchmessers. Damit wurden seit September 2015 mehrere Male Gravitationswellen nachgewiesen.

### 7.7.9 Vielstrahlinterferenz

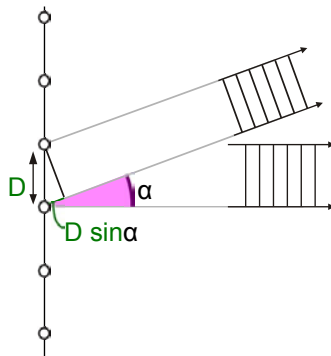


Abbildung 7.119: Interferenz von  $n$  Quellen.

In vielen Fällen interferieren mehr als zwei Wellen. Als ein einfaches Beispiel dafür betrachten wir  $n$  gleiche Quellen, die sich auf einer Geraden befinden. Sie sollen die gleiche Frequenz haben. Wir betrachten das resultierende Intensitätsmuster in einer Richtung, die durch den Winkel  $\alpha$  gegenüber der Normalen gegeben sei. Die Weglängendifferenz in diese Richtung zwischen den Beiträgen zweier benachbarter Quellen beträgt (siehe Abb. 7.119)

$$\Delta = D \sin \alpha.$$

Sind alle Quellen in Phase, so führt diese Weglängendifferenz beim Beobachter zu einer Phasendifferenz zwischen den Beiträgen benachbarter Quellen von

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi \frac{D \sin \alpha}{\lambda}.$$

Je nach Richtung  $\alpha$  können die Phasendifferenzen zu konstruktiver oder destruktiver Interferenz führen.

Wir suchen nun die Bedingung dafür, dass die verschiedenen Beiträge konstruktiv interferieren, dass also  $\delta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist:

$$\delta = 2\pi D \frac{\sin \alpha}{\lambda} = 2\pi m,$$

d.h. wenn

$$D \sin \alpha = m\lambda$$

oder

$$\sin \alpha = m \frac{\lambda}{D}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

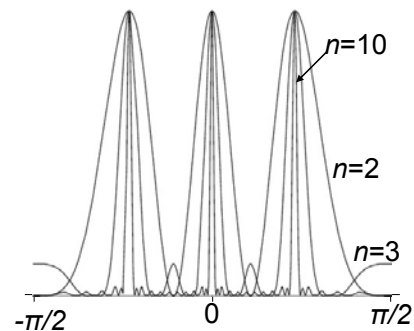


Abbildung 7.120: Interferenzmuster von  $n$  Quellen.

In diese Richtungen erhalten wir eine maximale positive Interferenz, d.h. maximale Intensität. Falls  $\lambda < D$  existieren mehrere Lösungen.

Für den Fall von  $n = 2$  Quellen variiert die Intensität zwischen den beiden Maxima cosinus-förmig. Für  $n$  Quellen addieren sich  $n$  Cosinus-Funktionen zur Amplitude

$$A(\sin \alpha) = \sum_{k=1, n} a_k \cos(k\delta).$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist das Resultat proportional zu  $n$ , wenn die obige Bedingung für konstruktive Interferenz erfüllt ist. Das Resultat stellt eine Fourier-Reihe dar, deren Koeffizienten  $a_k$  durch die Amplituden der einzelnen Quellen gegeben sind. Wir betrachten hier zunächst identische

Amplituden,  $a_k = a_0$ . Zwischen den Interferenzmaxima nähert sich die Kurve der Nulllinie. Da die Interferenz nur in eine Richtung (resp. eine diskrete Zahl von Richtungen) konstruktiv ist, erreicht man auf diese Weise eine Richtungsabhängigkeit der abgestrahlten Welle. Je größer die Anzahl der beteiligten Wellen, desto stärker die Richtungsabhängigkeit. In Abb. 7.120 sind die Intensitäten als Funktion des Winkels  $\alpha$  für eine Zahl von  $n = 2, 3, 10$  Quellen dargestellt.

Die Richtung, in die konstruktive Interferenz auftritt, ist durch die obige Bedingung, aber auch durch die Phase der Quellen bestimmt. Indem man die Phase der einzelnen Quellen verschiebt, kann man die Richtung des Interferenzmaximums steuern. Wird zwischen benachbarten Quellen eine Phasendifferenz von  $\phi$  geschaltet, so verschiebt sich die Interferenzbedingung zu

$$D \sin \alpha - \phi = m\lambda.$$

Damit kann man die Abstrahlrichtung verschieben.

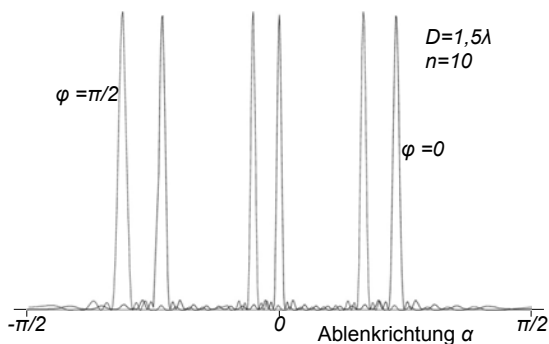


Abbildung 7.121: Effekt von unterschiedlichen Phasen der Quellen.

Im Beispiel von Abb. 7.121 wurde die Phasendifferenz  $\phi = \pi/2$  gewählt. Dadurch verschiebt sich die Lage der Interferenzmaxima um  $(\pi/2)/2\pi = 1/4$  des Abstandes der Maxima.

Diese Möglichkeit wird z.B. beim Radar verwendet. Man kann Radarstrahlen in bestimmte Richtungen abstrahlen, die durch die relative Phase zwischen einer großen Zahl von kleinen Antennen festgelegt sind. Diese Art von Radaranlagen wird als "Phased Array Radar" bezeichnet und vor allem im militärischen Bereich verwendet. Abb. zeigt eine typische Antenne.

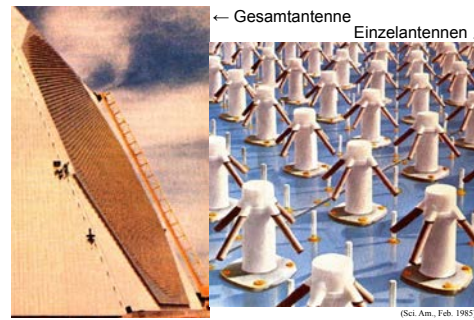


Abbildung 7.122: Phased-Array Radar Antenne.

### 7.7.10 Kohärenz

Wir haben bisher angenommen, dass die verschiedenen Lichtquellen eine konstante Phasendifferenz (die gleich null sein kann) besitzen. Dies ist nicht immer der Fall. Wenn man in einem Zimmer mehrere Lichtquellen einschaltet, wird es überall heller – offenbar gibt es keine Interferenz. Der Grund ist dass Wellen (z.B. Licht) nur dann Interferenzmuster bilden können wenn sie eine definierte Phasenbeziehung zueinander aufweisen.

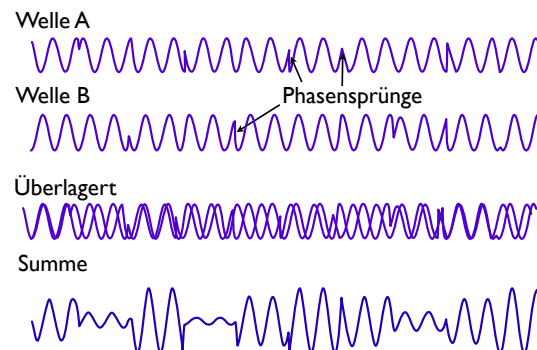


Abbildung 7.123: Kohärenzlänge eines Wellenzuges.

Die Phase einer optischen Lichtquelle kann zeitlich und räumlich variieren, wie in Abb. 7.123 gezeigt. Man quantifiziert die Phasenkonstanz sowohl bezüglich ihres räumlichen, wie auch ihres zeitlichen Verhaltens und bezeichnet diese als Kohärenz. Eine zeitlich kohärente Lichtquelle ist per Definitionem monochromatisch. Diese Bedingung wird für keine Lichtquelle absolut erfüllt.

Abb. 7.124 zeigt zwei etwas unterschiedliche Aspek-

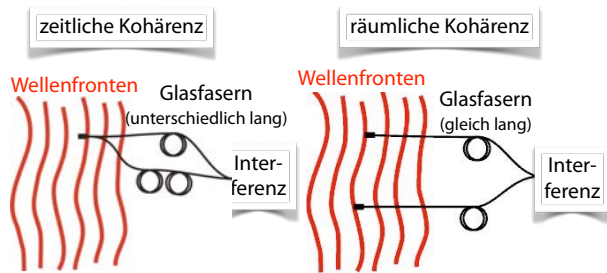


Abbildung 7.124: Zeitliche vs. räumliche Kohärenz.

te der Kohärenz. Für die zeitliche Kohärenz ist die Korrelationsfunktion  $c_t(\tau)$  durch das Produkt der Feldamplituden an einem bestimmten Ort zu unterschiedlichen Zeiten gemessen:

$$c_t(\tau) = \langle E(\vec{r}, t) E^*(\vec{r}, t + \tau) \rangle.$$

Bei räumlicher Kohärenz wird die Feldamplitude an zwei unterschiedlichen Orten verglichen:

$$c_r(\vec{\rho}) = \langle E(\vec{r}, t) E^*(\vec{r} + \vec{\rho}, t) \rangle.$$

Die Kohärenzlänge bezeichnet diejenige Distanz, über welche die Kohärenz  $c_r(\vec{\rho})$  auf  $c_r(0)/e$  abfällt. Entsprechend bezeichnet die Kohärenzzeit die Zeit, bei der  $c_t(\tau)$  auf  $1/e$  des Maximalwerts abgefallen ist.

Licht	Bandbreite	Kohärenz- länge
“weisses Licht”	200 THz	1.5 $\mu\text{m}$
Spektrallampe	1.5 GHz	20 cm
Halbleiterlaser	10 MHz	30 m
HeNe Laser, stab.	150 kHz	2 km
stab. Laser	1 Hz	300000 km

Tabelle 7.2: Bandbreite und Kohärenzlänge von einigen typischen Lichtquellen.

Diese Größen variieren über einen weiten Bereich. Tabelle 7.2 vergleicht sie für einige typische Lichtquellen. Die Bandbreite entspricht der inversen Kohärenzzeit. Eine thermische Lichtquelle hat ein breites Frequenzspektrum. Die Frequenz und damit die Phase sind nicht exakt definiert, resp. sie variieren rasch. Thermische Lichtquellen haben deshalb vollständig zufällige Phasen. Einzelne Atome besitzen ein scharfes Linienpektrum und somit relativ

gut definierte Frequenz. Die Phase ist jedoch immer noch zufällig, da der Zeitpunkt, zu dem das Atom sein Photon aussendet, durch den Zufall bestimmt wird. Im Gegensatz dazu weist ein Laser über eine gewisse Zeit eine konstante Phase auf. Für einen kommerziellen Laser liegt diese Zeit bei etwa einer  $\mu\text{s}$ , bei einem hochgezuchteten Forschungsgerät kann sie bis auf etwa eine Sekunde verlängert werden. Man kann solche Kohärenzzeiten praktisch nur messen, indem man die Phasen von zwei unabhängigen Lasersystemen vergleicht.

Auch mit thermischen Quellen können räumlich kohärente Quellen erzeugt werden, indem man z.B. einen dünnen Spalt oder ein kleines Loch beleuchtet. Sofern die Dimensionen dieser Sekundärquellen klein sind im Vergleich zur Kohärenzlänge der Primärquelle, verbessert man damit die Kohärenzeigenschaft. Die räumliche Kohärenz bestimmt, z.B., wie gut das entsprechende Licht fokussiert werden kann. Man kann zwei (zueinander) räumlich und zeitlich kohärente Lichtstrahlen erzeugen, indem man einen Lichtstrahl an einem Strahlteiler trennt. Allerdings darf die Weglängendifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen nicht mehr als die Kohärenzlänge sein.

### 7.7.11 Anwendungen

Die Messung der räumlichen Kohärenz einer Lichtquelle erlaubt z.B. die Messung des Durchmessers von Sternen: eine punktförmige Quelle ist immer räumlich (aber nicht unbedingt zeitlich) kohärent. Ein Stern hat aber eine endliche Oberfläche, deren Teile zueinander nicht kohärent sind.

Indem man die Phase von Lichtstrahlen im Abstand von einigen Dutzend Metern misst ( $\rightarrow$  Abb. 7.125), kann man die Ausdehnung eines Sterns bestimmen. Die Bedingung hierfür ist praktisch identisch wie die Auflösungsbedingung von Abbé. Für eine Punktquelle bildet die Überlagerung der beiden Strahlwege, wie bei einem Doppelspaltexperiment, ein Interferenzmuster. Durch den endlichen Durchmesser überlagern sich mehrere solche Interferenzmuster. Je größer der Abstand zwischen den beiden Spiegeln, desto geringer die Periode des Interferenzmusters. Durch die Überlagerung von vielen solchen Interfe-

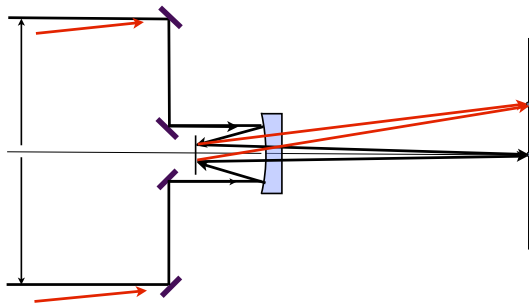


Abbildung 7.125: Messung eines Sterndurchmessers mit Hilfe eines Interferometers.

renzmustern, welche von räumlich getrennten Punkten auf dem Stern erzeugt werden, verschwindet das Interferenzmuster, wenn der Spiegelabstand und der Sterndurchmesser groß genug sind.

Das grundsätzliche Idee dafür stammt von Fizeau, ein genauer Vorschlag von Michelson. Er wurde zuerst am Mount Wilson Observatorium in den USA realisiert und dazu verwendet, den Durchmesser von Beteigeuze zu bestimmen (1920). Nach aktuellem Wissensstand beträgt er etwa 662 Sonnendurchmesser. Im Bereich der Radioastronomie verwendet man ähnliche Interferometer mit Basislinien von bis zu 10000 km.

In der Medizin verwendet man Kohärenztomographie für optische Messungen in streuendem Gewebe, z.B. in der Haut.

## 7.8 Beugung

Mit Beugung bezeichnet man die Ausbreitung von Wellen, welche nicht mehr durch die Strahlenoptik beschrieben werden kann.

### 7.8.1 Grenzen der geometrischen Optik

Die geometrische Optik ist eine gute Näherung in den Fällen, in denen die Wellenlänge des Lichts klein ist im Vergleich zu allen relevanten Distanzen. Wenn diese Näherung nicht erfüllt ist, ergeben sich zusätzliche Effekte, welche als Beugung bezeichnet werden. Ein typisches Beispiel ist der Fall, dass eine weit entfernte Quelle ein Loch in einem Schirm beleuchtet. Im Rahmen der geometrischen Optik würde man erwarten, dass sich vom Loch aus ein paralleles Lichtbündel, also ein Lichtstrahl ausbreitet. Dies ist allerdings nicht der Fall, wenn das Loch genügend klein ist, wie man z.B. anhand eines Experimentes mit einer Wellenwanne nachweisen kann.

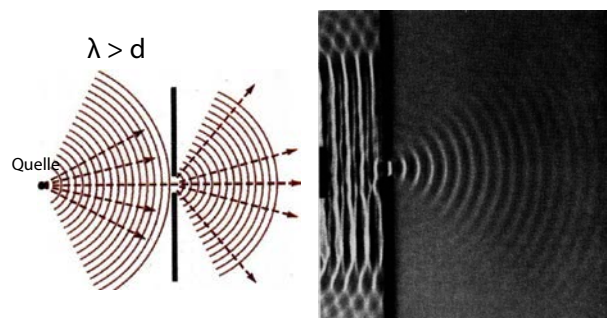


Abbildung 7.126: Beugung am Spalt.

Das Experiment zeigt, dass diese Näherung durchaus sinnvoll ist, wenn das Loch groß genug ist. Wenn das Loch kleiner ist als die Wellenlänge ( $\rightarrow$  Abb. 7.126), so wirkt es als eine punktförmige Quelle einer Kugelwelle. Diese erzeugt eine praktisch isotrope Intensitätsverteilung. Im Zwischenbereich, wo die Dimension des Spaltes vergleichbar wird mit der Wellenlänge, findet man auf einem Schirm rechts des Spalts nicht nur einen einzelnen Fleck, sondern zusätzlich konzentrische Ringe.

Dieses Phänomen tritt bei optischen Wellen genau so auf wie bei Wasserwellen. Allerdings sind sie aufgrund der geringen Wellenlänge nicht so leicht beobachtbar. Die ersten Beugungseffekte wurden von Francesco Grimaldi 1660 berichtet, aber kaum beachtet. Klare Belege kamen 1801 von Thomas Young (1773-1829), doch auch diese wurden nicht allgemein anerkannt. Erst Augustin Fresnel (1788-1827) konnte der Wellentheorie wirklich zum



Durchbruch verhelfen.

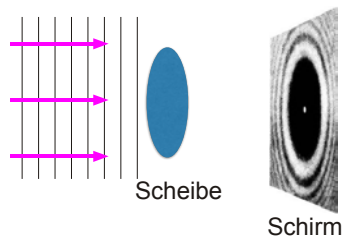


Abbildung 7.127: Poisson's Vorhersage für Beugung an einer Scheibe.

Eine wichtige Rolle bei dieser Kontroverse spielte die Beugung an einer undurchsichtigen runden Scheibe. Der Mathematiker und Physiker Denis Poisson wendete die Fresnel'sche Wellentheorie auf diese Scheibe an und zeigte, dass man dann in der Mitte des Schattens einen hellen Fleck erwarten würde – eine Konsequenz, die er als klaren Beweis dafür ansah, dass die Theorie falsch sein müsse. Abb. 7.127 zeigt schematisch, wie dieser zustande kommt. Fresnel konnte aber kurze Zeit später experimentell diesen Punkt zeigen, der seither als Poisson'scher Fleck bekannt ist.

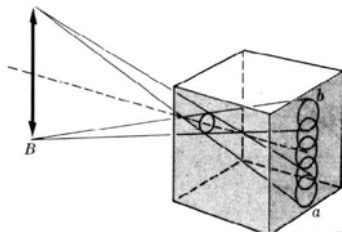


Abbildung 7.128: Camera Obscura.

Beugungseffekte müssen u. A. berücksichtigt werden, wenn es um die optimale Abbildungsschärfe einer Kamera geht. Bei einer "Camera obscura", welche keine Linse hat, führt eine Verkleinerung der Öffnung zu einer besseren Schärfe der Abbildung, wie in Abb. 7.128 gezeigt. Das gleiche gilt bei Kameras mit Linsen eingeschränkt, weil bei kleinerer Blendenöffnung die Linsenfehler geringer werden.

Beugungseffekte erzeugen bei kleinen Öffnungen jedoch Abweichungen, welche wieder zu einer Verschlechterung der Abbildung führen.

Auch Licht, das ein ausgedehntes Objekt trifft, er-

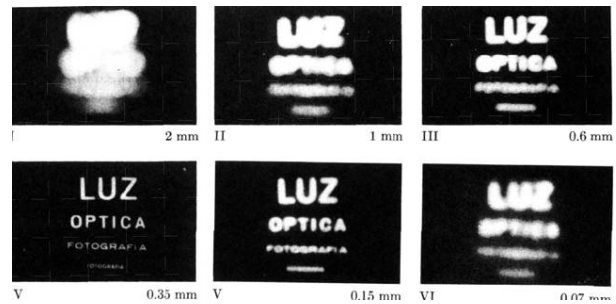


Abbildung 7.129: Bild in einer Camera Obscura für unterschiedliche Blenden.

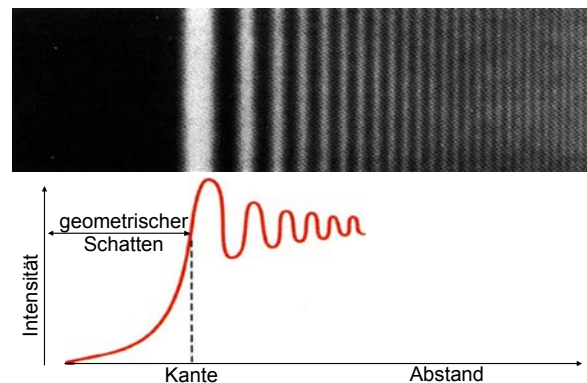


Abbildung 7.130: Beugungsmuster an einer Kante.

zeugt keinen exakt geradlinigen Schatten. Jede Kante erzeugt ein Beugungsmuster wie in Abb. 7.130 gezeigt. Allerdings ist dieses nur für monochromatisches Licht gut sichtbar. Der Abstand zwischen den Interferenzmaxima hängt von der Wellenlänge ab. Verwendet man weißes Licht, so verwischen sich deshalb die verschiedenen Interferenzmuster, resp. manifestieren sich als regenbogenfarbiger Rand.

## 7.8.2 Beugung am Spalt

Wir betrachten zunächst das Beugungsmuster das durch einen eindimensionalen Spalt erzeugt wird. Wir betrachten dabei nur den Fall eines weit entfernten Schirms. Dabei spricht man von Fraunhofer-Beugung. Ein typisches Beugungsmuster enthält neben dem direkten Bild des Spalts auch helle Streifen parallel dazu.

Dass neben dem zentralen Maximum weiteres Licht den Schirm erreicht, kann leicht an einem sehr

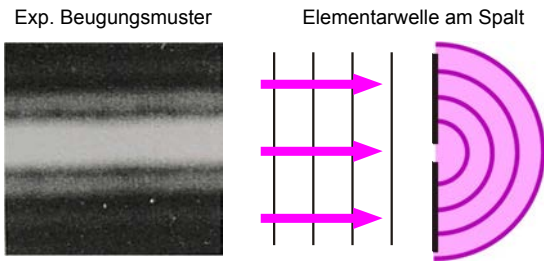


Abbildung 7.131: Beugung an einem Spalt.

schmalen Spalt eingesehen werden: Ist der Spalt schmäler als die Lichtwellenlänge, so wirkt er als Quelle einer zylinderförmigen Welle, welche den rechten Halbraum ausleuchtet, wie in Abb. 7.131 gezeigt.

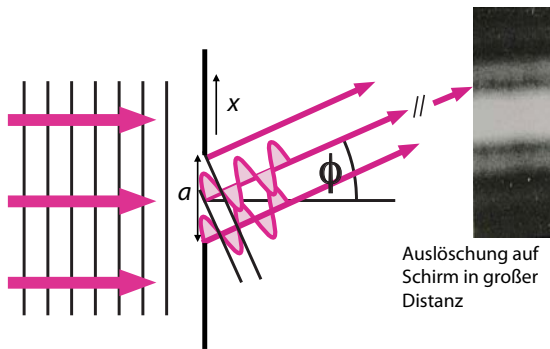


Abbildung 7.132: Beugung an einem Spalt.

Dass neben den hellen Streifen auch dunkle auftreten, erkennt man, wenn man einen Spalt betrachtet, der etwas breiter ist als die Lichtwellenlänge. Für die in Abb. 7.132 eingezeichnete Richtung  $\varphi$  hat die Welle, die aus dem Zentrum des Spalts stammt, gegenüber der Welle vom unteren Rand einen Weg, der um  $a \sin \varphi$  länger ist. Für

$$a \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}$$

sind die beiden Teilwellen um  $\pi$  außer Phase. Somit wird jeder Beitrag der unteren Hälfte durch einen Beitrag der oberen Hälfte exakt aufgehoben und auf dem Schirm erscheint ein dunkler Streifen.

Gemäß dem Prinzip von Huygens können wir die Feldamplitude in Richtung  $\varphi$  als Integral über Kugelwellen ausrechnen, die entlang dem Spalt angeordnet sind. Im Fernfeld ist der Term  $1/r$  für alle

Beiträge praktisch gleich groß und kann vernachlässigt werden. Bei der Phase  $e^{ikr} = e^{i2\pi r/\lambda}$  muss nur die Differenz der Weglängen berücksichtigt werden. Diese beträgt laut Abb. 7.132  $x \sin \varphi$ , mit  $x$  der Position im Spalt an dem die Elementarwelle ihren Ursprung hat und  $\varphi$  der Richtung zum Punkt  $P$ . Die resultierende Phasenverschiebung ist damit

$$\Delta\alpha = x \sin \varphi \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Die gesamte Amplitude an einem Punkt in der Richtung  $\varphi$  erhalten wir als Integral über die Beiträge über den gesamten Spalt:

$$\begin{aligned} E(\sin \varphi) &= E_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{i2\pi x \sin \varphi / \lambda} \\ &= E_0 \left. \frac{e^{i2\pi x \sin \varphi / \lambda}}{i2\pi \sin \varphi / \lambda} \right|_{-a/2}^{a/2} \\ &= E_0 \frac{\sin(\pi a \sin \varphi / \lambda)}{\pi \sin \varphi / \lambda} = E_0 a \frac{\sin \beta}{\beta} \end{aligned}$$

mit

$$\beta = \pi a \frac{\sin \varphi}{\lambda}.$$

Wir finden somit, dass das Beugungsmuster als Funktion von  $\sin \varphi$  gerade als die Fouriertransformierte des Spaltes gegeben ist. Im Falle eines einfachen Spaltes ist dies die sinc-Funktion.

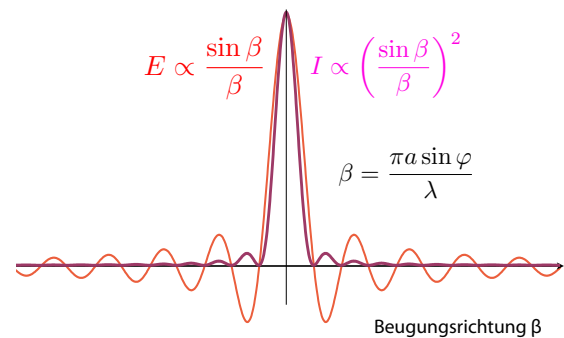


Abbildung 7.133: Winkelabhängigkeit von Feldstärke und Intensität bei Beugung an einem Spalt.

Die Intensität ist wie immer proportional zum Quadrat des Feldes, also zum Quadrat der sinc-Funktion,

$$I \propto \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2,$$

wie in Abb. 7.133 gezeigt. Es bilden sich eine Reihe von Beugungsmaxima, deren Abstände durch

$$\delta\beta = \pi \quad \sin \varphi = m \frac{\lambda}{a}, \quad m = 0, 1, \dots$$

gegeben sind. Je schmaler der Spalt, desto größer wird damit der Abstand zwischen den Beugungsmaxima.

In einem experimentellen Beispiel ist der Spalt 0.1 mm breit. Verwendet man mit Licht der Wellenlänge 630 nm, findet man die Maxima in einem Abstand von

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{630 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} = 6,3 \text{ mrad}.$$

Bei einer Distanz von 5 m entspricht dies etwa 3 cm.

### 7.8.3 Beugung am Doppelspalt

Man kann beliebige andere Beugungsmuster ausrechnen, indem man die Fourier-Transformierte bildet. Ein historisch besonders wichtiges Experiment war die Beugung am Doppelspalt von Young; zusammen mit den Arbeiten von Fresnel verhalf dieses Experiment der Wellentheorie des Lichtes zum Durchbruch. Die beiden Spalte erzeugen jeder ein Beugungsmuster, gleich wie im Falle des einzelnen Spaltes. Zwischen den beiden Wellen erhalten wir jetzt aber zusätzlich Interferenz.

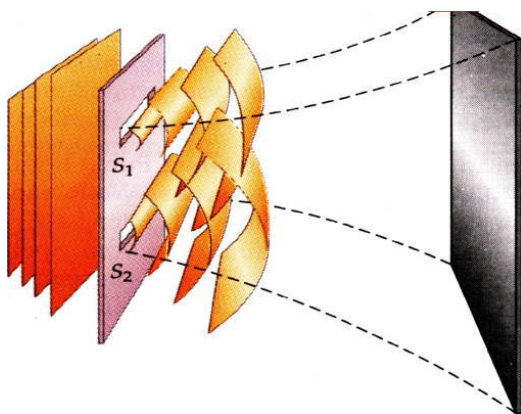


Abbildung 7.134: Beugung am Doppelspalt.

Man kann sich den Vorgang anhand von Wellenfronten darstellen, wie in Abb. 7.134 gezeigt. Bei jedem

Spalt erhalten wir eine zylinderförmige Wellenfront. Die beiden Teilwellen sind zueinander kohärent und interferieren deshalb wenn sie sich überlagern.

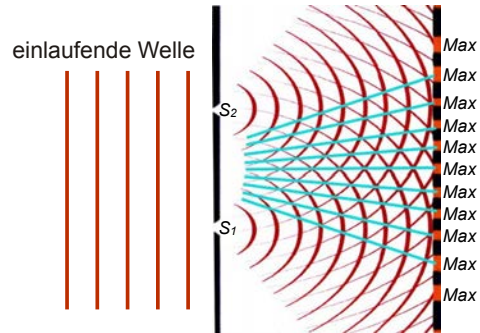


Abbildung 7.135: Überlagerung von Wellenfronten am Doppelspalt.

Der einzelne Spalt erzeugt auf dem Schirm eine sinc-Funktion, wobei der Abstand zwischen den Maxima invers proportional zur Breite des Spaltes ist. Zusätzlich erhält man immer dann positive Interferenz, wenn die beiden Teilwellen gleiche Phase besitzen, d.h. wenn sich ihre Weglänge um ein Vielfaches der optischen Wellenlänge unterscheidet. Abb. 7.135 zeigt diese Maxima auf einem Schirm.

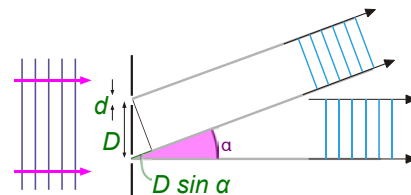


Abbildung 7.136: Weglängendifferenzen am Doppelspalt.

Abb. 7.136 zeigt den Fall, dass der Schirm, auf dem das Interferenzmuster abgebildet wird, sich in einem Abstand vom Doppelspalt befindet, der groß ist im Vergleich zum Abstand  $D$  der beiden Spalte. Die Weglängendifferenz zwischen zwei Strahlen, die von den beiden Spalten ausgehen, beträgt dann  $D \sin \varphi$ . Somit ist der Phasenunterschied

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \varphi.$$

Die Bedingung für das Auftreten eines Maximums ist, dass dieses ein Vielfaches von  $2\pi$  ist, d.h.

$$\frac{D}{\lambda} \sin \varphi = m \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Minima treten auf, wenn der Phasenunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist, d.h. bei

$$\frac{D}{\lambda} \sin \varphi = \frac{2m+1}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Die Intensität für einen beliebigen Winkel ergibt sich aus dem Quadrat der Summe der beiden Amplituden als proportional zu

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha &= 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} D \sin \varphi \right) \\ &= 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} D \sin \varphi \right) \\ &= 2 \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

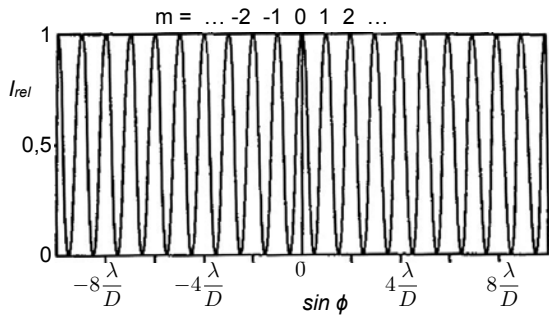


Abbildung 7.137: Intensitätsmodulation auf Grund der Weglängendifferenz.

Durch die Interferenz zwischen den beiden Teilstrahlen erhält man somit eine Cosinus-förmige Abhängigkeit der Intensität von  $\sin \varphi$ . (Für kleine Winkel somit auch vom Beugungswinkel  $\varphi$ .) In Abb. 7.137 ist jedes Maximum mit der entsprechenden Ordnung  $m$  markiert.

Abb. 7.138 zeigt die gesamte Intensitätsabhängigkeit als Funktion des Beugungswinkels. Man erhält sie, indem man die Teilwellen addiert. Da die Beugungsmuster der einzelnen Spalten als Funktion des Beugungswinkels  $\varphi$  schwächer werden, wird auch das Interferenzmuster schwächer. Das gesamte Interferenz-Beugungsbild erhält man durch Multiplikation der Funktion des Einzelspalts mit der Doppelspaltfunktion für  $d \ll D$ :

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \left[ \frac{\sin \xi}{\xi} \cos \frac{\alpha}{2} \right]^2 \quad \xi = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \\ \alpha &= \frac{2\pi D}{\lambda} \sin \varphi. \end{aligned}$$

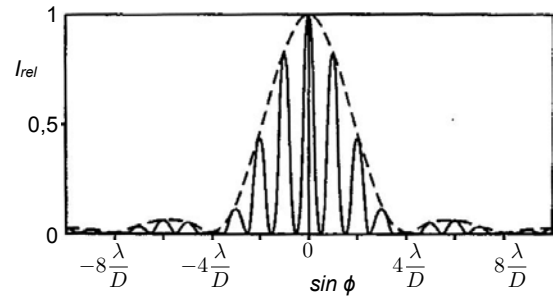


Abbildung 7.138: Intensitätsmodulation hinter einem Doppelspalt unter Berücksichtigung der endlichen Spaltbreite.

Die Einhüllende entspricht einer sinc-Funktion, die harmonische Abhängigkeit besitzt die Periode  $\lambda/D$ .

Dieses Zusammensetzen des gesamten Beugungsmusters aus dem Beugungsmuster des Einzelspalts und dem Beugungsmuster von zwei dünnen Spalten kann aus dem Faltungstheorem hergeleitet werden: Die gesamte Spaltfunktion erhält man als Faltung der einzelnen Spaltfunktion mit der Funktion für zwei schmale Spalten. Das Beugungsbild ist jeweils die Fouriertransformierte dieser Funktionen. Gemäß dem Faltungstheorem ist die Fouriertransformierte einer Faltung von 2 Funktionen durch das Produkt der Fouriertransformierten gegeben.

#### 7.8.4 Komplementäre Objekte

Beugung basiert immer auf Änderungen der Transmissionsfunktion, also der Amplitude im Objektbereich. Sie bildet die räumlichen Frequenzen ab.

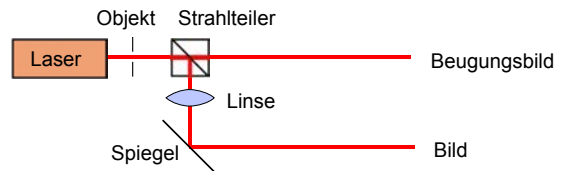


Abbildung 7.139: Erzeugung eines Bildes und eines Beugungsbildes.

Der Vergleich zwischen einem Objekt und dem entsprechenden Beugungsbild kann experimentell erfolgen, indem man mit einem Laser das Objekt (z.B.

einen Spalt) beleuchtet. Das transmittierte Licht erzeugt auf der Wand ein Beugungsmuster. Wie i Abb. 7.139 gezeigt, kann außerdem ein Teil des Lichtes mit Hilfe eines Strahlteilers abgetrennt werden. Daraus kann eine Linse ein Bild des Objektes an der Wand erzeugen. Wie bereits diskutiert entspricht das Beugungsbild einer sinc-Funktion und damit der Fourier-Transformierten der Transferfunktion.

Anstelle des Spalts kann man einen Draht betrachten, das komplementäre Objekt zum Spalt. Komplementäre Objekte sind solche, deren Transferfunktionen sich zu 1 addieren. Beispiele dazu sind das Beugungsbild eines Drahtes und eines Spaltes. Ist die Transferfunktion des Spaltes  $h(x)$ , so ist offenbar diejenige des Drahtes  $1 - h(x)$ . Das Beugungsmuster kann in diesem Fall ebenfalls durch eine sinc-Funktion beschrieben werden. Dies ist ein allgemeines Muster: Beugung basiert immer auf Änderungen der Transmissionsfunktion, also der Amplitude im Objektbereich. Sie kann als Fouriertransformation beschrieben werden, bildet also die räumlichen Frequenzen ab.

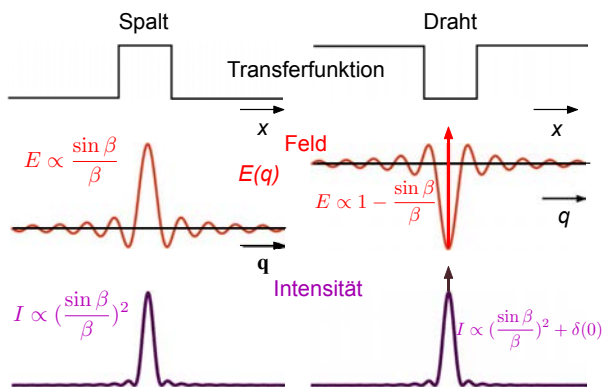


Abbildung 7.140: Beugungsbilder von komplementären Objekten.

Dies hat eine relativ interessante und einfache Konsequenz: Beugungsbilder von komplementären Objekten sind identisch, abgesehen vom geometrischen Bildpunkt - dieser entspricht der Komponente mit räumlicher Frequenz 0. Die Fourier-transformierten sind damit  $H(q)$  und

$$\mathcal{F}\{1 - h(x)\} = \delta(0) - H(q)$$

und die Intensitäten für beide  $H^2(q)$ , abgesehen vom Bildpunkt  $\delta(0)$ . Abb. 7.140 zeigt als Beispiel das

Paar Draht / Spalt, wo  $H(q) = \sin q/q$ . Weitere Beispiele dazu in 2 Dimensionen sind die Bilder von einem Loch vs. die Bilder einer Scheibe. Diese allgemeine Aussage wird als Babinet'sches Prinzip bezeichnet.

### 7.8.5 Das optische Gitter

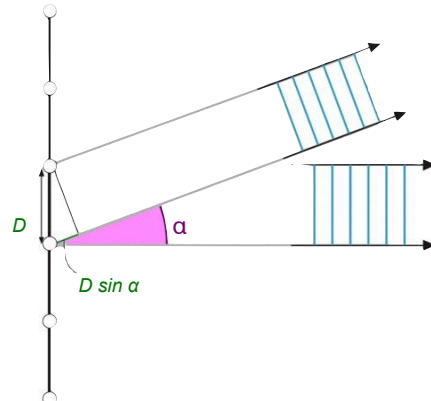


Abbildung 7.141: Signal von  $N$  Quellen.

Man kann die Anzahl von Spalten natürlich auch größer als 2 wählen. Dies entspricht dem Fall von  $N$  interferierenden Quellen. Abb. 7.141 zeigt dies für den Fall dass die einzelnen Spalte unendlich dünn sind, welcher dem bereits behandelten Fall von  $N$  interferierenden punktförmigen Quellen entspricht. Man bezeichnet eine solche periodische Anordnung als Gitter. Je nach Art der Beleuchtung unterscheidet man zwischen Transmissionsgitter und Reflexionsgitter.

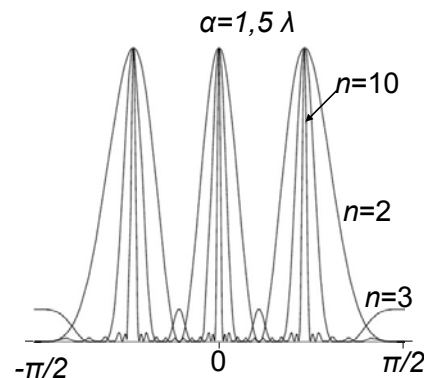


Abbildung 7.142: Beugungsmuster von  $N$  Quellen.



Anstelle der harmonischen Funktion erhält man bei  $N$  Spalten ein Beugungsmuster, welches zunehmend schärfer wird. Abb. 7.142 zeigt die Muster für verschiedene Anzahl von Quellen. Die Details dieser Rechnung hatten wir im Rahmen der Vielstrahlinterferenz diskutiert. Die Beugung am Gitter ist somit auch eine Anwendung der Vielstrahlinterferenz.

Bei einem Gitter wird jeder Strich wiederum zu einer Lichtquelle. Für identische Striche und homogene Beleuchtung werden die Quellen gleich stark. Die Richtung, in der die Maxima auftreten, ist die gleiche wie beim Doppelspalt:

$$D \sin \varphi = m \lambda. \quad (7.4)$$

Im Grenzfall einer unendlichen Zahl von Spalten, resp. Strichen werden die einzelnen Beugungsmaxima unendlich schmal. Die Einhüllende wird wiederum durch das Beugungsmuster des einzelnen Spalts bestimmt. Für schmale Spalten ist das Beugungsmuster sehr breit; somit sind sämtliche Beugungsmaxima gleich intensiv. Der (Sinus des) Beugungswinkel ist gemäß (7.4) proportional zur Wellenlänge, d.h. große Wellenlängen werden stärker gebeugt. Er ist indirekt proportional zum Abstand der Gitterlinien; somit erzeugen enge Gitter einen stärkeren Beugungseffekt.

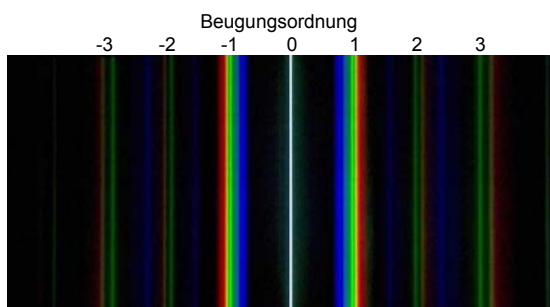


Abbildung 7.143: Spektrum einer Quecksilber-Dampflampe.

Für  $m = 0$  ist der Beugungswinkel  $\varphi = 0$  für alle Wellenlängen. In diesem Fall ergibt weißes Licht, das durch das Gitter gebeugt wird, wiederum weißes Licht. Für  $m \neq 0$  werden unterschiedliche Wellenlängen unterschiedlich stark gebeugt. Man kann deshalb Gitter verwenden um unterschiedliche Farben zu trennen. Je kleiner der Abstand zwischen den

Linien des Gitters, desto stärker werden die Wellenlängen aufgetrennt. Abb. 7.143 zeigt als Beispiel das Spektrum einer Quecksilber-Dampflampe.



Abbildung 7.144: Farbeffekte durch Beugung an einer CD.

Diesen Effekt kann man z.B. auch an einer CD beobachten: die kleinen Strukturen, welche die Information der CD tragen, beugen Licht und erzeugen dadurch Farbeffekte, wie in Abb. 7.144 gezeigt.

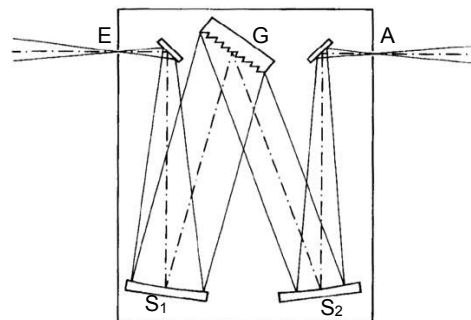


Abbildung 7.145: Schematische Darstellung eines Gitter-Spektrometers.

Man verwendet deshalb Reflexionsgitter in Spektrometern, welche dazu dienen, unterschiedliche Farben von Licht aufzutrennen. Abb. 7.145 zeigt ein solches Spektrometer. Es enthält zunächst einen Hohlspiegel  $S_1$ , welcher das einfallende Licht kollimiert und auf das Gitter lenkt. Der zweite Hohlspiegel bildet das gebeugte Licht auf den Austrittspalt ab.

### 7.8.6 Beugung an zweidimensionalen Objekten

Die bisher behandelten Objekte (Spalt, Doppelspalt etc.) wurden eindimensional diskutiert. In Wirklichkeit sind Blenden natürlich zweidimensionale Ob-

jekte und es soll deshalb anhand einiger Beispiele erläutert werden wie deren Beugungsmuster aussehen.

Mit Hilfe des Huygens'schen Prinzips können wir die Amplitude des Feldes beim Punkt  $P$  berechnen als Integral über Kugelwellen. Dieses Vorgehen kann man so motivieren: Wir kennen die Lösung für punktförmige Quellen und berechnen die Lösung für beliebige Quellen, indem wir über die Verteilung von punktförmigen Quellen integrieren. Wir vernachlässigen dabei allerdings den Teil der Kugelwelle, die nach hinten abgestrahlt wird. Das Feld am Punkt  $P$  erhalten wir, indem wir über alle möglichen Lichtwege integrieren, also über die Fläche der Blende. Die Beleuchtung soll durch eine ebene Welle erfolgen, die senkrecht auf die Blende einfällt.

Damit kann man z.B. das Beugungsbild einer Blende berechnen, welche durch eine ebene Welle beleuchtet wird. Die Amplitude des Feldes bei einem Punkt  $P$  auf dem Schirm ist das Integral über Kugelwellen, welche von Punkten einer Wellenfront ausgehen. Bei diesem Vorgehen wird meist der Vektorcharakter des elektromagnetischen Feldes vernachlässigt und das Licht als eine skalare Welle beschrieben. Für die Ausbreitung von der Blende zum Schirm geht man von einer geradlinigen Ausbreitung aus. Dann ist das Feld  $A$  am Punkt  $P$ , welcher weit von der Blende entfernt ist,

$$A(P) = \iint_{\text{Blende}} A(x,y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy. \quad (7.5)$$

Dabei bezeichnet  $e^{ikr}$  eine Kugelwelle, und  $x$  die Position in der Blende.

Als konkretes Beispiel berechnen wir das Beugungsbild einer rechteckigen Blende mit Seiten  $a$  und  $b$ . Das Beugungsmuster ist somit wiederum die Fourier-Transformierte des Spaltes, diesmal in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= \iint e^{ik\sin\alpha x} e^{ik\sin\beta y} dx dy \\ &\propto \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin\beta}{\beta} \end{aligned}$$

und die Intensitätsverteilung ist entsprechend das Quadrat  $I \propto |A(\alpha, \beta)|^2$ . Hier sind  $\alpha$  und  $\beta$  Funktio-

nen der Beugungswinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ :

$$\alpha = \frac{\pi a \sin \varphi_1}{\lambda} \quad \beta = \frac{\pi b \sin \varphi_2}{\lambda}.$$

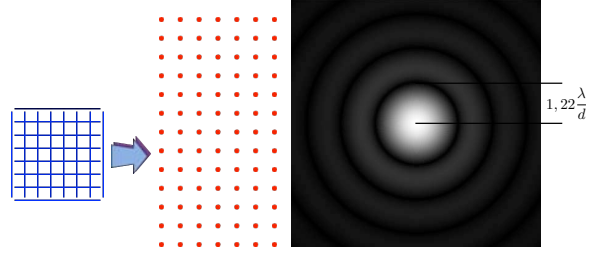


Abbildung 7.146: Beugung an einem Kreuzgitter und an einem kreisförmigen Loch.

Das zweidimensionale Analogon zur Beugung an einem Gitter ist die Beugung an einem Drahtnetz. Hier erhält man ein zweidimensionales Muster von Beugungsmaxima, wobei die horizontale Richtung die Fouriertransformierten des Gitters in horizontaler Richtung darstellt, die vertikale Richtung die Fouriertransformierte in vertikaler Richtung. Man erhält hier zwei Bedingungen für das Auftreten eines Reflexes:

$$\begin{aligned} a(\sin\alpha - \sin\beta_0) &= m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ b(\sin\beta - \sin\beta_0) &= n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ein Gitter mit rechteckigen Maschen ergibt deshalb unterschiedliche Abstände der Beugungsmaxima in horizontaler und vertikaler Richtung.

Eine runde Blende erzeugt ein radial symmetrisches Beugungsmuster, welches in Abb. 7.146 rechts dargestellt ist. Das Muster wird als Airy Disk bezeichnet.

Wie in Abb. 7.147 gezeigt, ist die Intensitätsverteilung rotationssymmetrisch und die radiale Abhängigkeit ist durch die Besselfunktion erster Art  $J_1(r)$  gegeben:

$$A(r) = A_0 \frac{J_1(2\pi r)}{\pi r}.$$

Der Radius der einzelnen Ringe ist indirekt proportional zum Lochdurchmesser  $D$ . Der Öffnungswinkel des ersten dunklen Rings ist

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

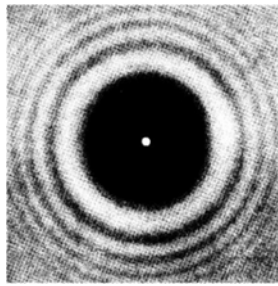


Abbildung 7.147: Beugungsmuster einer runden Scheibe.

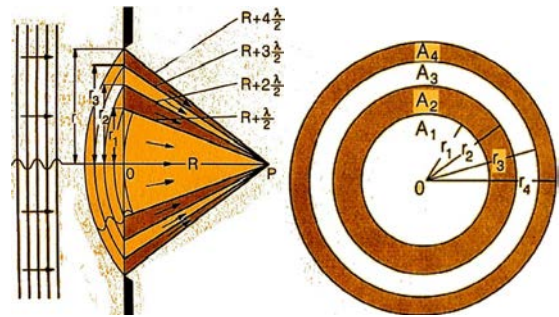


Abbildung 7.149: Fresnel'sche Zonenplatte; links: Querschnitt; rechts: Aufsicht.

### 7.8.7 Fresnel'sche Zonenplatte



Abbildung 7.148: Fresnel'sche Zonenplatte als Linse für Atome.

Die Fresnel'sche Zonenplatte verwendet Beugung an kreisförmigen Zonen, um ein Bild zu erzeugen. Sie stellt damit eine Alternative zu Linsen dar, welche u. A. dann verwendet wird, wenn keine geeigneten Materialien für Linsen verfügbar sind. Abb. 7.148 zeigt als Beispiel einen Ausschnitt aus einer solchen Zonenplatte, welche für die Fokussierung von Atomstrahlen benutzt wurde.

Zur Berechnung der Linsenwirkung kann man das Licht einer ebenen Welle, welches durch eine kreisförmige Blende tritt, gedanklich in kreisförmige Ringe unterteilen und für jeden Ring die Phase berechnen, welche dieses Licht erhält wenn es als Elementarwelle beim Punkt  $P$  eintrifft.

Diese Phase ist durch den Weg und die optische Wellenlänge bestimmt. Abb. 7.149 zeigt eine einfache Zonenplatte. Im zentralen Bereich  $A_1$ , zwischen den Radien  $0$  und  $r_1$  beträgt sie ca.  $2\pi R/\lambda$ , d.h. dieser

Teil interferiert positiv. Der Bereich  $A_2$ , zwischen den Radien  $r_2$  und  $r_3$ , durchläuft einen Weg, der etwa um  $\lambda/2$  länger ist. Dieses Licht löscht deshalb den Beitrag der zentralen Scheibe teilweise aus. Man kann dies vermeiden, indem man diesen Ring nicht transparent macht. Der Bereich  $A_3$  hat eine Phase, die  $2\pi$  größer ist als der zentrale Bereich; er interferiert somit positiv. Durch Abwechseln von transparenten und undurchsichtigen Bereichen mit geeignetem Radius erhält man deshalb ein optisches Element, welches die einfallende ebene Welle in einem Bildpunkt sammelt.

### 7.8.8 Beugung an dreidimensionalen Objekten

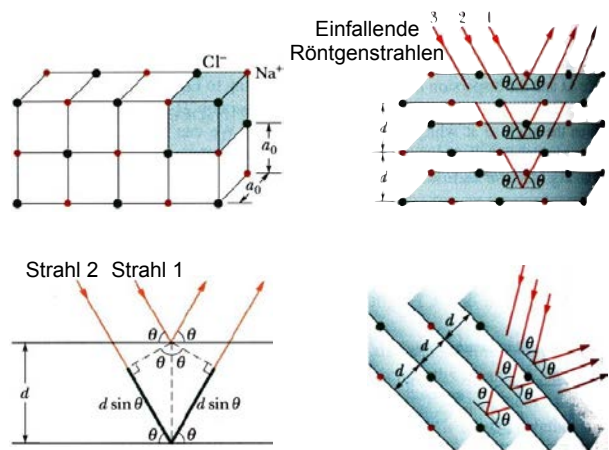


Abbildung 7.150: Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristallgitter.

Eine wichtige Erweiterung dieses Beugungsgeset-

zes erhält man in 3 Dimensionen, wenn man kürzere Wellenlängen ( $\lambda \approx 10^{-10}$  m) benutzt: diese werden von den atomaren Strukturen, deren Dimensionen von der gleichen Größenordnung sind, gebeugt. Abb. 7.150 zeigt das Prinzip für die Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristall.

Für die Analyse des Beugungsprozesses führt man am besten Netzebenen ein; dabei handelt es sich um eine Hilfskonstruktion: Netzebenen sind geometrische Ebenen, welche identische Atome enthalten und sich periodisch wiederholen. Da jedes Atom einen geringen Teil des Röntgenlichtes streut, wirken solche Netzebenen als teildurchlässige Spiegel. Positive Interferenz erhält man dann, wenn die Weglängendifferenz zwischen zwei Netzebenen gerade einem Vielfachen der Wellenlänge des Röntgenlichtes entspricht. Die Bragg'sche Beugungsbedingung ist

$$2d \sin \theta = m\lambda.$$

Hier stellt  $d$  den Abstand zwischen Netzebenen dar,  $\theta$  den Einfallswinkel (=Reflexionswinkel), und  $m$  die Beugungsordnung.

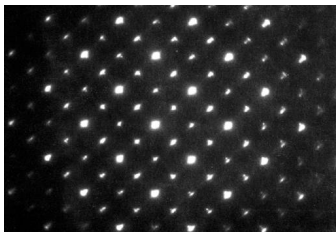


Abbildung 7.151: Beugungsbild von Kupfer.

Die Messung von Beugungsreflexen an Kristallen ist eine Standardmethode für die Bestimmung der atomaren Struktur dieser Kristalle. Abb. 7.151 zeigt ein typisches Beugungsmuster für einen einfachen Kristall aus Kupfer.

Man kann Röntgenbeugung an Kristallen machen (ideal), muss dafür die Kristalle aber drehen, da sonst meistens keine Reflexion stattfindet. Eine andere Möglichkeit ist es, polychromatische Röntgenstrahlung zu verwenden. Dies wird als Laue-Methode bezeichnet. Abb. 7.152 zeigt eine einfache Apparatur für Laue-Aufnahmen.

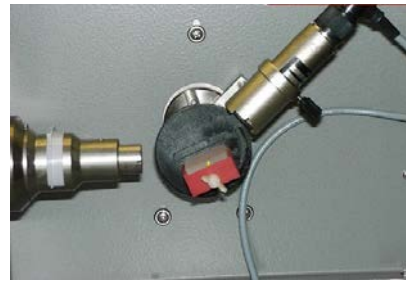


Abbildung 7.152: Einfache Laue Kamera.

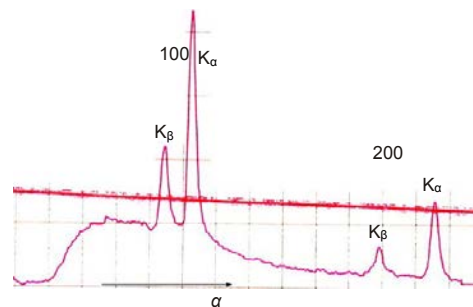


Abbildung 7.153: Röntgenbeugung an LiF mit kontinuierlichem und diskretem Spektrum.

Verwendet man Strahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum, so wird die Beugungsbedingung für die einzelnen Komponenten separat erfüllt. Man findet als Funktion des Drehwinkels deshalb ein breites Signal. Abb. 7.153 zeigt ein Beispiel, welches sowohl diskrete Anteile ( $K_\alpha$ ,  $K_\beta$ ) enthält, wie auch einen kontinuierlichen Anteil<sup>1</sup>. Die beiden schmalen der  $K_\alpha$ - und  $K_\beta$ - Strahlung erlauben einem, die Dimensionen der Einheitszelle im Kristall bestimmen. In diesem Beispiel wurde LiF gemessen.

Hat man keine Kristalle zur Verfügung so kann man (statisch) an Pulverproben messen. Daraus kann man zwar nicht die gesamte Struktur bestimmen, aber mindestens die Gitterkonstanten und die Symmetrie des Materials. Abb. 7.154 zeigt das Prinzip und ein Beispiel einer Aufnahme.

<sup>1</sup>Dieser entstammt dem sog. Bremsstrahlanteil der Röntgenröhre.



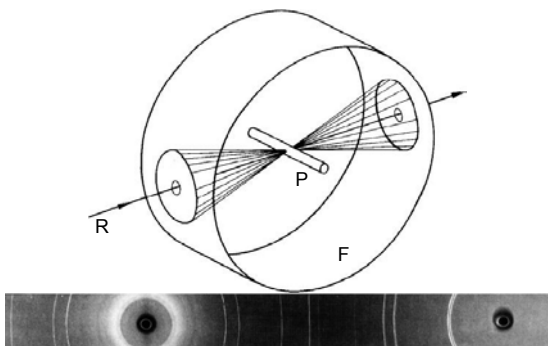


Abbildung 7.154: Röntgenbeugung an einem Pulver nach Debye-Scherrer.

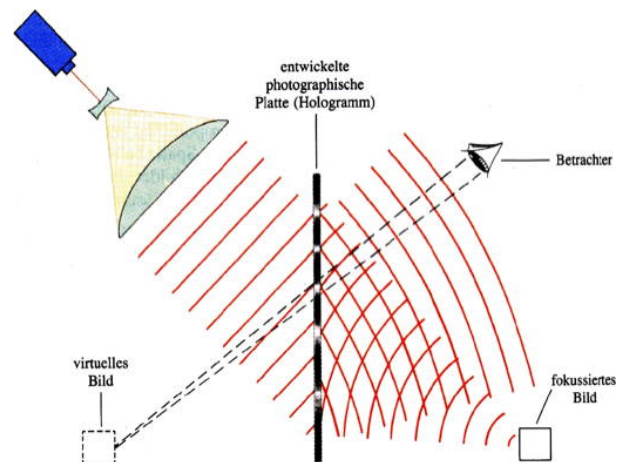


Abbildung 7.156: Wiedergabe eines Hologramms.

### 7.8.9 Holographie

Eine wichtige Anwendung der Beugung ist auch die Holographie.

lichen Zeiten.

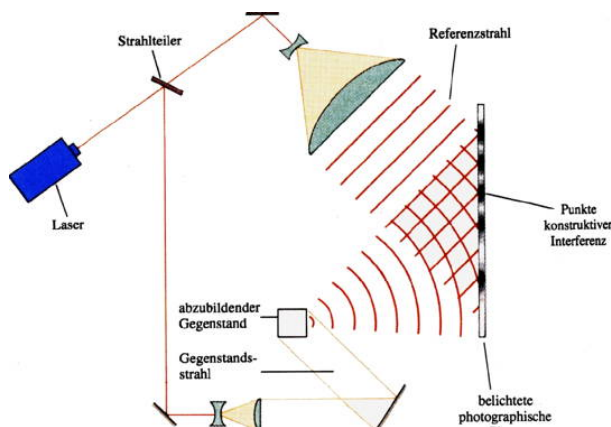


Abbildung 7.155: Aufnahme eines Hologramms.

Wie in Abb. 7.155 gezeigt wird durch die Interferenz zweier Wellenfelder in einer photographischen Emulsion ein Beugungsgitter erzeugt, das die gesamte Information über das Wellenfeld enthält. Durch Beleuchtung mit einer ebenen Welle erhält man ein Beugungsmuster, das beim Betrachter das ursprüngliche Objekt rekonstruiert.

Abb. 7.156 zeigt, wie man das Hologramm ausliest.

Holographie kann auch zur Informationsspeicherung oder zur Korrelation (d.h. Vergleich) von Bildern verwendet werden. Damit ist es auch möglich, Bewegungen sehr genau zu messen: Man vergleicht die Wellenfelder des gleichen Objektes zu unterschied-

## 7.9 Laser

Laser sind in den letzten Jahrzehnten zu einer der wichtigsten Lichtquellen geworden. Ihr Einsatzbereich ist extrem vielseitig und die Art der Quellen reicht von sub-mikroskopischen Halbleiterlasern bis zu gigantischen Forschungsgeräten.



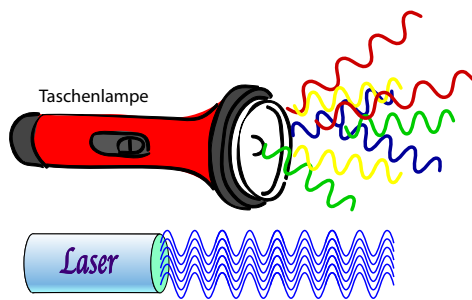


Abbildung 7.157: Laserlicht vs. thermisches Licht.

### 7.9.1 Grundlagen

Phänomenologisch unterscheidet sich Laserlicht vom Licht einer Glühlampe zunächst dadurch dass es nur eine bestimmte Wellenlänge, resp. Farbe enthält. Dies kann man im Experiment sehr einfach verifizieren: Anstelle eines weißen Strahls einer Bogenlampe schicken wir den roten Strahl eines He-Ne Lasers durch das Prisma. In diesem Fall wird das Licht nicht in Spektralfarben aufgetrennt, sondern wir sehen nur eine scharfe rote Linie, welche zeigt, dass das Licht aus diesem Laser eine bestimmte Wellenlänge aufweist.

In der Funktionsweise unterscheidet sich ein Laser von einer Glühlampe (→ Abb. 7.156) dadurch, dass er als Verstärker arbeitet. Während bei einer Glühlampe die einzelnen Lichtquanten praktisch zufällig ausgestrahlt werden, werden sie bei einem Laser praktisch nach Maß hergestellt und sind deshalb zueinander kohärent. Wie das genau funktioniert kann hier nicht diskutiert werden. Wir beschränken uns auf eine qualitative Diskussion und auf eine Übersicht über Anwendungsmöglichkeiten.

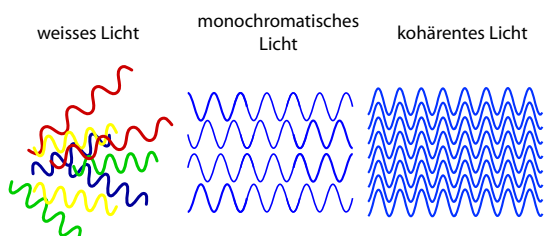


Abbildung 7.158: Weisses, monochromatisches und thermisches Licht.

Abb. 7.158 zeigt vereinfacht den Unterschied zwi-

schen weißem, monochromatischem und kohärentem Licht. Bei gewöhnlichem Licht besitzen die einzelnen Komponenten unterschiedliche Farbe, d.h. unterschiedliche Wellenlängen. Bei einfarbigem Licht können verschiedene Teile immer noch unterschiedliche Phase aufweisen, d.h. die entsprechenden Wellen haben zu unterschiedlichen Zeiten ihren Nulldurchgang. Das besondere am Laserlicht ist dass alle Komponenten nicht nur die gleiche Farbe (d.h. Wellenlänge) aufweisen, sie sind zudem in Phase, d.h. ihr Nulldurchgang findet zur gleichen Zeit statt.

### 7.9.2 Funktionsprinzip

Der Name Laser enthält eigentlich schon die wichtigste Zusammenfassung des Funktionsprinzips: LASER = light amplification by stimulated emission of radiation = Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung. Mit stimulierter Emission ist folgendes gemeint: ist ein Atom oder Molekül nicht im energetisch niedrigsten Zustand, sondern in einem sogenannten angeregten Zustand, so kann es beim Durchgang eines Photons dazu angeregt werden, in den Grundzustand überzugehen und dabei ein zweites Photon zu emittieren. Dieses zweite Photon, welches durch das erste stimuliert wurde, besitzt die gleichen Eigenschaften wie das erste, insbesondere die gleiche Frequenz.

Dabei kommt es zur Verstärkung des Lichtes, wobei auch bereits eine Richtung bevorzugt wird. Um eine genügende Verstärkung zu erhalten und die Richtung der stimulierten Emission festzulegen benötigt man zusätzlich zum aktiven Medium einen Resonator. Dieser sorgt dafür dass die Lichtwelle mehrfach durch das Verstärkungsmedium läuft.

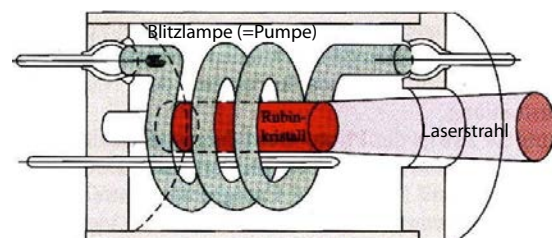


Abbildung 7.159: Aufbau eines Rubinlasers.

Es gibt sehr viele Möglichkeiten, Laser zu bauen, aber einige wesentliche Elemente sind allen Modellen gemeinsam. So wird ein so genanntes aktives Medium benötigt, welches das Licht verstärkt. Es wird von einer Energiepumpe in den angeregten Zustand versetzt, aus dem es dann unter Emission von Photonen in den Grundzustand übergehen und das einfallende Licht verstärken kann. Außerdem werden mindestens zwei Spiegel benötigt, welche den größten Teil des emittierten Lichtes wieder in das Medium zurückschicken, damit es weiter verstärkt werden kann. Abb. 7.159 zeigt als Beispiel den Aufbau eines Rubinlasers.

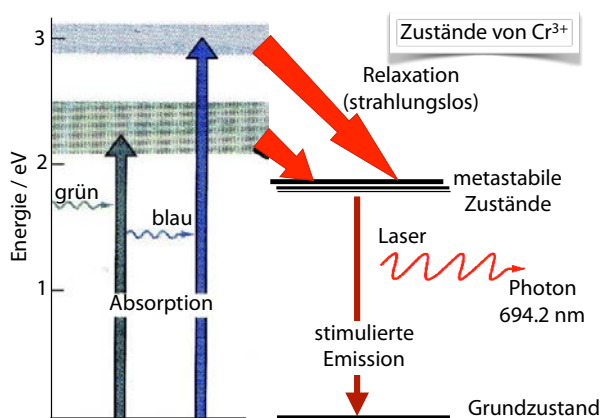


Abbildung 7.160: Übergänge im Rubinlaser.

Die Hauptschwierigkeit beim Bau eines Lasers besteht darin, die Populationsinversion zu erzeugen. Dafür benötigt man mindestens drei quantenmechanische Zustände. Das älteste bekannte Lasermedium ist der Rubin, dessen Niveauschema in Abb. 7.160 dargestellt ist. In diesem Material werden mit Hilfe von Blitzlampen Elektronen angeregt, welche durch strahlungslose Übergänge in einen metastabilen Zustand fallen. Von hier aus findet die eigentliche Laseremission mit einer Wellenlänge von 694 nm statt, sobald eine genügend große Inversion erreicht ist.

### 7.9.3 Lasertypen

Es existieren sehr unterschiedliche Typen von Lasern.

Mit Abstand der wichtigste Lasertyp ist heute der Halbleiterlaser (→ Abb. 7.161). Hier verwendet

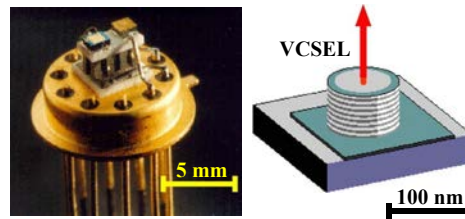


Abbildung 7.161: Beispiele für Halbleiterlaser.

man einen Übergang zwischen zwei unterschiedlichen Halbleitermaterialien. Halbleiterlaser haben zwei Vorteile, welche schwer zu überbieten sind: Zum einen können sie billig in großen Stückzahlen hergestellt werden, zum andern werden sie mit elektrischem Strom gepumpt, und haben dabei die höchste Energieausbeute aller bekannten Lichtquellen.

Ein Halbleiterlaser wie er in einem Laserzeiger verwendet wird ist weniger als 1 mm groß. Es gibt noch weitere Typen von Lasern, welche noch kleiner sind. Sie bestehen aus einer Abfolge von Schichten, welche nur wenige Atomlagen dick sind. Insgesamt sind sie weniger als ein Mikrometer groß.

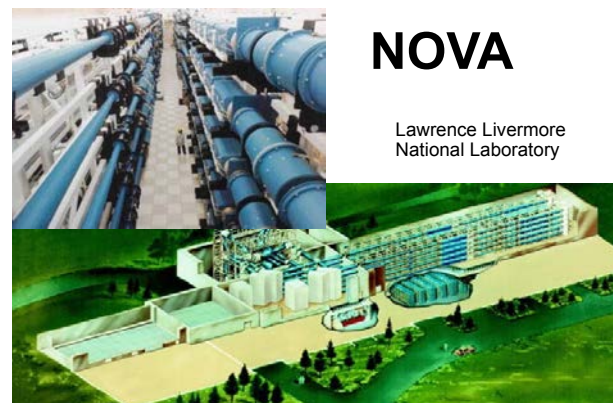


Abbildung 7.162: Hochleistungslaser für die Fusionsforschung.

Am anderen Ende der Skala findet man spezielle Laser wie z.B. den NOVA Laser am Lawrence Livermore National Laboratory in den USA. Dieser Laser ist über 100 m lang und 10 m hoch. Abb. 7.162 gibt eine Idee seiner Größe; das obere Bild ist ein Blick in die Halle des Lasers, das untere gibt einen Überblick über das Gebäude in dem er steht. Dieser Laser soll u.a. für die Fusionsforschung verwendet werden.

### 7.9.4 Anwendungen

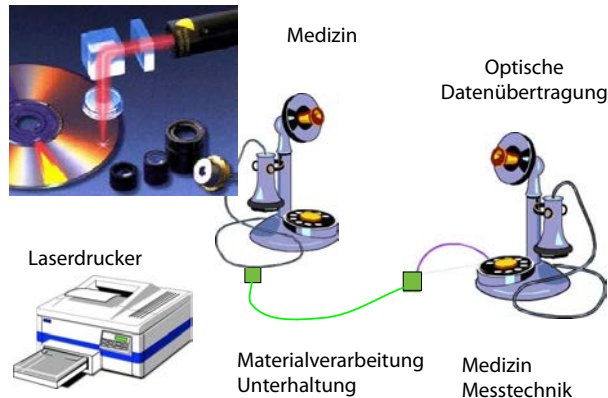


Abbildung 7.163: Beispiele für die Anwendung von Lasern.

Lasern sind heute aus vielen Bereichen des täglichen Lebens nicht mehr wegzudenken. Abb. 7.163 zeigt eine kleine Auswahl von Anwendungen. Am direktesten verwenden wir sie in elektronischen Geräten wie z.B. CD und DVD Spielern oder Laserdruckern. Der größte Teil der Telekommunikation (inkl. Internet) läuft heute über Glasfasern, wobei die Lichtpulse von Lasern erzeugt werden. In der Medizin werden Laser für Diagnostik und Operationen eingesetzt und in der Industrie für die Materialbearbeitung. In der Unterhaltungsindustrie werden Laser für Lichteffekte verwendet.

Auch in der Forschung werden Laser in sehr vielen Bereichen verwendet. So macht die außerordentlich hohe Präzision, mit der die Frequenz eines Lasers bestimmt werden kann, ihn auch zu einem möglichen Messgerät für Zeitmessungen. Man kann heute die Frequenz eines Lasers auf etwa  $10^{-18}$  genau messen. Die Unsicherheit liegt somit bei etwa einer Schwingung des Lasers pro Stunde. Wenn wir den Laser als Uhr verwenden würde er die Zeit nach 31 Milliarden Jahren um eine Sekunde falsch anzeigen. Man kann dies auch über die sog. Kohärenzlänge messen. Bei einer Wellenlänge von etwa  $1 \mu\text{m}$  ist die Kohärenzlänge bei rund einer Milliarde km liegt; dies entspricht etwa der Strecke zum Jupiter.

### 7.9.5 Pulslaser

Nicht alle Laser sind auf möglichst hohe Frequenzauflösung optimiert; andere werden auf möglichst hohe Zeitauflösung optimiert, d.h. sie erzeugen sehr kurze Pulse.

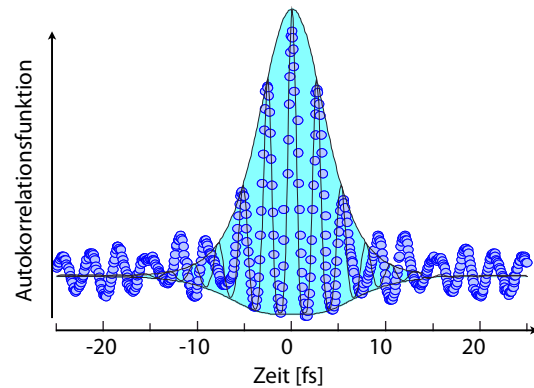


Abbildung 7.164: Gemessene Pulsform eines fs-Pulses.

“Kurz” heißt in diesem Zusammenhang einige Femtosekunden, wie im Beispiel von Abb. 7.164. Darüber hinaus sind auch Pulse mit einer Länge von weniger als einer fs verfügbar, sogenannte “Attosekunden-Pulse”.

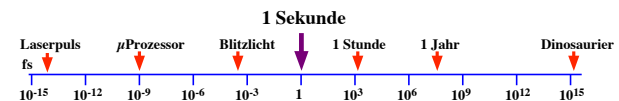


Abbildung 7.165: Vergleich von Zeitskalen.

Abb. 7.165 soll die Dauer einer Femtosekunde ( $=10^{-15}$  s) illustrieren. Die Mitte dieser logarithmischen Achse entspricht einer Sekunde, der linke Rand einer fs. Dann entspricht der rechte Rand einer Dauer von etwa 60 Mio Jahre, was etwa dem Zeitpunkt des Aussterbens der Dinosaurier entspricht.

Kurze Pulse verwendet man generell dort, wo man sich für schnelle Prozesse interessiert ( $\rightarrow$  Abb. 7.166). Dazu gehört z.B. in der Physik die Dynamik von Ladungsträgern in Halbleitern. Bessere Kenntnis dieser Prozesse kommt anschließend u. A. der Produktion von Halbleiter-Lasern zu Gute. In der Chemie verwendet man kurze Pulse vor allem für die Untersuchung molekularer Bewegungsprozesse und

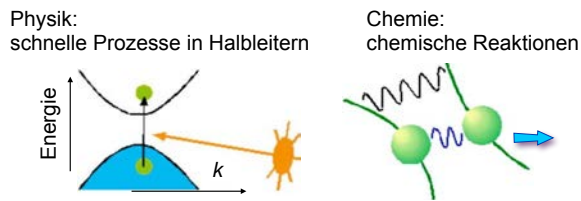


Abbildung 7.166: Beispiele für Messungen mit kurzen Pulsen.

Reaktionen. Laserpulse ergeben hier in einem gewissen Sinne die Möglichkeit, atomare Bewegungen in Molekülen zu filmen oder sogar zu kontrollieren.

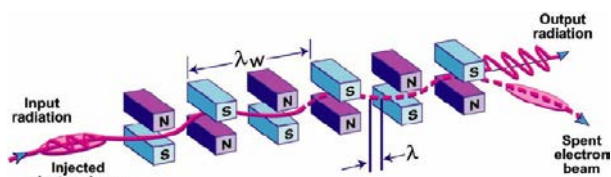


Abbildung 7.167: Funktionsprinzip eines freien Elektronen Lasers.

Ein ganz besonderer Lasertyp ist der freie Elektronenlaser (FEL, Abb. 7.167). Hier ist das Medium ein Elektronenstrahl, welcher in einem Teilchenbeschleuniger erzeugt und durch Ablenkmagneten in eine wellenförmige Bahn gebracht wird. Der Vorteil davon ist dass die Wellenlänge des Lasers über einen sehr breiten Bereich einstellbar wird. Die Emissionswellenlänge wird einerseits vom Abstand der Ablenkmagneten bestimmt, andererseits von der Geschwindigkeit der Elektronen. Beide Parameter können über einen recht breiten Bereich variiert werden.