

4 Elektrizität und Magnetismus

Elektrizität und Magnetismus wurden zunächst als unabhängige Phänomene verstanden. Rund 150 Jahre nachdem Newton seine grundlegenden Arbeiten zur Mechanik publiziert hatte, gelang es Maxwell¹ die Grundlagen von Elektrizität und Magnetismus zusammenzubringen und in 4 Gleichungen, den Maxwell'schen Gleichungen, ihre wichtigsten Eigenschaften zusammenzustellen.

4.1 Ladung und Feld

4.1.1 Übersicht

Die Phänomene, die in diesem Kapitel behandelt werden, basieren auf einer Größe, die bisher noch nicht diskutiert wurde: auf der elektrischen Ladung Q . "Gewöhnliche" Materie enthält gleich viele positive wie negative Ladungen. Man kann dieses Gleichgewicht verändern, indem man einzelne Ladungen von einem Material auf ein anderes überträgt. Dies geht z.B. indem man einen Glasstab mit Leder oder Seide reibt. So erhält man positive Ladungen; reibt man einen Kunststoffstab mit einem Katzenfell oder mit Seide so erhält man negative Ladungen. Diese können auf ein Elektrometer übertragen werden; dabei handelt es sich um ein Gerät, welches elektrische Ladungen durch einen Ausschlag des Zeigers anzeigt. Durch mehrmalige Übertragung kann man die Ladungsmenge vergrößern und damit den Ausschlag erhöhen. Überträgt man zunächst eine Art von Ladung und danach, ohne das Elektrometer zu entladen, die andere, so nimmt der Ausschlag ab: die beiden Arten von Ladungen heben sich gegenseitig auf.

Einige Eigenschaften der elektrischen Ladung sind:

- Ladung ist an Materie gebunden.

¹James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

- Ladung ist quantisiert, d.h. man findet nur Vielfache der Elementarladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- Es gibt positive und negative Ladungen; deren Absolutbetrag ist gleich. Die Ladung eines Teilchens kann somit betragen ... $-2e$, $-e$, 0 , $+e$, $+2e$, ...

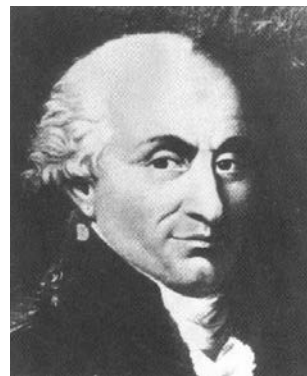


Abbildung 4.1: Charles Augustin de Coulomb (1736-1806).

Ladung wird gemessen in der Einheit

$$[Q] = \text{C} = \text{Coulomb},$$

nach Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806 (\rightarrow Abb. 4.1). Die Ladung ist eine der Grundeinheiten der Elektrizitätslehre.

Ladungen können Bewegungen durchführen. Man unterscheidet drei Bewegungszustände:

- ruhende Ladungen. Diese Systeme werden im Rahmen der Elektrostatik beschrieben.
- Ladungsbewegungen mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. es fließen stationäre Ströme, welche statische Magnetfelder erzeugen. Dies wird im Rahmen der Magnetostatik behandelt.
- Ladungen werden beschleunigt und erzeugen deshalb elektromagnetische Wellen. Dies ist das Thema der Elektrodynamik.

4.1.2 Ladungsquantisierung

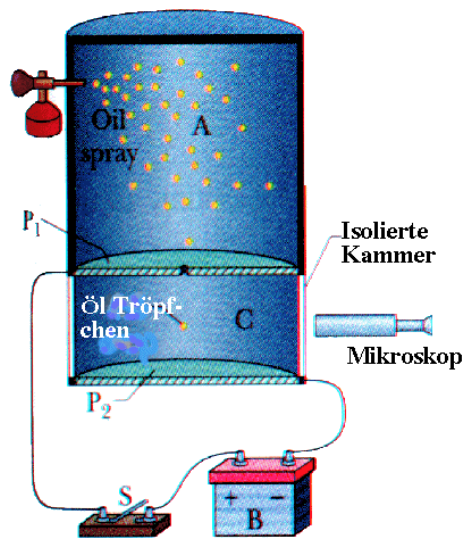


Abbildung 4.2: Messung der Ladungsquantisierung durch Millikan.

Die Quantisierung der elektrischen Ladung wurde in einem berühmten Versuch von Millikan erstmals nachgewiesen. Abb. 4.2 zeigt schematisch das verwendete Experiment. Er brachte kleine Öltröpfchen in einen Raum zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten.

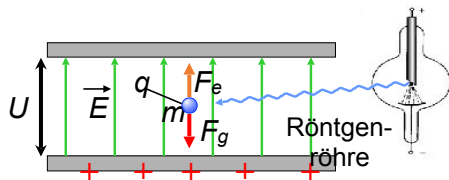


Abbildung 4.3: Öltröpfchen im Feld.

Wie in Abb. 4.3 gezeigt, wurden diese Öltröpfchen mit Licht ionisiert, d.h. geladen. Dadurch wurden sie im elektrischen Feld beschleunigt. Millikan beobachtete die Bewegung der Öltröpfchen durch ein Mikroskop. Auf diese Ladung wirkt dann die Kraft $F_e = qE$ und zieht den Tropfen nach oben. Gleichzeitig wird der Öltröpfchen von der Gewichtskraft $F_g = -mg$ nach unten gezogen. Bei der Messung stellt man nun den Zustand durch Verändern der Spannung $U = E \cdot d$ ein, bei dem der Tropfen schwebt, also:

$$F_e = q \cdot E = F_g = m \cdot g \Rightarrow q = \frac{m \cdot g \cdot d}{U}.$$

Um den Effekt des Feldes vom Einfluss der Schwerkraft zu unterscheiden, invertierte er die Polarität der Spannung. Aus diesen Messungen konnte er die Ladung der Öltröpfchen bestimmen und zeigen, dass es sich immer um ganzzahlige Vielfache der Elementarladung

$$e = 1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

handelte.

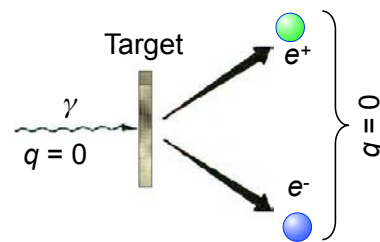


Abbildung 4.4: Erzeugung eines Elektronen-Positronen Paares aus einem Photon.

Für ein abgeschlossenes System gilt, dass die Summe der elektrischen Ladungen konstant ist. Es kann zwar Ladung erzeugt werden, aber immer nur in Paaren, also gleich viel negative wie positive Ladung. Ein Beispiel dafür ist die Paarerzeugung, bei der ein hochenergetisches Photon in ein Elektron und ein Positron umgewandelt wird (siehe Abb. 4.4). Ein anderes Beispiel ist der Zerfall des Neutrons, bei dem ein Proton (positiv geladen) und eine Elektron (negativ geladen) entstehen.

4.1.3 Elektrostatische Wechselwirkung

Ladungen üben aufeinander Kräfte aus. Abb. 4.5 zeigt einen experimentellen Aufbau für die Messung der Coulomb-Anziehung und Abstoßung. Wechselwirkung zwischen zwei Tischtennisbällen, die mit einer Graphitschicht überzogen sind und an einem Metallband aufgehängt sind. Werden die beiden Bälle an eine Hochspannungsquelle angeschlossen, so bringt man eine Ladung auf die beiden Körper. Bringt man die gleiche Ladung auf beide Körper (indem man sie mit dem gleichen Pol der Hochspannungsquelle verbindet), so stoßen sie sich ab; bringt



Abbildung 4.5: Anziehung und Abstoßung zwischen geladenen Kugeln.

man entgegengesetzte Ladungen auf die Kugeln so ziehen sie sich an.

Da Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen existieren, können elektrostatische Kräfte abgeschirmt werden. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Anziehung zwischen Massen, welche immer anziehend ist und damit nicht abgeschirmt werden kann.

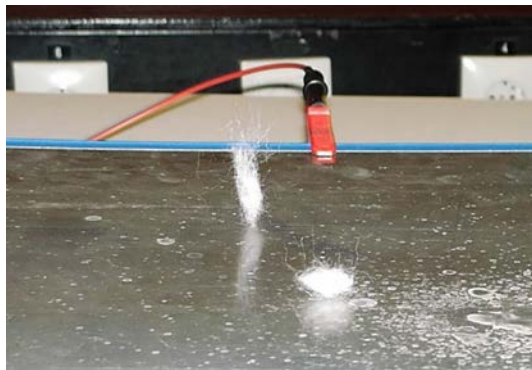


Abbildung 4.6: Watteflocken werden auf einer Metallplatte aufgeladen.

Das funktioniert nicht nur mit leitenden Gegenständen, Ladungen können auch auf nichtleitende Gegenstände wie z.B. Watteflocken aufgebracht werden wenn sie auf einer aufgeladenen Platte liegen, wie in Abb. 4.6 gezeigt. Sie werden dann von dieser abgestoßen und fliegen weg. Dies dauert allerdings deutlich länger als bei elektrisch leitenden Gegenständen.

4.1.4 Abstandsabhängigkeit

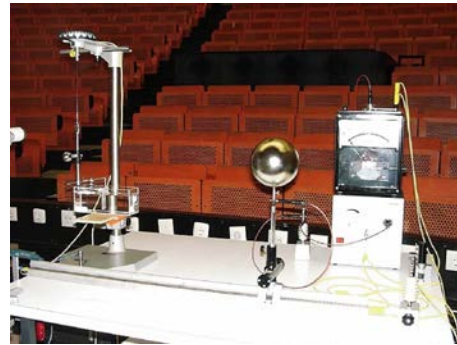


Abbildung 4.7: Coulomb-Drehwaage.

Abb. 4.7 zeigt ein Experiment, mit dem diese Wechselwirkung etwas quantitativer untersucht werden kann. Dazu wird auf eine kleine Metallkugel Ladung gebracht, indem sie über eine Hochspannungsquelle auf 10 kV aufgeladen wird. Eine zweite Metallkugel wird mit der gleichen Spannungsquelle aufgeladen. Die Wechselwirkung zwischen den beiden wird gemessen, indem die Kraft auf die kleine Kugel als Torsionskraft auf einen Draht übertragen wird, an dem ein Spiegel befestigt ist (siehe Abb. 4.7). Die Orientierung des Spiegels wird gemessen, indem ein Laserstrahl daran reflektiert und an die Wand projiziert wird. Wir führen Messungen zu unterschiedlichen Ladungen (d.h. Spannungen) und Abständen durch.

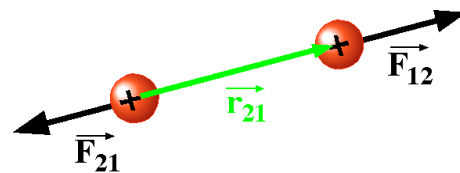


Abbildung 4.8: Ladungen, Kräfte.

Eine Auswertung solcher und ähnlicher Messungen ergibt, dass zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 in einem Abstand r_{12} (siehe Abb. 4.8) die Kräfte

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

wirken. Hier stellt

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

die Dielektrizitätskonstante des Vakuums² dar. Dieses Kraftgesetz wird als Coulomb-Gesetz bezeichnet. Es hat offenbar die gleiche Struktur wie das Gravitationsgesetz. In beiden Fällen ist

- die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen / Ladungen,
- wirkt entlang der Verbindungsachse und
- nimmt mit dem Quadrat des Abstandes ab.

Die elektrostatische (Coulomb-) Wechselwirkung ist verantwortlich für den Zusammenhalt von Elektronen und Atomkernen in Atomen und Molekülen und damit für sämtliche chemischen und biologischen Prozesse. Die Massenanziehung ist die entscheidende Kraft für die Struktur des Kosmos. Allerdings ist die Coulomb-Wechselwirkung sehr viel stärker: vergleicht man die Coulomb-Wechselwirkung mit der Gravitationswechselwirkung für ein Elektron und ein Proton, so ist die Coulomb-Kraft rund 10^{40} mal stärker.

4.1.5 Elektrisches Feld

Elektrische Ladungen üben aufeinander Kräfte aus, welche dem Newton'schen Axiom "actio = reactio" gehorchen. Häufig hat man die Situation, dass ein Instrument und ein freies Testteilchen geladen sind; dann ist die Kraft, welche das Testteilchen auf die Apparatur ausübt kaum von Interesse, sondern primär die Kraft, welche die Apparatur auf das Testteilchen ausübt.

Diese Kraft ist nicht von der Masse des Teilchens abhängig, es geht lediglich seine Ladung ein. Es ist deshalb nützlich, vom konkreten Fall eines spezifischen Teilchens zu abstrahieren. Man kann die Behandlung sogar unabhängig von der Ladung des Teilchens machen, indem man die Kraft \vec{F} durch die Ladung q dividiert. Die resultierende Größe ist das elektrische Feld \vec{E} . Dieses stellt die Kraft dar, die auf eine Einheits-Probeladung wirken würde (→ Abb. 4.9),

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}.$$

²auch: elektrische Feldkonstante, Permittivität des Vakuums

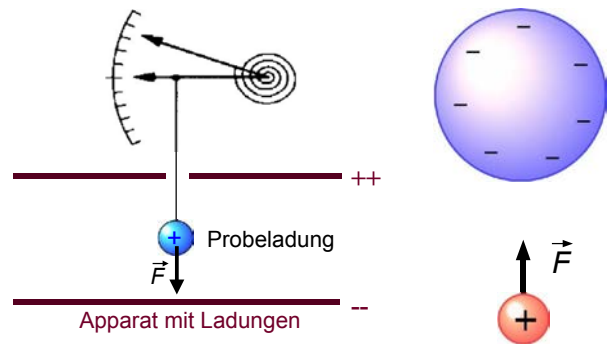


Abbildung 4.9: Kraft auf Ladung im Feld eines Plattenkondensators (links), resp. einer geladenen Kugel (rechts).

Diese Gleichung kann auch als Definitionsgleichung für die Einheit Volt verstanden werden. Die elektrostatische Kraft ist dementsprechend gegeben durch das Produkt aus Feldstärke und Ladung des Testteilchens; die Einheit ist

$$[F] = N = \frac{J}{m} = C \frac{V}{m}.$$

Da die Kraft eine Richtung hat, muss auch das Feld eine Richtung enthalten (die gleiche wie die Kraft); man bezeichnet diese Art von Feldern als Vektorfelder. Analog zum Gravitationsfeld (→ Kap. 2.3.1), welches von einer Masse erzeugt wird, wird das elektrische Feld von einer Ladung erzeugt.

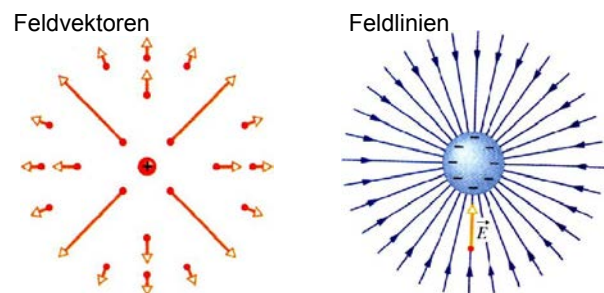


Abbildung 4.10: Feldvektoren und Feldlinien für eine Punktladung.

Man kann die Feldstärke an jedem Ort durch einen Pfeil darstellen, der Betrag und Richtung der Kraft angibt (→ Abb. 4.10 links). Der einfachste Fall eines elektrischen Feldes ist durch das elektrische Feld einer Punktladung Q im Ursprung gegeben; das Feld

hat dann die Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{21}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}. \quad (4.1)$$

Wie in Abb. 4.10 gezeigt, sind die Feldvektoren an allen Punkten radial nach außen gerichtet, wobei die Länge mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Das Feld zeigt die Richtung der Kraft auf eine positive Elementarladung. Somit zeigt die Richtung immer weg von positiven Ladungen, hin zu negativen Ladungen.

Befindet sich die Ladung nicht im Ursprung, sondern an einer allgemeinen Stelle \vec{r}_0 , so wird \vec{r} auf der rechten Seite von Gleichung (4.1) durch $\vec{r} - \vec{r}_0$ ersetzt. Die Felder unterschiedlicher Ladungen sind additiv: Das gesamte Feld einer Gruppe von Ladungen Q_i an den Positionen \vec{r}_i kann als Summe über die einzelnen Beiträge berechnet werden,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i).$$

Bei allen Berechnungen dieser Art darf das zusätzliche Feld der Probeladung nicht berücksichtigt werden: das Feld ist definiert über die Kräfte, welche die anderen Ladungen auf die Probeladung ausüben; die Probeladung selber wird als infinitesimal angesehen.

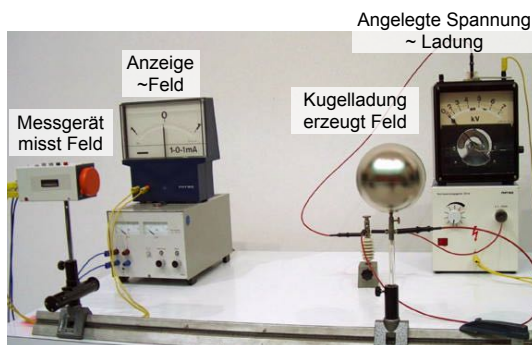


Abbildung 4.11: Messung des Coulomb-Feldes.

Mit einem geeigneten Messgerät kann man direkt das elektrische Feld messen. Abb. 4.11 zeigt einen entsprechenden Messaufbau mit einer geladenen Kugel, welche ein zentrales Feld erzeugt. Das Experiment zeigt, dass das Feld proportional zur Ladung der Kugel und indirekt proportional zum Quadrat des

Abstandes ist, also in guter Übereinstimmung mit

$$|\vec{E}(\vec{r})| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

Typische Feldstärken sind

Stromleitungen in Wohnhäusern	10^{-2} V/m
Radiowellen	10^{-1} V/m
Sonnenlicht	10^3 V/m
Blitz	10^4 V/m
Röntgenröhre	10^6 V/m
Wasserstoff-Atom (in 0,5 Å)	$6 \cdot 10^{11}$ V/m
Hochleistungs-Laser	10^{16} V/m
Uran-Atomkern	$2 \cdot 10^{21}$ V/m

4.1.6 Feldlinien

Neben den oben dargestellten Feldvektoren stellt man elektrische Felder auch gerne durch Feldlinien dar; diese beginnen und enden immer in Ladungen; im ladungsfreien Raum können Feldlinien somit weder anfangen noch enden. An jeder Stelle geben sie die Richtung der Kraft / des Feldes an. Die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Stärke des Feldes. Im Falle einer Kugel nimmt die Dichte nach außen quadratisch mit dem Abstand ab, wie die Coulomb-Wechselwirkung quadratisch mit dem Abstand abnimmt.

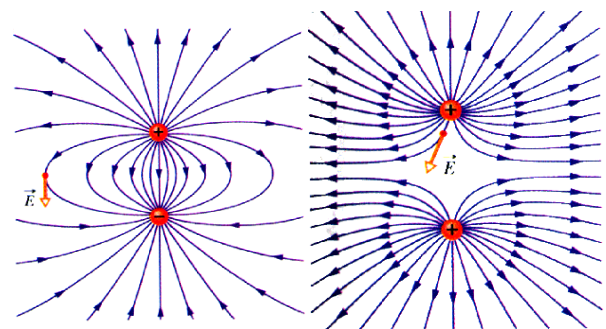


Abbildung 4.12: Links: Feldlinien eines elektrischen Dipols. Rechts: Feldlinien von zwei positiven Ladungen.

Sind positive und negative Ladungen vorhanden, so laufen die Feldlinien von den positiven zu den negativen Ladungen - wie sich eine positiv geladene

Testladung bewegen würde. Die Richtung der Kraft an jeder Stelle ist durch die Tangente an die Feldlinie gegeben. Da die Kraft an jeder Stelle des Raumes wohl definiert ist können sich Feldlinien nicht überschneiden; am Schnittpunkt wäre die Richtung der Kraft nicht eindeutig. Sind mehrere Ladungen mit gleichem Vorzeichen vorhanden, so stoßen sich die Feldlinien gegenseitig ab. Abb. 4.12 zeigt links die Feldlinien eines elektrischen Dipols, rechts für ein System aus zwei gleichen Ladungen.

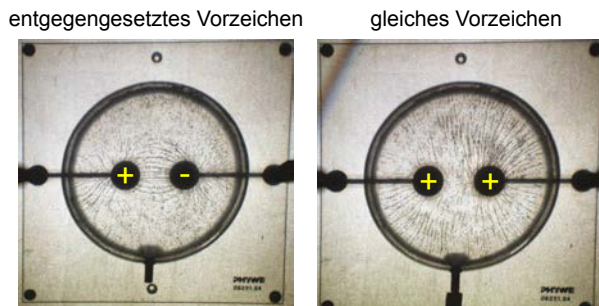


Abbildung 4.13: Elektrische Feldlinien eines Paares von Ladungen, gemessen mit Grießkörnern in Öl.

Wie in Abb. 4.13 gezeigt, kann man die Feldlinien sichtbar machen, indem man Grießkörner in Öl in den Raum der Feldlinien bringt.

4.1.7 Elektrostatistisches Potenzial

Wird eine elektrische Ladung q in einem elektrischen Feld bewegt, muss Arbeit aufgewendet werden. Wie aus dem Kapitel Mechanik bekannt, ist Arbeit definiert über das Integral

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -q \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s},$$

wobei verwendet wurde, dass die äußere Kraft \vec{F} gerade die elektrostatische Kraft $q\vec{E}$ überwinden muss. Bei der elektrostatischen Kraft handelt es sich um eine konservative Kraft, d.h. es spielt keine Rolle, auf welchem Weg man sich von A nach B bewegt und das Schleifenintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Somit existiert eine potenzielle Energie \mathcal{E}_{pot} , welche die Arbeit beschreibt, die für den Transport nötig ist.

Meist verwendet man nicht die potenzielle Energie, sondern man dividiert wieder durch die Probeladung q und definiert das elektrische Potenzial U als

$$U_{AB} = \frac{\mathcal{E}_{pot}}{q} = \frac{W_{AB}}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Die Einheit des elektrostatischen Potenzials ergibt sich damit als Volt:

$$[U] = \text{Volt} = \text{V}.$$

Umgekehrt erhält man das elektrische Feld aus dem Gradienten des Potenzials:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U.$$

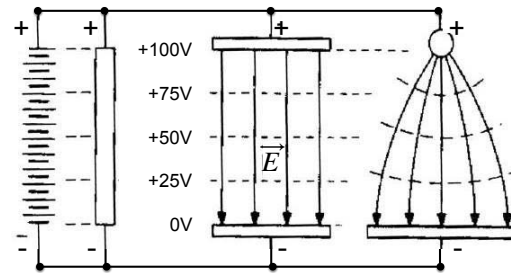


Abbildung 4.14: Feldlinien und Äquipotentialflächen für verschiedene Elektroden.

In einer gegebenen Anordnung kann jedem Punkt im Raum ein Potenzial zugeordnet werden, welches dem Integral des elektrischen Feldes vom Referenzwert 0 V bis zu diesem Punkt entspricht. So besitzen die Pole einer Batterie ein wohl definiertes Potenzial. In einem homogenen elektrischen Feld nimmt das Potenzial entlang der Feldlinien linear zu. Abb. 4.14 zeigt dies für unterschiedliche Randbedingungen.

Das elektrostatische Potenzial lässt sich für eine

Punktladung Q_1 relativ leicht rechnen:

$$\begin{aligned} U_{ab} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{Q_1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{s} \\ &= -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right). \end{aligned}$$

In vielen Fällen ist es nützlich, eine feste Referenz zu haben. Man wählt üblicherweise das System als Referenz, bei dem die Testladung unendlich weit entfernt ist, so dass die elektrostatische Wechselwirkung verschwindet. Bringt man die Referenzladung aus dem Unendlichen zur Position r , d.h. $\vec{r}_a \rightarrow \infty$, $\vec{r}_b \rightarrow r$, so wird

$$U_{\infty r} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Abbildung 4.15 zeigt die entsprechende Abhängigkeit.

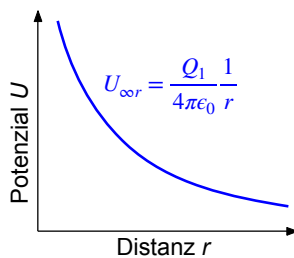


Abbildung 4.15: Potential einer Punktladung als Funktion des Abstandes r .

Dies ist die Energie (dividiert durch die Ladung), welche benötigt wird, um die Probeladung aus großer Entfernung bis zum Abstand r zu bringen. Diese Größe wird einfach als das skalare Potential $\phi = U_{\infty r}$ bezeichnet.

Ist das Potential für eine Ladungsverteilung bekannt, so kann umgekehrt daraus das elektrische Feld berechnet werden. Es gilt allgemein, dass die Kraft als Gradient der potenziellen Energie berechnet werden kann,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_{\text{pot}}.$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch die Testladung, so erhält man

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (4.2)$$

d.h. das elektrische Feld ist der negative Gradient des elektrischen Potentials. Dies ist auch eine sehr bequeme Möglichkeit, das Feld einer Ladungsverteilung zu berechnen: da das Potential ein skalares Feld ist, kann es leichter berechnet werden als das vektorielle elektrische Feld. Man erhält das Potential einer beliebigen Zahl von Ladungen Q_i und den Positionen \vec{r}_i als die Summe

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

4.1.8 Äquipotenzialflächen

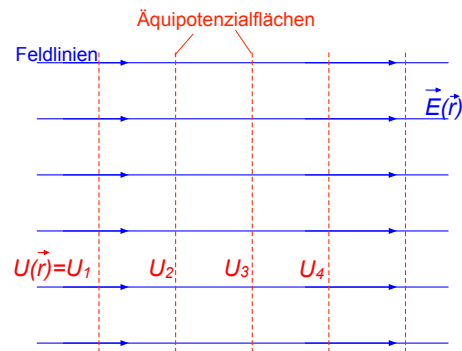


Abbildung 4.16: Feldlinien und Äquipotenzialflächen stehen senkrecht aufeinander.

Das Potential kann man ebenfalls grafisch darstellen. Dafür verwendet man meist Äquipotenzialflächen, d.h. Flächen gleichen Potentials. Man kann diese als eine Art ‘Höhenlinien’ des Potentials betrachten (\rightarrow Abb. 4.16).

Da auf einer Äquipotenzialfläche das Potential konstant ist, und die Feldlinien durch den Gradienten des Potentials gegeben sind, stehen die Feldlinien auf jeder Äquipotenzialfläche senkrecht.

Dies ist bei einer Punktladung leicht einzusehen: die Äquipotenzialflächen sind kugelförmige Flächen und stehen damit offensichtlich senkrecht zu den Feldlinien, welche radial nach außen laufen, wie in Abb. 4.17 links gezeigt. Sind mehrere Ladungen vorhanden, so addieren sich wiederum die Potentiale der einzelnen Ladungen. Für ein Paar von entgegengesetzten Punktladungen findet man in der Mitte eine Ebene, welche dem Potential Null entspricht,

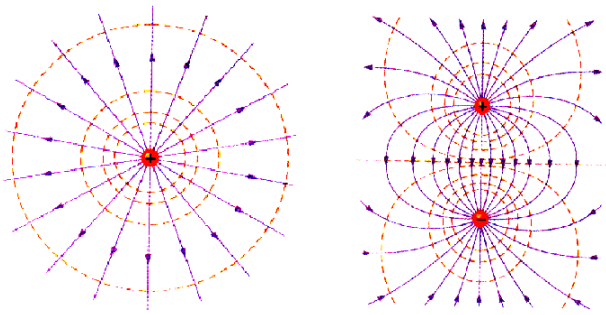


Abbildung 4.17: Feldlinien und Äquipotenzialflächen für einen Monopol und einen Dipol.

während sich die Äquipotenzialflächen in der Nähe der Ladungen Kugeln annähern.

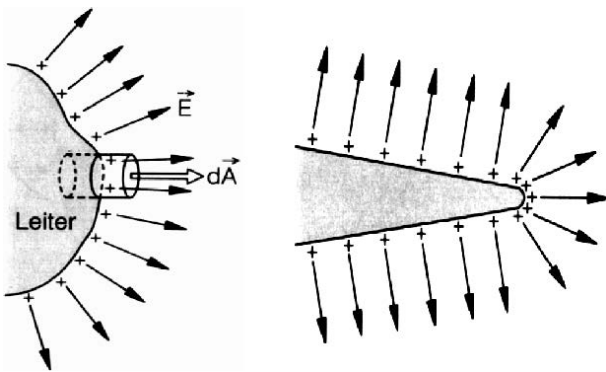


Abbildung 4.18: Feldlinien verlaufen an Metalloberflächen senkrecht; an Spitzen (rechts) ist die Feldliniendichte besonders hoch.

Äquipotenzialflächen findet man u. a. als Oberflächen metallischer Körper. Wie in Abb. 4.18 gezeigt, stehen somit die Feldlinien senkrecht auf der Oberfläche. Sie sind proportional zur Flächenladungsdichte (siehe später). An der Spitze von metallischen Gegenständen liegen die Äquipotenzialflächen besonders nahe beisammen; hier ist somit die Feldstärke besonders groß. Generell wächst das elektrische Feld mit der zweiten Potenz des inversen Krümmungsradius r

$$E \propto \frac{1}{r^2}.$$

Je kleiner der Krümmungsradius desto höher die Feldstärke.

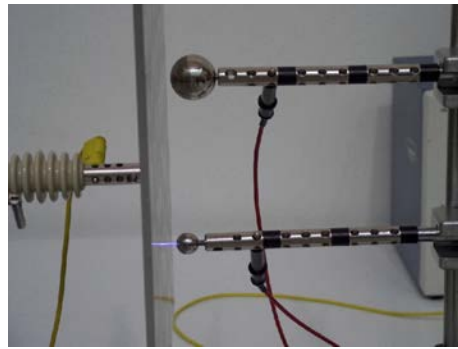


Abbildung 4.19: Der Durchschlag erfolgt bei der kleineren Kugel, da diese die höhere Spannung an der Oberfläche aufweist.

Abb. 4.19 zeigt ein entsprechendes Experiment: Beide Kugeln werden auf das gleiche Potenzial geladen und haben den gleichen Abstand von der Metallplatte. Die kleinere Kugel ist stärker gekrümmt; deshalb ist hier die Feldstärke höher und der Durchschlag zur Platte erfolgt immer von der kleinen Kugel aus. Man kann diesen Effekt u.a. dazu ausnutzen, Elektronen aus einem Metall herauszulösen; der Effekt wird dann als Feldemission bezeichnet.

4.1.9 Verschiebungsdichte

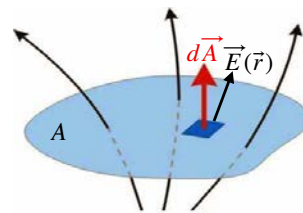


Abbildung 4.20: Fluss des Feldes \vec{E} durch eine Fläche A und das Flächenelement $d\vec{A}$.

Der Fluss des elektrischen Feldes durch ein Flächenelement dA ist, wie in Abb. 4.20 gezeigt,

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}.$$

Hier stellt $d\vec{A}$ einen Vektor senkrecht zur Oberfläche dar. Sein Betrag ist gleich der Größe des Flächenelements dA .

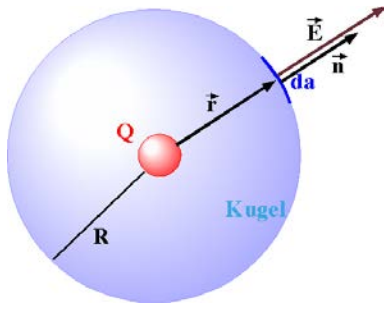


Abbildung 4.21: Fluss der Feldlinien durch eine Kugel­fläche.

Dies wird nun auf eine geschlossene Kugel­fläche mit Radius r angewendet, in deren Zentrum sich eine Punktladung Q befindet, wie in Abb. 4.21 gezeigt. Aus Symmetriegründen muss die Feldstärke konstant und die Richtung senkrecht zur Oberfläche sein. Die Integration ergibt somit das Produkt aus Feldstärke $E(r)$ und Oberfläche $A = 4\pi r^2$,

$$\Phi = |\vec{E}|(r)4\pi r^2.$$

Nach Gleichung 4.1 ist die Stärke des Feldes auf der Kugeloberfläche

$$|E|(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

und die Oberfläche ist. Das Flächenintegral ist demnach

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Das Flächenintegral des elektrischen Feldes wird oft als elektrischer Fluss bezeichnet. Es ist offenbar gleich der eingeschlossenen Ladung Q dividiert durch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 , und unabhängig vom Abstand von der Ladung.

Wir verwenden diese Beziehung, um eine neue Größe einzuführen, die **elektrische Verschiebungsdichte** \vec{D} , welche definiert ist als das Verhältnis aus Feld erzeugender Ladung und Oberfläche,

$$\vec{D} = \frac{Q}{A} \vec{n}, \quad [D] = \frac{C}{m^2}, \quad (4.3)$$

wobei der Einheitsvektor \vec{n} senkrecht auf der Oberfläche steht und nach außen zeigt.

4.1.10 Feldgleichung

Wertet man die Definition (4.3) der Verschiebungsdichte an der Oberfläche einer Kugel aus, in deren Zentrum die Ladung Q sitzt, erhält man

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E}.$$

Die Beziehung $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebungsdichte, welche hier für eine Kugel hergeleitet wurde, gilt allgemein im Vakuum.

Das Integral der Verschiebungsdichte über die Kugeloberfläche ergibt somit

$$\iint_{Kugel} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q,$$

d.h. das Integral der elektrischen Verschiebungsdichte über die Kugeloberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung. Diese Beziehung gilt nicht nur wie in diesem Fall für eine Punktladung in einer Kugel, sondern für beliebige Ladungsverteilungen $\rho_{el}(\vec{r})$ in beliebigen Oberflächen:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q = \iiint_V \rho_{el} dV.$$

Dies ist die Integralform der Feldgleichung.

Die linke Seite dieser Gleichung kann mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Volumenintegral umgewandelt werden:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \cdot dV = \iiint_V \rho_{el} dV.$$

Da diese Gleichung für jedes Volumen gilt, müssen die Integranden identisch sein,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_{el}(\vec{r}).$$

Diese Gleichung wird als die Differenzialform der Feldgleichung bezeichnet. Sie kann als Definition der elektrischen Verschiebung betrachtet werden. Man drückt diese Beziehung auch dadurch aus, dass man sagt, dass die elektrischen Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes darstellen.

Eine direkte Konsequenz ist, dass der gesamte elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet, sofern sie keine Ladung einschließt. Abb. 4.22 zeigt die beiden Fälle für eine Ladung außerhalb (links) und innerhalb (rechts) der Oberfläche.

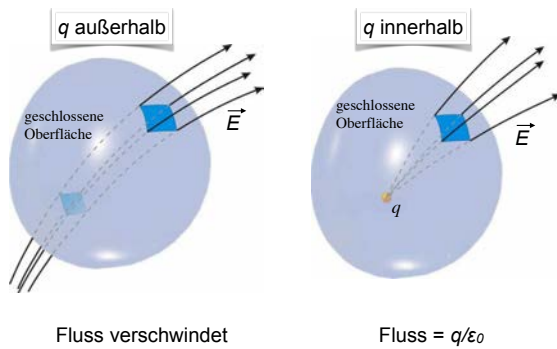


Abbildung 4.22: Der Fluss durch die Oberfläche verschwindet, wenn die Quelle außerhalb des Volumen liegt; sonst ist der Fluss gleich der eingeschlossenen Ladung.

4.1.11 Feld eines geladenen Drahtes

Die Feldgleichung sagt, dass die Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes darstellen. Dies ermöglicht es in vielen Fällen, die Felder zu berechnen, die von einer Ladungsverteilung erzeugt werden. Das Beispiel der Punktladung wurde für die Herleitung verwendet.

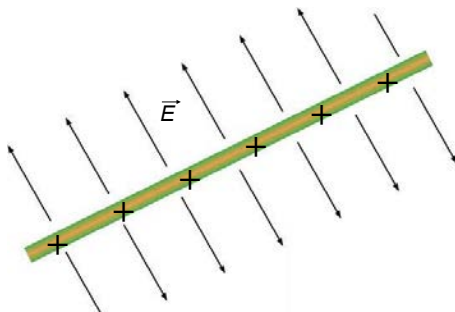


Abbildung 4.23: Lineare Ladungsverteilung und Feldlinien.

Abb. 4.23 zeigt als zweites Beispiel das Feld, das von einer linienförmigen Ladung erzeugt wird. Die Ladung sei gleichmäßig auf einem unendlich langen dünnen Draht verteilt, mit der linearen Ladungsdichte $\lambda = \Delta Q / \Delta x$. Die elektrischen Felder (\vec{D}, \vec{E}) müssen aus Symmetriegründen radial vom Draht weg gerichtet sein und ihre Amplituden können nur eine Funktion des Abstandes sein. Der Fluss durch die Oberfläche A eines Zylinders mit Radius r und Län-

ge ℓ ist dann

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{n} = 2\pi r \ell |D(r)| = \iiint_V \rho_{el} dV = \lambda \ell,$$

d.h. gleich der eingeschlossenen Ladung. Somit ist die elektrische Verschiebungsdichte $D(r)$ als Funktion des Abstands r

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}.$$

Die lineare Ladungsdichte wird somit durch den Umfang eines Kreises dividiert, oder die gesamte im Zylinder enthaltene Ladung ($= \lambda \ell$) durch die Oberfläche des Zylinders ($= 2\pi r \ell$).



Abbildung 4.24: Koronaentladung eines Drahtes.

Diese Feldlinien werden sichtbar, wenn die Spannung hoch genug ist und das umgebende Medium ionisierbar. In Luft z.B. werden durch die hohen Spannungen Moleküle ionisiert. Bei der Rekombination leuchtet das Medium, es kommt zu einer sog. Korona-Entladung. Abbildung 4.24 zeigt als Beispiel die Koronaentladung eines Drahtes. Die Spuren folgen grob den Feldlinien.

4.1.12 Homogene Kugelladung

Als nächstes berechnen wir den Feldverlauf für eine homogene, kugelförmige Ladungsverteilung mit Radius R . Außerhalb der Kugel ist der Feldverlauf unabhängig von der Verteilung der Ladung, da ja nur die Summe der eingeschlossenen Ladung eine Rolle spielt,

$$D(r > R) = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Für den Feldverlauf im Innern trägt jeweils nur der Anteil der Ladung bei, der sich im Inneren einer entsprechenden Kugelschale befindet. Dieser beträgt

$$Q_{\text{innen}} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Das Feld beträgt dementsprechend

$$D(r < R) = \frac{Q}{4\pi R^3} r.$$

Innerhalb der Kugel nimmt die Feldstärke somit linear zu, während sie außerhalb quadratisch mit der Entfernung abfällt.

Da das Coulomb'sche Gesetz die gleiche mathematische Form aufweist wie das Newton'sche Gravitationsgesetz findet man die gleiche Abhängigkeit für die Schwerebeschleunigung im Inneren eines Planeten: lineare Zunahme unterhalb der Oberfläche, quadratische Abnahme oberhalb.

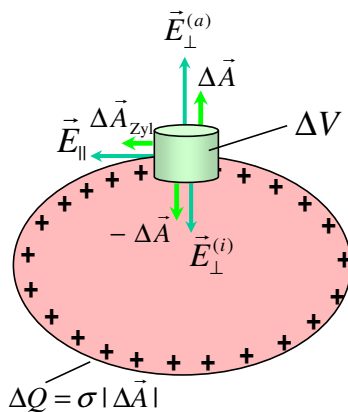


Abbildung 4.25: Ladungsverteilung auf einer Fläche.

Völlig analog kann das Feld für eine ebene Ladungsverteilung der Dichte $\sigma = Q/A$ berechnet werden. Wie in Abb. 4.25 gezeigt betrachtet man einen flachen Zylinder, welcher die Ebene umschließt. Dessen Oberfläche beträgt zweimal die Fläche der Ebene, so dass die Feldstärke $D = \sigma/2$ beträgt.

4.1.13 Elektrische Dipole

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzten Ladungen in einem festen Abstand a (\rightarrow

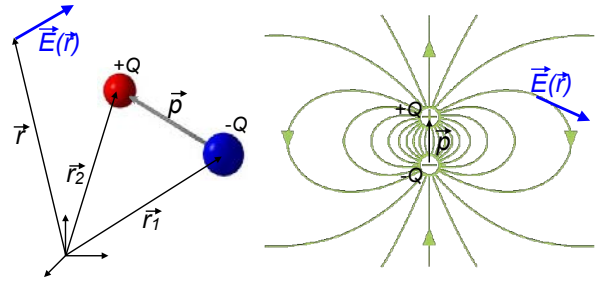


Abbildung 4.26: Feld eines elektrischen Dipols.

Abb. 4.26). Das System ist somit nach außen elektrisch neutral. Die beiden Ladungen erzeugen jedoch ein Feld, das man durch Superposition von zwei Zentralfeldern leicht bestimmen kann.

Das Potenzial und das Feld des elektrischen Dipols erhält man als Summe über die Beiträge der einzelnen Ladungen. Mit Ladung $-Q$ bei \vec{r}_1 und $+Q$ bei \vec{r}_2 ergibt das Potenzial

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right).$$

Ist der Abstand zu den Ladungen groß im Vergleich zu ihrem Abstand, so kann man das Potenzial näherungsweise ausdrücken als

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Hier stellt

$$\vec{p} = Q\vec{a} \quad [p] = \text{Cm}$$

das Dipolmoment dar, welches durch das Produkt aus Ladung und Abstand gegeben ist. Die Richtung des Dipols geht von der negativen zur positiven Ladung. In der älteren Literatur wird häufig auch die Einheit Debye³ verwendet. Dieses ist gut auf atomare / molekulare Größen angepasst: 1 Debye = 0.2 eÅ $\approx 3,3 \cdot 10^{-30}$ Cm. Diese Einheit wird v.a. auch für Dipolmomente in Molekülen verwendet.

Das elektrische Feld erhält man aus der Ableitung des Potenzials als

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{p}}{r^5},$$

³nach Peter Joseph William Debye, 1884-1966

wiederum in der Näherung eines großen Abstandes vom Dipol. Hier wurde der Dipol in den Koordinatenursprung gelegt ($\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 \approx 0$). In diesem Bereich ($r \gg p$) fällt somit das Dipolfeld mit der dritten Potenz des Abstandes ab, im Gegensatz zum Monopol, wo das Feld mit der zweiten Potenz abfällt. Während das Feld des Monopols radialsymmetrisch ist, ist dasjenige des Dipols axial symmetrisch.

Diese Entwicklung in so genannten Multipolen kann weitergeführt werden. Die entsprechenden Feldverteilungen können durch diskrete Ladungsverteilungen dargestellt werden, wobei die Multipole mathematische Näherungen für große Abstände von der Ladungsverteilung darstellen. Es ist möglich, jede Ladungsverteilung als Multipol-Entwicklung darzustellen, wobei die höheren Multipole mit zunehmendem Abstand an Bedeutung verlieren. Bei einer diskreten Ladungsverteilung ist das Dipolmoment

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i.$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ist es

$$\vec{p} = \iiint \rho_e(\vec{r}) \vec{r} dV.$$

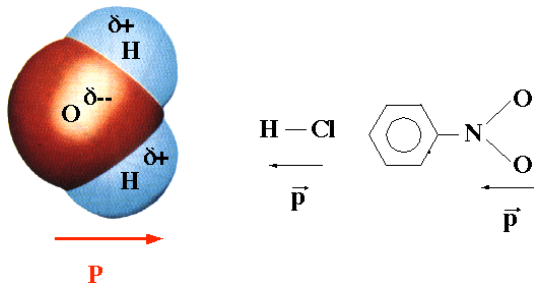


Abbildung 4.27: Molekulare Dipole.

Dipolmomente treten z.B. in fast allen Molekülen mit unterschiedlichen Kernen auf. Abb. 4.27 zeigt einige Beispiele. Tabelle 4.1 stellt numerische Werte für einige Beispiele in unterschiedlichen Einheiten zusammen. Das Dipolmoment verschwindet in symmetrischen Molekülen wie H_2 , N_2 , CO_2 , C_6H_6 .

	p	p	p
Molekül	10^{-30}Cm	$\text{e}\text{\AA}$	Debye
HF	6,37	0,398	1,99
HCl	3,6	0,225	1,13
HBr	2,67	0,167	0,83
H ₂ O	6,17	0,385	1,93

Tabelle 4.1: Dipolmomente unterschiedlicher Moleküle in unterschiedlichen Einheiten.

4.2 Materie im elektrischen Feld

4.2.1 Leiter und Isolatoren

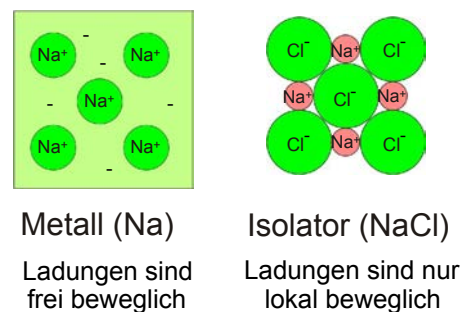


Abbildung 4.28: Geladene Bestandteile elektrisch neutraler Materie.

Auch elektrisch neutrale Materie besteht auf mikroskopischer Ebene aus geladenen Teilchen (Atomkerne, Elektronen), welche auf unterschiedliche Weise aneinander gebunden sind. Abb. 4.28 zeigt dies für 2 Beispiele. Im Fall von Natrium sind positiv geladene Atomrümpfe von frei beweglichen Elektronen umgeben. Im Fall von Kochsalz sind die Bestandteile positiv geladene Natrium-Ionen und negativ geladene Chlorid-Ionen, welche sich nicht weit von ihren Gitterplätzen entfernen können.

Auf diese geladenen Bestandteile wirken in einem elektrischen Feld Kräfte, welche sie je nach ihrer Beweglichkeit verschieben. Sind die Teilchen über makroskopische Distanzen beweglich, so spricht man von einem elektrischen Leiter; sind sie nur über mikroskopische Distanzen ($< 1\text{nm}$) beweglich, so

spricht man von einem Isolator. Wie leicht sie beweglich sind wird durch den elektrischen Widerstand quantifiziert, der im Kapitel "stationäre Ströme" diskutiert wird. Im Rahmen der Elektrostatik unterscheidet man lediglich zwischen Leitern und Nichtleitern. Letztere werden auch als Isolatoren oder Dielektrika bezeichnet.

4.2.2 Felder und elektrische Leiter

Wir betrachten zunächst elektrische Leiter. Für die Diskussion statischer elektrischer Felder kann der Widerstand eines elektrischen Leiters zu Null angenommen werden. Die direkteste Konsequenz davon ist, dass im Inneren eines elektrischen Leiters alle elektrischen Felder verschwinden.

Im Innern von elektrischen Leitern existieren keine statischen elektrischen Felder.

Dies sieht man aus folgender Überlegung: Existiert in einem Leiter ein Feld, so werden die frei beweglichen Ladungsträger (=Elektronen) verschoben. Dadurch werden positive und negative Ladungen erzeugt, welche ihrerseits ein Feld generieren. Dieses wird dem äußeren Feld überlagert und die Bewegung der Ladungsträger endet, wenn die Summe der beiden Felder verschwindet. Mit Gleichung (4.2)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = 0$$

folgt auch, dass das Potenzial im gesamten Körper konstant ist. Insbesondere bildet auch die Oberfläche eine Äquipotenzialfläche.

Das gleiche gilt an der Oberfläche für Feldkomponenten unmittelbar außerhalb des Leiters parallel zur Oberfläche: würden solche existieren, so würden die Ladungsträger sich entlang der Oberfläche verschieben bis die Felder ausgeglichen wären. Deshalb treffen die Feldlinien senkrecht auf die Oberfläche des Leiters, wie in Abb. 4.29 gezeigt.

4.2.3 Oberflächenladungen und Spiegelladungen

Da elektrische Feldlinien nur an elektrischen Ladungen enden können, müssen sich auf der Oberfläche

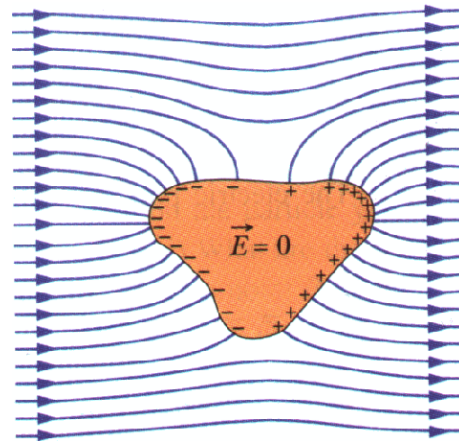


Abbildung 4.29: Feldverlauf und Oberflächenladungen bei einem metallischen Körper.

von elektrischen Leitern in einem äußeren elektrischen Feld Oberflächenladungen bilden. Diese können quantitativ aus dem Gauß'schen Satz berechnet werden, da sie die Quelle (Senke) der elektrischen Feldlinien darstellen. Die Flächenladungsdichte entspricht der elektrischen Verschiebungsdichte,

$$D = \sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \epsilon_0 E.$$

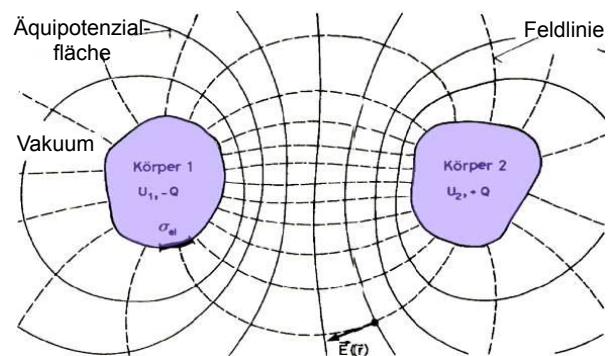


Abbildung 4.30: Äquipotenzialflächen bei metallischen Körpern.

Der Beweis, dass die Feldlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen, kann auch anders geführt werden: Wie in Abb. 4.30 gezeigt und in Abschnitt 4.2.2 diskutiert, bildet die Oberfläche eines metallischen Körpers eine Äquipotenzialfläche. Da Feld-

linien senkrecht auf Äquipotenzialflächen stehen, müssen sie senkrecht auf der Oberfläche stehen.

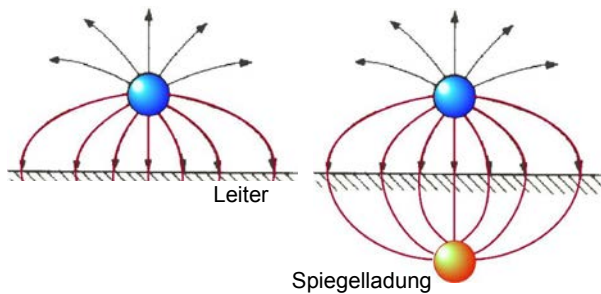
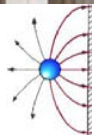
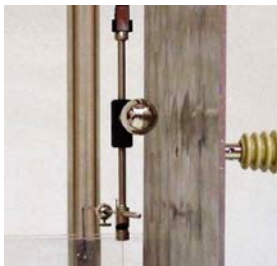


Abbildung 4.31: Links: Ladung oberhalb einer Metalloberfläche. Rechts: Ladungspaar ergibt identische Feldlinien.

Bringt man eine Ladung vor einen elektrischen Leiter, wie in Abb. 4.31 links, so verlaufen die Feldlinien genau so wie wenn sich hinter der Metalloberfläche eine entgegengesetzte Ladung befinden würde (Abb. 4.31 rechts). Man nennt diese eine Spiegelladung. In Wirklichkeit wird sie durch eine Oberflächenladungsdichte "simuliert", welche die gleichen Feldlinien erzeugt. Da die Spiegelladung entgegengesetzt zur Kugelladung ist, wirkt zwischen diesen beiden auch eine entsprechende Anziehungskraft.

Kugel und Spiegelladung



Kugel und Kugel

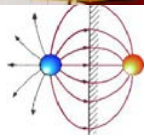
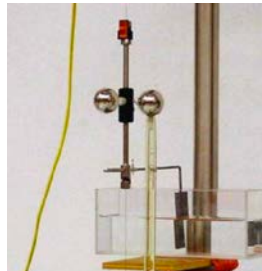


Abbildung 4.32: Links: Geladene Kugel neben einer Metalloberfläche. Rechts: 2 Entgegengesetzt geladene Kugeln.

Abb. 4.32 zeigt ein Experiment, bei dem man die Kraft auf eine geladene Kugel vergleicht für die beiden Fälle, dass (i) sie einer entgegengesetzt geladenen Kugel ausgesetzt ist, oder (ii) eine geerdete Platte

te in halber Distanz steht. Innerhalb der Fehlergrenzen misst man die gleiche Auslenkung.

4.2.4 Feldfreie Räume

Genau so wie das Feld im Inneren eines Leiters verschwindet, verschwindet es auch in einem Hohlraum im Inneren eines Leiters, sofern dieser keine Ladungen enthält.

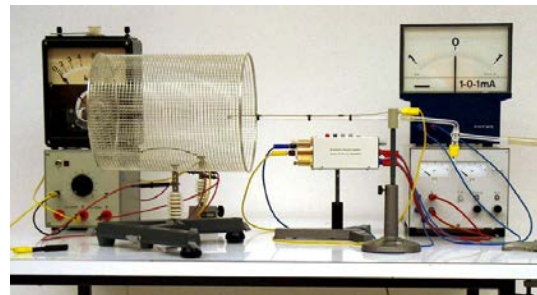


Abbildung 4.33: Messung des Feldes in einem Faraday-Käfig.

Diese Voraussage kann in einem Experiment überprüft werden, welches in Abb. 4.33 dargestellt ist: Der Hohlraum wird hier durch einen Drahtkäfig angenähert. Eine Sonde misst das Potenzial im Inneren des Käfigs: Solange man den Rändern nicht zu nahe kommt, bleibt es konstant. Hohlräume dieser Art werden als Faraday-Käfige bezeichnet.



Abbildung 4.34: Auto als Faraday-Käfig.

Faraday-Käfige ermöglichen es, äußere Felder von empfindlichen Apparaten fernzuhalten. Der gleiche Effekt schützt Insassen von Automobilen oder Seilbahnen vor dem Effekt eines Blitzes, wie in Abb. 4.34 gezeigt.

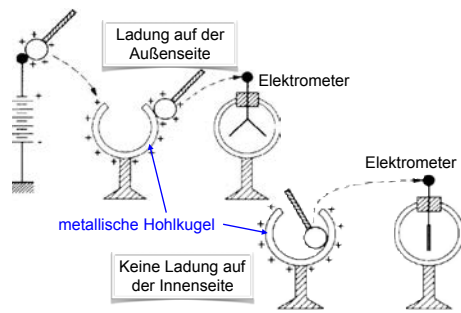


Abbildung 4.35: Transport von elektrischen Ladungen von und zu einem Leiter.

Wird eine Ladung auf einen elektrischen Leiter gebracht so wandert sie nach außen; das Feld im Innern bleibt Null (→ Abb. 4.35).

4.2.5 Influenzladung

Befindet sich ein elektrisch leitender Körper im elektrischen Feld, so werden Ladungen auf die Oberfläche so verschoben, dass das Feld im Inneren des Körpers verschwindet. Man erhält eine Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}.$$

Die so erzeugten Oberflächenladungen werden auch als Influenzladungen bezeichnet.

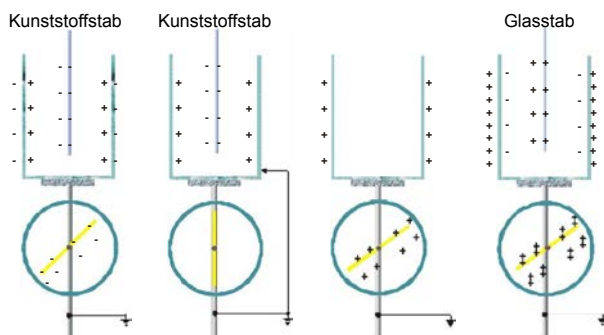


Abbildung 4.36: Erzeugung und Nachweis von Influenzladungen.

Man kann diese Influenzladungen z.B. nachweisen, indem man sie mit einem Elektrometer misst. Abb. 4.36 zeigt ein solches Elektrometer, welches mit der äußeren Seite des Bechers verbunden. Bringt man

einen geladenen Kunststoffstab in das Innere des Bechers, so wird eine Oberflächenladung erzeugt, wobei die Innenseite des Bechers entgegengesetzt zur Ladung des Stabes geladen wird, die Außenseite gleich wie der Stab. Wird die Außenseite geerdet, so wird die dort erzeugte Ladung entfernt und das Elektrometer zeigt keine Ladung mehr an. Entfernt man zuerst das Erdungskabel und anschließend den Stab, so stellt man fest, dass die Dose jetzt geladen ist. Das letzte Bild zeigt, wie man mit einem entgegengesetzt geladenen Stab zusätzliche Influenzladung auf den Becher bringen kann.

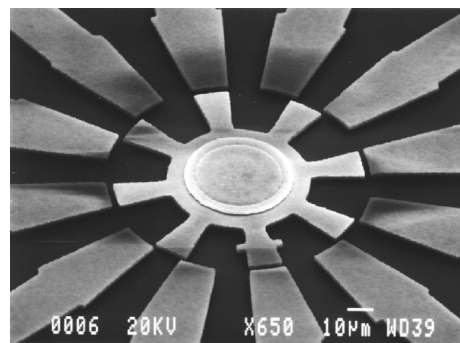


Abbildung 4.37: Elektrostatischer Mikromotor.

Auf der Basis von Influenzladung kann man elektrische Maschinen herstellen. Solche elektrostatischen Motoren haben zwar bisher kaum eine Bedeutung. Sie werden jedoch in Mikromaschinen (→ Abb. 4.37) verwendet, da sie einfacher zu konstruieren sind als konventionelle elektromagnetische Maschinen.

4.2.6 Bandgenerator

Ähnliche Ladungsübertragung verwendet man teilweise für die Erzeugung hoher Spannungen, z.B. beim Van-de-Graaff-Generator, Wie in Abb. 4.38 gezeigt, wird dafür ein umlaufendes elektrisch isolierendes Band verwendet, beispielsweise ein Gummiband, welches als Förderband wirkt. Es wird durch Reibung oder durch Aufsprühen der Ladung (siehe Koronaentladung) aus einer externen Spannungsquelle elektrisch aufgeladen. Die Ladung wird durch die Bewegung des Bandes in das Innere einer

⁴Robert Jemison Van de Graaff (1901 - 1967)

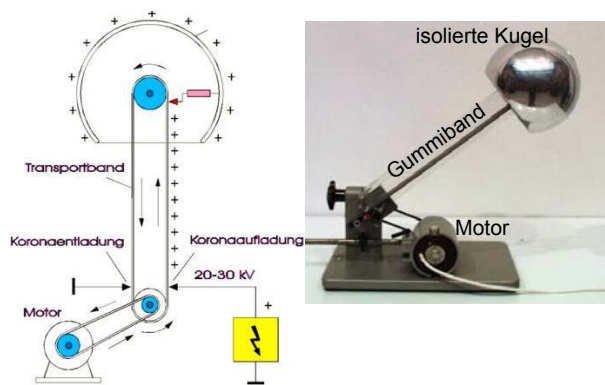


Abbildung 4.38: Van-de-Graaff Generator; links: Prinzip; rechts: Foto.

metallischen Hohlkugel transportiert und dort durch eine mit der Kugel leitend verbundene Bürste vom Band “abgestreift”. Sie wandert dann auf die Außenseite der Kugel; da das Innere der Kugel feldfrei bleibt, können immer noch zusätzliche Ladungen eingebracht werden und die Kugel kann dadurch auf immer höhere Spannung gegenüber der Umgebung aufgeladen werden. Die Spannung wird nur begrenzt durch Funkendurchschläge bei zu hoher Feldstärke. Mit einem einfachen Demonstrationsgerät können damit Spannungen bis zu 240 kV erzeugt werden. Mit weiter entwickelten Geräten erhält man Spannungen bis zu einigen MV. Solche Geräte werden z.B. für die Beschleunigung von Elementarteilchen verwendet.

4.2.7 Bewegung geladener Teilchen im elektrischen Feld

Ein elektrisch geladenes Teilchen mit Ladung q erfährt im elektrischen Feld eine Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ und wird dadurch beschleunigt:

$$\vec{a} = \vec{E} \frac{q}{m}.$$

Damit wird (elektrostatische) potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Durchläuft das Teilchen eine Spannung $V = \phi_2 - \phi_1$, so ändert sich seine kinetische Energie um

$$\Delta \mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = -\Delta \mathcal{E}_{pot} = -q(\phi_2 - \phi_1).$$

Die resultierende Energie ist deshalb gegeben durch das Produkt aus Ladung und Spannungsdifferenz. Man verwendet deshalb für die kinetische Energie von geladenen Teilchen gerne die Einheit

$$\begin{aligned} \text{Elektronenvolt} &= \text{eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1 \text{V} \\ &= 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{J}, \end{aligned}$$

oder die üblichen Vielfachen meV, keV, MeV, GeV u.s.w. Ein Elektronenvolt ist die Energie, welche ein Teilchen mit einer Elementarladung beim Durchlaufen der Spannung 1 V erhält.

Um eine Idee von den relevanten Größenordnungen zu erhalten, berechnen wir die Geschwindigkeit eines Elektrons nach Beschleunigung in einem Feld von 1000 V, also bei einer Energie von 1 keV:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \\ &= 1,88 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,06 c, \end{aligned}$$

d.h. etwa 6% der Lichtgeschwindigkeit. Dementsprechend treten bei Geschwindigkeiten in dieser Größenordnung bereits relativistische Effekte auf.

Fliegt ein geladenes Teilchen senkrecht zum Feld in eine Region mit elektrischem Feld, so gilt das Unabhängigkeitsprinzip: es behält seine bisherige Geschwindigkeitskomponente bei und wird in Feldrichtung beschleunigt, d.h. es wird abgelenkt.

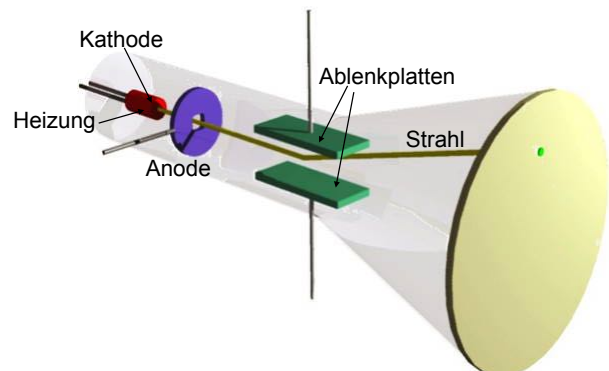


Abbildung 4.39: Funktionsprinzip eines Oszilloskops.

Dies wird u.a. in Oszillographen verwendet, wo eine Ablenkspannung die Bewegung von Elektronen beeinflussen, welche auf den Schirm geschossen werden. Abb. 4.39 zeigt das zu Grunde liegende Funktionsprinzip.

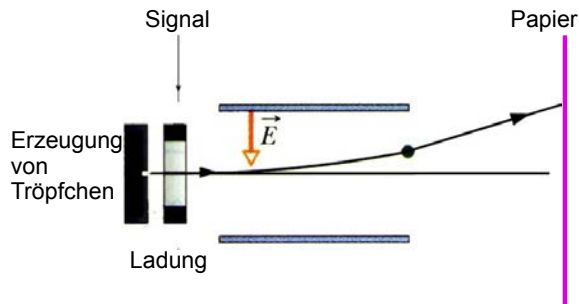


Abbildung 4.40: Funktionsprinzip eines Tintenstrahldruckers.

Tintenstrahldrucker verwenden ein ähnliches Prinzip. Wie in Abb. 4.40 dargestellt, werden zunächst die Farbtröpfchen erzeugt. Diese erhalten in einer zweiten Stufe eine Ladung, welche von außen kontrolliert werden kann. Je nach Stärke der Ladung werden sie im folgenden Feld stärker oder weniger stark abgelenkt.



Abbildung 4.41: Kerzenflamme in einem elektrischen Feld.

Eine Kerze, die in einem elektrischen Feld brennt, erzeugt geladene Teilchen, welche in einem elektrischen Feld abgelenkt werden, wie in Abb. 4.41 gezeigt.

4.2.8 Dipole in einem äußeren Feld

In einem homogenen elektrischen Feld erfährt ein Dipol keine Translationsbeschleunigung, da die beiden Kräfte auf die beiden Ladungen entgegengesetzt sind, wie in Abb. 4.42 gezeigt.

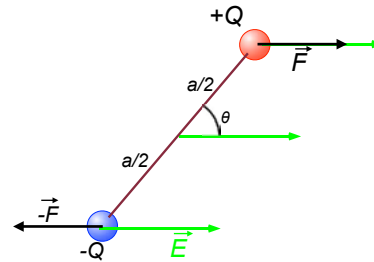


Abbildung 4.42: Paar von Punktladungen in einem homogenen elektrischen Feld.

Ist der Dipol nicht parallel zur Feldrichtung, sind die beiden Kräfte seitlich gegeneinander versetzt. Sie bilden ein Kräftepaar, welches ein Drehmoment erzeugt,

$$\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F} = \vec{a} \times (Q\vec{E}) = Q\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Das Drehmoment \vec{M} ist somit proportional zu Feldstärke \vec{E} und Dipolmoment \vec{p} . Es ist maximal wenn der Dipol senkrecht zum Feld orientiert ist und verschwindet bei paralleler Orientierung, also wenn der Winkel θ zwischen Dipol und Feldrichtung ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Sein Betrag hängt sinusförmig vom Winkel θ ab:

$$|M| = |p||E| \sin \theta.$$

Der Dipol enthält somit potenzielle Energie als Funktion des Winkels zur Feldrichtung:

$$\mathcal{E}_{pot} = \int M(\theta) d\theta = -|p| \cdot |E| \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

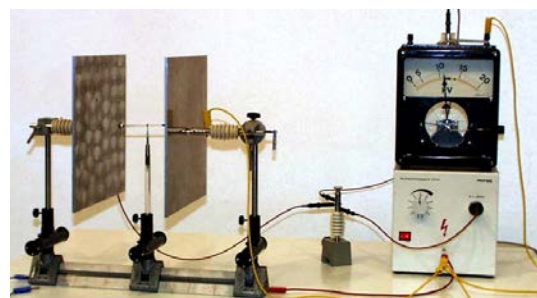


Abbildung 4.43: Drehung eines Dipols in einem homogenen elektrischen Feld.

Dieser Effekt kann experimentell verifiziert werden, indem man zwei Kugeln, die an einem Glasstab befestigt sind, mit entgegengesetzten Ladungen auflädt. Wie in Abb. 4.43 gezeigt, wird das elektrische

Feld erzeugt, indem zwei parallele metallische Platten auf beiden Seiten des Dipols aufgestellt und mit einer Hochspannungsquelle verbunden werden. Die positiv geladene Kugel wird von der negativ geladenen Platte angezogen, die negativ geladene Kugel von der positiv geladenen Platte. Wechselt man die Polarität der Spannung an den beiden Platten, so dreht sich der Dipol um 180 Grad.

4.2.9 Dipol im inhomogenen Feld

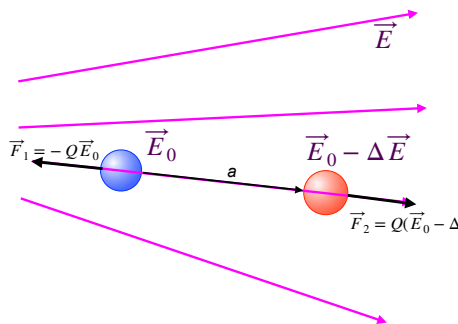


Abbildung 4.44: Kräfte auf einen elektrischen Dipol in einem inhomogenen Feld.

In einem inhomogenen Feld wirkt zusätzlich auch eine Translationskraft auf einen elektrischen Dipol. Diese kommt dadurch zustande, dass die Kräfte auf die beiden Ladungen ungleich groß sind. Abb. 4.44 zeigt einen einfachen Fall, wo der Dipol parallel zum Feld orientiert ist, wo also das Drehmoment verschwindet. Dann beträgt die gesamte Kraft

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 = -QE_0 + Q(E_0 - \Delta E) = -Q\Delta E,$$

d.h. sie ist gegeben durch das Produkt von Ladung und Änderung der Feldstärke. Wir können dies auch schreiben als

$$F_{\Sigma} = -Qa \frac{\Delta E}{a} = p \frac{dE}{dr}.$$

Die Kraft ist somit proportional zur Stärke des Dipols und zum Gradienten des elektrischen Feldes.

Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man die Kraft aus dem Gradienten der potenziellen Energie berechnet:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_{pot} = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = |\vec{p}| |\vec{\nabla}| |\vec{E}|,$$

wobei wir angenommen haben, dass der Dipol in Feldrichtung orientiert bleibt. Die Kraft ist somit proportional zur Änderung der Feldstärke.

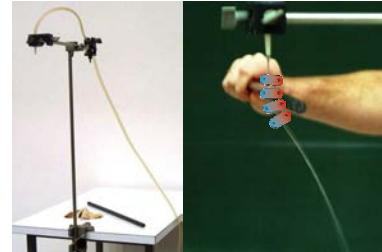


Abbildung 4.45: Ablenkung eines Wasserstrahls durch das Feld eines geladenen Kunststoffstabes..

Dieser Effekt, dass der Dipol in die Richtung des stärkeren Feldes gezogen wird, lässt sich anhand eines einfachen Experiments nachvollziehen (→ Abb. 4.45). Die Dipole sind in diesem Fall die Wassermoleküle und das inhomogene elektrische Feld wird durch einen elektrostatisch aufgeladenen Kunststoffstab erzeugt.

4.3 Kondensatoren

4.3.1 Der Plattenkondensator

Kondensatoren sind einfache Speicher für elektrische Ladungen. Offenbar sind alle Anordnungen elektrischer Leiter Ladungsspeicher, da sich auf der Oberfläche Ladungen ansammeln können. Es werden im allgemeinen gleiche große negative wie positive Ladungen gespeichert, an unterschiedlichen Orten. Zwischen den beiden Ladungsschwerpunkten entsteht dadurch eine Spannung oder Potenzialdifferenz.

Ein besonders einfaches Beispiel ist der Plattenkondensator. Wie in Abb. 4.46 gezeigt, werden in einem Plattenkondensator elektrische Ladungen auf zwei Metallplatten gespeichert, die durch einen Isolator (z. B. Luft) getrennt sind. Aus Symmetriegründen steht das Feld senkrecht zur Oberfläche. Ist der Abstand d und die Potenzialdifferenz $U = U_2 - U_1$, dann ist die Feldstärke $E = U/d$.

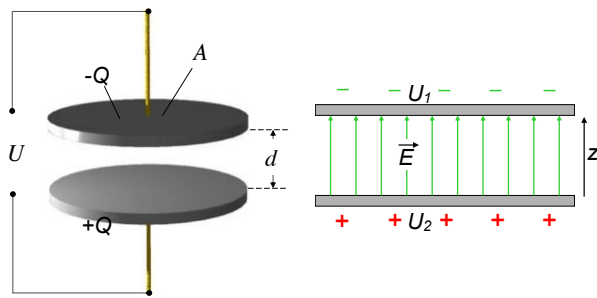


Abbildung 4.46: Plattenkondensator.

Die Ladung, welche auf einem solchen Kondensator gespeichert werden kann, hängt ab von der angelegten Spannung. Messungen zeigen, dass die auf einem Kondensator gespeicherte Ladung in guter Näherung proportional zur angelegten Spannung ist, $Q \propto U$. Die Steigung dieser Geraden, also das Verhältnis

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = \frac{C}{V} = F = \text{Farad}$$

misst die Speicherfähigkeit des Kondensators und wird als Kapazität bezeichnet.

4.3.2 Felder im Plattenkondensator

Aus der Definition der elektrischen Verschiebung (\rightarrow Kap. 4.1.9) folgt

$$D = \frac{Q}{A} \rightarrow Q = DA.$$

Die Spannung über dem Kondensator ist gleich der Potentialdifferenz und damit gleich dem Integral des elektrischen Feldes,

$$U = Ed.$$

Im Vakuum gilt gleichzeitig $D = \epsilon_0 E$, so dass die Kapazität des Plattenkondensators als

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{DA}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.4)$$

gegeben ist.

Die Beziehung (4.4) wurde direkt aus der Definition der beiden Größen E und D hergeleitet: Die gesamte Ladung ist durch das Produkt aus Verschiebungsdichte D und Fläche A gegeben, während die Spannung proportional zum Feld und zum Abstand der

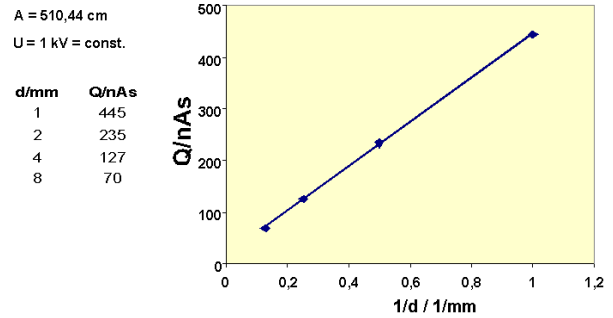


Abbildung 4.47: Auf dem Plattenkondensator gespeicherte Ladung.

Platten ist. Bei konstanter Feldstärke nimmt somit die Spannung mit dem Abstand der Platten zu. Die experimentellen Daten von Fig. 4.47 verifizieren die Proportionalität $C \propto d^{-1}$.

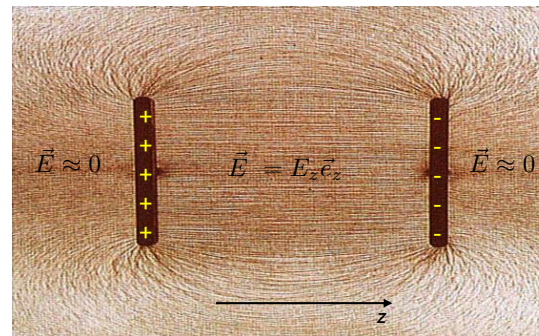


Abbildung 4.48: Feld im Plattenkondensator.

Wie in Abb. 4.48 gezeigt, verlaufen die Feldlinien zwischen den beiden Platten in guter Näherung parallel zueinander und senkrecht zu den Platten. Ein wichtiger Aspekt des Plattenkondensators ist, dass das Feld zwischen den Platten sehr homogen ist. Außerhalb ist der Verlauf komplizierter und kann nicht durch eine analytische Funktion dargestellt werden.

4.3.3 Beispiele

Als typisches Beispiel betrachten wir einen Plattenkondensator mit einer Fläche von $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ und einem Plattenabstand von $d = 1 \text{ mm}$. Damit beträgt die Kapazität

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{10^{-4}}{10^{-3}} \text{ F} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F} \approx 1 \text{ pF}.$$

Auf einem solchen Kondensator kann somit bei einer Spannung von $U = 1 \text{ kV}$ eine Ladung $Q = 1 \text{ nC}$ gespeichert werden.

Als weiteres Beispiel kann man ausrechnen, wie groß ein Plattenkondensator mit einer Kapazität von 1 F sein muss, wenn der Abstand 1 mm beträgt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{1 \text{ F} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}} \\ &= 1,13 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \approx 100 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Vergrößert man den Abstand zwischen den Platten, so nimmt die Kapazität ab. Man kann dabei die Spannung konstant halten (indem man den Kondensator an eine Spannungsquelle anschließt); dann nimmt die Ladung auf den Platten ab. Oder man kann die Ladung konstant halten, indem man den Kondensator von der Spannungsversorgung trennt. Dann steigt die Spannung, während das E -Feld konstant bleibt.

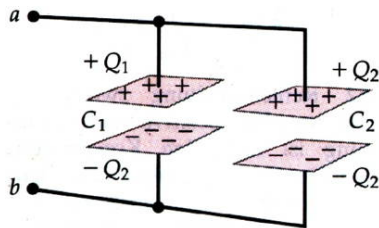


Abbildung 4.49: Parallelschaltung von 2 Kondensatoren.

Kondensatoren können auch untereinander verbunden werden. Abb. 4.49 zeigt als Beispiel eine Parallelschaltung von 2 Kondensatoren. Bei gleichem Abstand zwischen den beiden Plattenpaaren ist die Spannung für beide gleich und die Ladungen addieren sich. Somit ist die Gesamtkapazität

$$C_p = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = C_1 + C_2,$$

d.h. bei Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten. Bei Reihenschaltung gilt hingegen

$$C_s = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}.$$

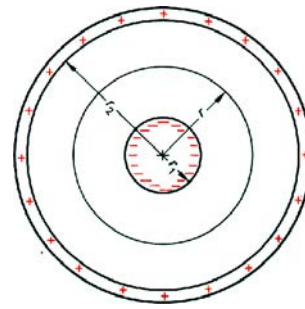


Abbildung 4.50: Kugelkondensator.

4.3.4 Kugelkondensator

Ein weiterer wichtiger Spezialfall ist der Kugelkondensator (\rightarrow Abb. 4.50). Man kann sich die beiden Platten zu konzentrischen Kugeln gebogen vorstellen, welche entgegengesetzte Gesamtladungen tragen. Für die Berechnung der Kapazität $C = Q/U$ benötigen man die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Platten, die man aus dem Potenzial bestimmen kann. Wie in Kapitel 4.1.5 gezeigt, erzeugt die Ladung Q auf der inneren Kugel ein Potenzial

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Die Potenzialdifferenz beträgt somit

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

und die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Ist die äußere Kugelschale nicht vorhanden (d.h. im Unendlichen), so beträgt die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_1.$$

Dies ist insbesondere für die Abschätzung der Kapazität von beliebigen Leiterelementen nützlich. Man erhält z.B. folgende typische Kapazitäten

- mikroelektronisches Schaltelement $r \approx 0,2 \mu\text{m}$
 $C \sim 2 \cdot 10^{-17} \text{ F}$.
- Kugel im Vorlesungsexperiment $r \approx 2 \text{ cm}$ $C \sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 2 \text{ pF}$.

- Erde $r \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ $C \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 700 \mu\text{F}$.

Die Kapazität eines Schaltelements ist ein wichtiger Beitrag zur Schaltgeschwindigkeit von elektronischen Bauteilen. Man versucht deshalb, bei schnellen Schaltungen die Kapazitäten gering zu halten.

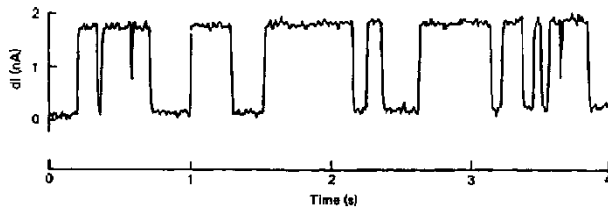


Abbildung 4.51: Messung der Bewegung einzelner Elektronen.

Bei genügend kleinen Kapazitäten stellt man fest, dass die Ladung quantisiert ist. Wie in Abb. 4.51 gezeigt, kann man beobachten, wie Elektronen einzeln auf die Kondensatoren gelangen [3].

4.3.5 Ladungstrennung im Kondensator

Man kann die Berechnung der Kapazität überprüfen indem man Ladung und Spannung unabhängig misst. Dies ist ein Hinweis darauf, dass Feld und Verschiebungsdichte unabhängige Größen sind.

Die Influenz kann man über die Kapazitätsänderung nachweisen: es werden Ladungen in den Metallplatten im Kondensator induziert, welche das Feld abschirmen.

Abb. 4.52 zeigt, wie man Ladungen "erzeugen" kann, indem man sie trennt. Dazu bringt man zwei isolierte, elektrisch leitende Platten in das Feld eines Plattenkondensators. Wie in Kapitel 4.2.2 diskutiert, ist das Feld im Innern des Leiters $=0$ und auf der Oberfläche findet man Ladungen - links negative, rechts positive. Trennt man die beiden Platten, besitzt die linke deshalb eine negative Ladung, die rechte eine positive. Man kann die Ladungsspeicher aus dem Feld herausnehmen und ihre Ladungen z.B. auf einem Elektrometer messen.

Dieses Experiment zeigt auch den Unterschied zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebungsdichte. Bei der Trennung der Platten bleibt die

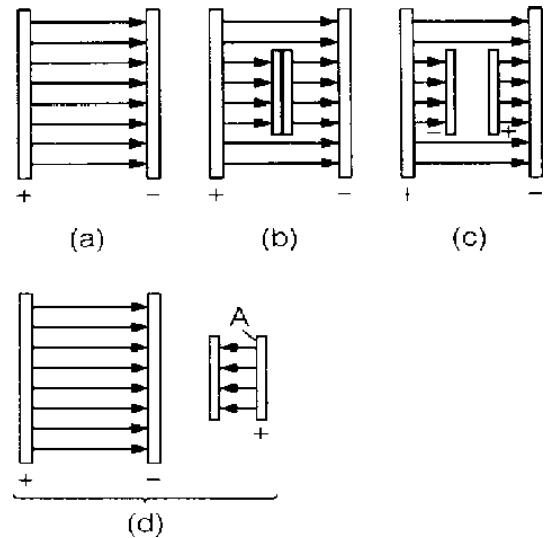


Abbildung 4.52: Elektrische Verschiebung in einem Plattenkondensator.

Ladungsdichte auf ihrer Oberfläche wie auch auf der Oberfläche der Kondensatorplatten konstant, d.h. die Verschiebungsdichte ist konstant. Ein Teil des Raums im Kondensator wird jedoch feldfrei und die gesamte Spannung über dem Kondensator nimmt dadurch ab.

4.3.6 Energie des elektrischen Feldes

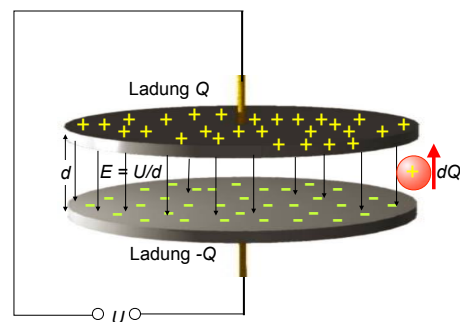


Abbildung 4.53: Transport zusätzlicher Ladung δQ zwischen Kondensatorplatten mit Ladung Q .

Das elektrische Feld enthält Energie; diese kann man messen, z.B. indem man einen Kondensator entlädt, oder indem man ihn lädt. Dies eignet sich auch für die Berechnung der Energie. Am einfachsten ist die

se Berechnung anhand des in Abb. 4.53 gezeigten Schemas in einem Plattenkondensator. Wird Ladung dQ von der negativen zur positiven Platte transportiert, so muss dafür eine Arbeit $dW = U dQ$ aufgewendet werden. Um den Kondensator von 0 auf die Ladung Q zu laden, beträgt die gesamte Arbeit

$$W_{el} = \int_0^Q U dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Hier wurde die Beziehung $U = Q/C$ zwischen Spannung, Ladung und Kapazität eines Kondensators verwendet. Diese Arbeit wird in der Energie des elektrischen Feldes gespeichert. Dies wird besser sichtbar durch die Umformung

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} C(Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 V E^2, \end{aligned}$$

wobei $V = Ad$ das Volumen zwischen den Platten darstellt. Somit ist die Energiedichte des elektrischen Feldes, d.h. die Energie pro Volumen

$$w_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (4.5)$$

beträgt. Dieser Ausdruck gilt allgemein, nicht nur für Plattenkondensatoren. Der Wert $\epsilon_0 E^2/2$ gilt nur im Vakuum, der Ausdruck $\vec{D} \cdot \vec{E}/2$ gilt auch für Dielektrika (siehe Kap. 4.4).

4.3.7 Kräfte auf Kondensatorplatten

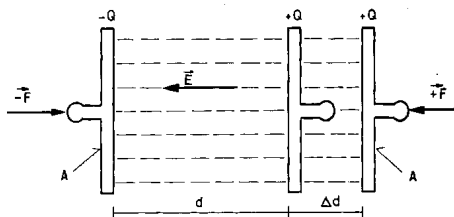


Abbildung 4.54: Kräfte auf die Kondensatorplatten.

Wenn das Feld zwischen zwei Kondensatorplatten Energie enthält, muss eine Kraft auf die Kondensatorplatten wirken (\rightarrow Abb. 4.54); umgekehrt muss am System Arbeit geleistet werden, wenn man die

Platten auseinander zieht. Bei einer solchen Operation bleibt die Feldstärke (und damit die Energiedichte) konstant, während das Volumen und damit die Gesamtenergie zunimmt. Um den Abstand um den Betrag Δd zu vergrößern, benötigt man die Arbeit

$$W = A \Delta d w_{el} = A \Delta d \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = F \Delta d.$$

Somit muss die Kraft auf jede der beiden Platten

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 A E^2 = \frac{1}{2} C d E^2 = \frac{1}{2} C U E = \frac{1}{2} Q E$$

betragen.

Es mag zunächst erstaunen, dass hier nicht die gesamte Ladung mal die Feldstärke eingesetzt werden muss. Dies ist ein klassisches Beispiel dafür, dass in das Kraftgesetz $F = qE$ nicht das gesamte Feld eingesetzt werden muss, sondern das ungestörte Feld, welches ohne die Probeladung vorhanden ist. Das Feld ohne Probeladung wird durch das Feld einer ebenen Ladungsverteilung gegeben, welches gleichmäßig auf beide Oberflächen einer dünnen Platte verteilt ist. Wie in Kapitel 4.1.9 hergeleitet beträgt es $D = \frac{1}{2} \frac{Q}{A}$ resp.

$$E_{ungest.} = \frac{1}{2} \frac{Q}{A \epsilon_0},$$

während das "gestörte" Feld zwischen den Kondensatorplatten

$$E_{gest.} = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

beträgt, also einen Faktor 2 stärker ist.

Diese Herleitung zeigt eine der Möglichkeiten auf, elektrische Einheiten wie Spannung oder Feldstärke auf eine mechanische Kraftmessung zurückzuführen.

Die Tatsache, dass die Energiedichte proportional zum Quadrat des Feldes ist, führt dazu, dass es energetisch sinnvoller ist, das Feld über einen größeren Bereich zu verteilen; anders ausgedrückt: Feldlinien "stoßen sich ab".

Die gleichen Gesetze für den Energieinhalt des elektrischen Feldes gelten auch für zeitabhängig Felder oder elektromagnetische Wellen. Dies erlaubt z.B. die Übertragung von Energie im Sonnenlicht, in Mikrowellen oder Lasern (\rightarrow Kap. 6.5).

4.4 Dielektrika

Ein Dielektrikum ist ein Material, welches elektrischen Strom nur sehr schwach leitet. Deshalb können im Innern von Dielektrika elektrische Felder existieren.

4.4.1 Polarisation in Dielektrika

In Kapitel 4.3.5 wurde gezeigt, dass auf der Oberfläche eines elektrischen Leiters in einem elektrischen Feld Ladungen induziert werden. Einen ähnlichen Effekt findet man, wenn man in einen Plattenkondensator ein polarisierbares, nichtleitendes Material einbringt. Ein solches Material wird als Dielektrikum bezeichnet.

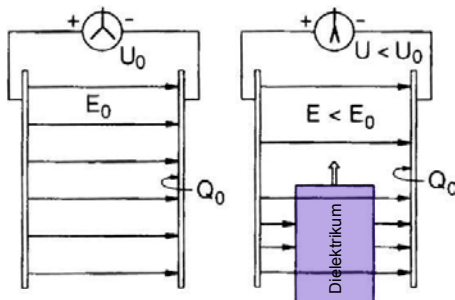


Abbildung 4.55: Änderung der Spannung durch Einschleichen eines Dielektrikums.

Wenn der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt wurde, sinkt beim Einbringen des dielektrischen Materials die Spannung (und damit das elektrische Feld) von einem Anfangswert U_0 auf einen Endwert $U = U_0/\epsilon_r$, wie in Abb. 4.55 gezeigt. Da die Ladung auf den Platten sich dabei nicht ändert (sie sind ja vom Netzteil abgetrennt), folgt, dass die Kapazität des Kondensators gestiegen ist, von C_{Vakuum} auf $C_{\text{Dielek.}}$. Die dimensionslose Proportionalitätskonstante

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{Dielek.}}}{C_{\text{Vakuum}}}$$

zwischen diesen beiden Werten wird als dielektrische Konstante oder relative Permittivität bezeichnet. Sie ist eine Materialkonstante des polarisierbaren Materials. Da die Kapazität des Kondensators

gegeben ist durch

$$C = \frac{Q}{U} = D \frac{A}{Ed}$$

steigt sie durch das Einfügen des Dielektrikums auf

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d},$$

also um den Faktor ϵ_r . Die Ladungsdichte auf den Kondensatorplatten ist gemäß 4.3 $C/A = D$, mit D als elektrische Verschiebungsdichte. Gleichzeitig ist die Feldstärke

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{Cd} = D \frac{A}{Cd} = D \frac{A}{d} \frac{d}{\epsilon_0 \epsilon_r A}.$$

Somit lautet die Beziehung zwischen \vec{D} und \vec{E}

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}.$$

Das Produkt $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ wird als Permittivität bezeichnet.

Material	Dielektrizitätszahl ϵ_r	Durchschlagsfestigkeit/kV · mm ⁻¹
Bakelit	4,9	24
Glas	5,6	14
Glimmer	5,4	10 – 100
Luft	1,00059	3
Neopren	6,9	12
Papier	3,7	16
Paraffin	2,1 – 2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Polystyrol	2,55	24
Porzellan	7	5,7
Transformatoröl	2,24	12
Wasser (20 °C)	80	

Abbildung 4.56: Dielektrische Konstanten unterschiedlicher Materialien.

Abb. 4.56 listet dielektrische Konstanten von typischen Materialien. Sie bewegen sich zwischen 1 und 10. Leicht polarisierbare Flüssigkeiten wie z.B. Wasser können bis etwa 100 gehen, während einige spezielle Materialien darüber hinaus gehen. Dabei handelt es sich um sog. ferroelektrische Materialien. Diese Substanzen werden in Kondensatoren verwendet um hohe Kapazitäten zu erreichen. Die Größenordnungen dieser Materialkonstanten sind auch interessant für moderne Hochleistungskondensatoren, welche Kapazitäten bis zu 1 F aufweisen. Man erhält solche Kapazitäten durch eine Kombination

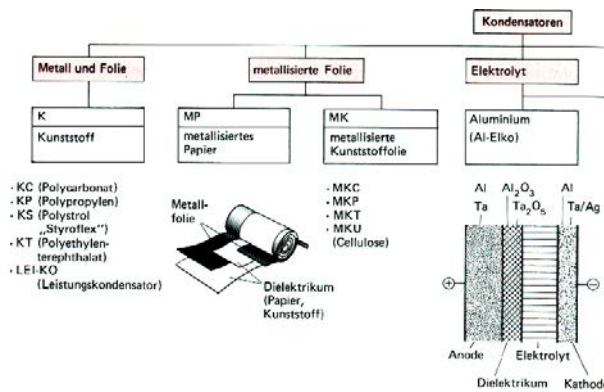


Abbildung 4.57: Kondensatortypen.

von großer Oberfläche (viele m^2), kleinem Abstand ($\sim \mu\text{m}$) und großer Dielektrizitätskonstante (bis zu 1000).

Technisch können sehr unterschiedliche Systeme als Kondensatoren genutzt werden. Abb. 4.57 zeigt eine Übersicht. Neben der Kapazität ist auch die (maximale) Betriebsspannung eines Kondensators eine wesentliche Größe, sowie (nur für kleine Kapazitäten) das Verhalten bei hohen Frequenzen. Kommerzielle Kondensatoren sind jeweils auf einen Bereich (Kapazität / Spannung / Frequenz) optimiert.

4.4.2 Mikroskopisches Modell

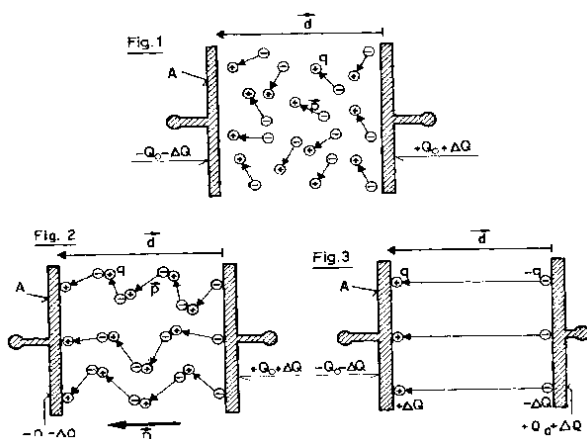


Abbildung 4.58: Modell für die molekularen Dipole eines Dielektrikums im Feld eines Plattenkondensators.

Den Unterschied zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebung kann man mit Hilfe eines einfachen Modells auf die molekulare oder atomare Struktur des Materials zurückführen. Wie in Abb. 4.58 gezeigt, setzen sich die relevanten Materialien häufig aus Dipolen zusammen. In Abwesenheit eines Feldes (obere Grafik) ist das Material auf Skalen oberhalb der molekularen Skala elektrisch neutral.

In Anwesenheit eines Feldes (unterer Teil von Abb. 4.58) orientieren sich die Dipole entlang des Feldes. Im Innern des Materials heben sich Paare von positiven und negativen Ladungen gegenseitig auf. Somit bleiben nur die Ladungen an der Oberfläche des Materials übrig. Diese sind den Ladungen auf der Kondensatorplatte entgegen gerichtet. Die Summe aus den Ladungen auf der Kondensatorplatte und denjenigen auf der Oberfläche des Dielektrikums sind demnach um den Faktor $1/\epsilon_r$ geringer als ohne das Dielektrikum.

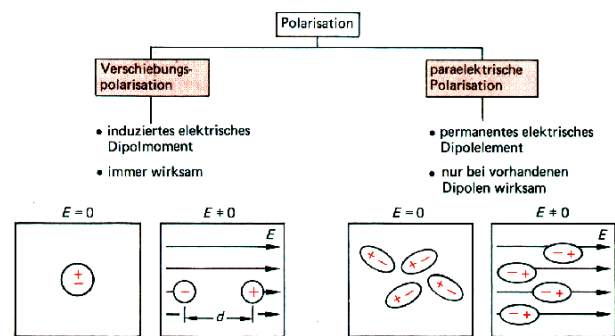


Abbildung 4.59: Beiträge zur Polarisation.

Wie in Abb. 4.59 gezeigt, können diese molekularen Dipole auf verschiedene Arten zustande kommen: zum einen kann das äußere elektrische Feld die Elektronenhülle gegenüber dem positiv geladenen Kern verschieben. Dieser Effekt tritt bei allen Materialien auf.

Der zweite Effekt tritt nur in Materialien auf, welche mikroskopische (meist molekulare) statische Dipole enthalten. Wie in Abschnitt 4.1.13 diskutiert, besitzen asymmetrische Moleküle wie z.B. Wasser ein permanentes elektrisches Dipolmoment. Sind die Moleküle zufällig orientiert (z.B. in einer Flüssigkeit), so besitzt das Material normalerweise trotzdem kein makroskopisches Dipolmoment. Wird ein elek-

trisches Feld angelegt so wird die Orientierung der Dipole in Feldrichtung jedoch energetisch gegenüber den anderen Orientierungen bevorzugt. Damit entsteht im Mittel eine Polarisation, welche invers proportional zur Temperatur ist. Solche Materialien werden als paraelektrisch bezeichnet. Sie zeigen eine bevorzugte Orientierung der Dipole in Feldrichtung, so dass die positiven Ladungen näher bei der negativ geladenen Platte liegen und umgekehrt.

4.4.3 Depolarisationsfeld

Da die Ladungen der Dipole im Inneren des Mediums sich gegenseitig kompensieren, bleibt das Material elektrisch neutral. Aufgrund der Oberflächenladungen enthält es jedoch ein Dipolmoment \vec{P} . Für viele Materialien ist dieses proportional zum elektrischen Feld \vec{E} ,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \alpha \vec{E},$$

wobei die Proportionalitätskonstante χ_e als Suszeptibilität bezeichnet wird und α als Polarisierbarkeit.

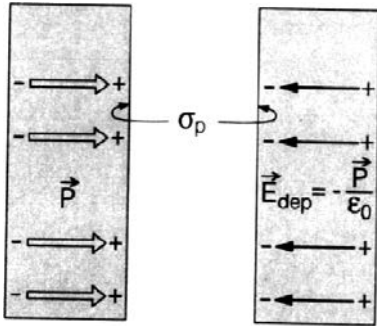


Abbildung 4.60: Depolarisationsfeld.

Wie in Abb. 4.60 gezeigt, erzeugt dieses Dipolfeld ein Depolarisationsfeld

$$\vec{E}_{dep} = -\vec{P}/\epsilon_0 = -\chi_e \vec{E},$$

welches dem äußeren Feld entgegen-gerichtet ist. Wenn wir das elektrische Feld (weit) außerhalb des Mediums mit E_0 bezeichnen, erhalten wir im Material ein reduziertes Feld

$$\vec{E}_m = \vec{E}_0 + \vec{E}_{dep} = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E}_m.$$

Aufgelöst nach \vec{E}_m erhält man $\vec{E}_m = \vec{E}_0/(\chi + 1)$. Damit wird auch die Spannung zwischen den Platten auf den Wert

$$U = \frac{U_0}{\chi_e + 1} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

reduziert. Man identifiziert somit

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e.$$

Da die Oberflächenladung konstant geblieben ist, bleibt die elektrische Verschiebungsdichte D konstant. Somit gilt für ein Dielektrikum mit Suszeptibilität χ_e , resp. Dielektrizitätskonstante ϵ_r

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Diese Ausdrücke stellen einen Spezialfall dar; gerechnet für den einfachsten Fall eines Plattenkondensators. Allgemein hängt das Feld im Dielektrikum auch von dessen Form ab.

Diesen Effekt kann man auch beobachten, wenn man die Platten an eine Spannungsquelle angeschlossen hat. In diesem Fall bleibt die elektrische Feldstärke E die gleiche wie ohne Dielektrikum; hingegen steigt die Ladung auf den Kondensatorplatten und damit die Verschiebungsdichte $D = \sigma = Q/A$. Die zusätzlichen Ladungen auf den Kondensatorplatten werden durch die Oberflächenladungen des Dielektrikums kompensiert.

Diese Ladung ist die sog. Polarisationsladung, die durch das elektrische Feld im Dielektrikum erzeugt wird. Das Feld der Polarisationsladungen kompensiert zum Teil das Feld der Ladungen auf den Kondensatorplatten.

4.4.4 Kräfte auf Dielektrika in Feldrichtung

Die beiden Ladungsschwerpunkte in einem Dielektrikum werden vom Feld in entgegengesetzte Richtungen gezogen, wie in Abb. 4.61 gezeigt. Es besteht somit eine Zugspannung.

Die Oberflächenladungsdichte des Dielektrikums beträgt

$$\sigma = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D.$$

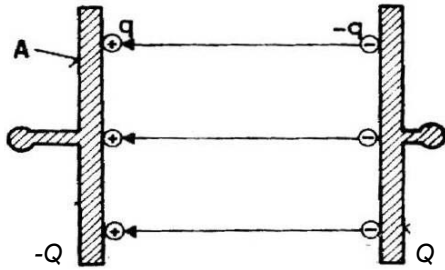


Abbildung 4.61: Kraft auf Dielektrikum.

Die Zugspannung (d.h. Kraft pro Fläche) erhalten wir, wenn wir die Kraft auf diese ebene Ladungsverteilung im äußeren Feld E_0 berechnen. Wie wir beim Plattenkondensator gefunden hatten, beträgt sie:

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} \sigma E_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D E_0 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \epsilon_0 \epsilon_r E_0^2.$$

Diese Zugspannungen können zu einer messbaren Formänderung führen, wenn die Dielektrizitätskonstante genügend groß ist. Dies ist vor allem in ferroelektrischen Materialien der Fall.

Eine Längenänderung aufgrund einer angelegten Spannung wird als piezoelektrischer Effekt bezeichnet. Man kann Piezokeramiken z.B. als Lautsprecher verwenden, aber auch als Stallelemente, welche sehr schnell und präzise Längenänderungen erzeugen können (z.B. im Rastertunnelmikroskop).

Umgekehrt erzeugt ein Druck auf ein solches Material eine Umorientierung der Dipole und dadurch eine Spannung. Man verwendet dies u. A. für Mikrophone.

4.4.5 Kräfte auf Dielektrika senkrecht zur Feldrichtung

Durch das Einschieben eines Dielektrikums in einen Plattenkondensator sinkt die Feldstärke und damit die elektrische Feldenergie. Somit muss eine Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_{pot}$$

existieren, welche das Dielektrikum in den Spalt des Kondensators hineinzieht.

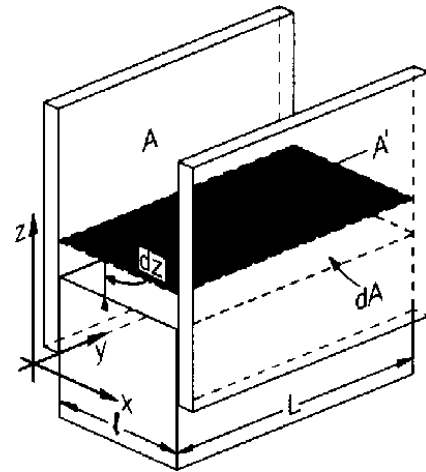


Abbildung 4.62: Flüssiges Dielektrikum im E-Feld.

Besteht das Dielektrikum aus einer Flüssigkeit, so wird sie in das Feld hineingezogen, wie in Abb. 4.62 gezeigt. Das System erreicht ein Gleichgewicht, wenn der Druck der Flüssigkeitssäule gerade die elektrische Kraft kompensiert. Steigt das dielektrische Medium mit Dielektrizitätskonstante ϵ_r um die Höhe dz weiter in den Kondensator hinein, so ändert die Kapazität um

$$dC = d(\epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{\ell}) = \frac{\epsilon_0}{\ell} d\epsilon_r A = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) L \frac{dz}{\ell}.$$

Damit ändert sich die elektrische Feldenergie um

$$dW_{el} = \frac{1}{2} U^2 dC = \frac{1}{2} U^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) L \frac{dz}{\ell}.$$

Die Kraft dW_{el}/dz kann man durch die Fläche $L\ell$ dividieren um die (mechanische) Spannung

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \frac{1}{L\ell} \frac{dW_{el}}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{\ell} \right)^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \\ &= \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \end{aligned}$$

zu erhalten, welche die Flüssigkeit nach oben (in den Kondensator hinein) zieht.

Die Schwerkraft, die auf die Flüssigkeitssäule wirkt, erzeugt ebenfalls eine Spannung

$$\frac{F_G}{L\ell} = \rho g h.$$

Die beiden Spannungen halten sich die Waage wenn

$$\frac{1}{2}E^2\epsilon_0(\epsilon_r - 1) = \rho gh.$$

Man kann diesen Ausdruck z.B. dazu verwenden, um die Steighöhe h zu berechnen, oder um die Dielektrizitätskonstante zu bestimmen:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{2\rho gh}{(\epsilon_0 E)^2}.$$

Im Experiment findet man für Rizinusöl ($\epsilon_r \approx 4,6$) bei 30 kV eine Steighöhe von ca. 1 cm.

4.5 Stationäre Ströme

4.5.1 Ladungstransport

Bisher haben wir nur stationäre Ladungen diskutiert. In einem elektrischen Feld wirkt immer eine Kraft auf elektrische Ladungen. Sind diese beweglich wird deshalb Ladung transportiert. Man spricht in diesem Fall von einem elektrischen Strom.

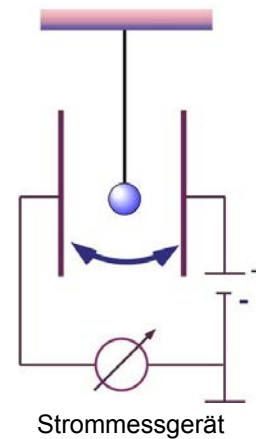


Abbildung 4.63: Diskreter Ladungstransport.

Wie Ladungen in einem Feld transportiert werden kann man mit mechanischen Hilfsmitteln demonstrieren. Im Experiment von Abb. 4.63 wird die Ladung von einer Kondensatorplatte auf einen Ping-Pong Ball übertragen. Nachdem dieser geladen ist wird er im Feld zwischen den Platten beschleunigt bis er auf die andere Kondensatorplatte trifft, wo er die Ladung an die Platte abgibt. Er nimmt dort die entgegengesetzte Ladung auf und wird in die umgekehrte Richtung beschleunigt. Je höher die Spannung eingestellt wird, desto schneller wird der Ladungstransport. Man misst mit Hilfe eines Strommessgerätes, dass ein Strom durch den Kondensator fließt.

Wie in diesem Experiment führt eine Spannung allgemein dazu, dass elektrische Ladungen, sofern sie frei beweglich sind, in einem Feld transportiert werden. Die transportierte Ladung pro Zeiteinheit wird als Strom bezeichnet,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = \frac{C}{s} = A = \text{Ampere}.$$



Abbildung 4.64: André Marie Ampère (1775-1836).

Die Einheit erinnert an André Marie Ampère (1775-1836) (→ Abb. 4.64). Die Stromstärke ist eine der SI-Basisgrößen; vom Standpunkt der Physik ist jedoch eher die Ladung die Grundgröße, während die Stromstärke davon abgeleitet ist. Die Stromrichtung ist definiert als die Richtung, welche dem Transport positiver Ladung entspricht.

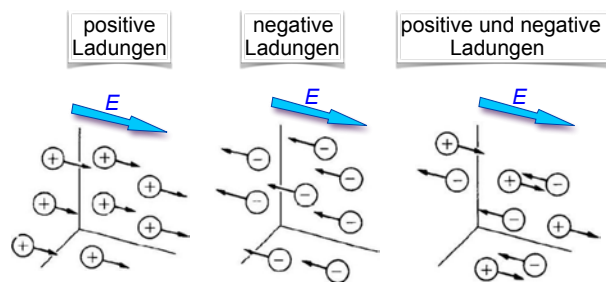


Abbildung 4.65: Stromtransport und Arten von Ladungsträgern.

Die wirklichen transportierten Ladungen sind natürlich sehr viel kleiner als der Tischtennisball im Demonstrationsexperiment. Wie beim Demonstrationsexperiment können aber sowohl positive wie auch negative Ladungen transportiert werden (→ Abb. 4.65). Positive Ladungen bewegen sich in Feldrichtung, negative Ladungen in entgegengesetzter Richtung. Der Stromfluss ist jedoch in beiden Fällen in Feldrichtung.

Ladungen können praktisch durch jedes Medium transportiert werden, wobei je nach Material unterschiedliche Träger für die Ladung zur Verfügung stehen. Auch im Vakuum kann Strom fließen. Dies wurde früher in Verstärkern, Röntgenröhren oder Fern-

sehern verwendet. Im Vakuum stehen zunächst keine Ladungsträger zur Verfügung. Es können aber Elektronen ins Vakuum emittiert werden und als Ladungsträger dienen wenn z.B. eine Glühkathode verwendet wird oder mit Hilfe von Photoemission. Bei genügend hohen Feldstärken findet auch Feldemission statt; dazu verwendet man feine Spitzen: je kleiner der Radius desto größer die Feldstärke.

4.5.2 Phänomenologie

Strom ist, wie Ladung, immer mit Materie verbunden. Er macht sich auf unterschiedliche Arten bemerkbar:

- er erzeugt Wärme; dieser Effekt kann als Reibungseffekt verstanden werden. Er verschwindet nur in Supraleitern, welche den Strom verlustfrei leiten können.
- er erzeugt ein Magnetfeld; dadurch entstehen Kraftwirkungen auf andere magnetische Materialien und bewegte Ladungen.
- in speziellen Fällen können Ströme chemische Reaktionen bewirken. Man spricht dann von Elektrolyse.

Als Stromquellen werden meist Generatoren verwendet. Weitere Möglichkeiten sind Batterien, thermische Spannungsquellen (Peltier-Elemente), oder optische Stromquellen (Photodioden, Solarzellen).

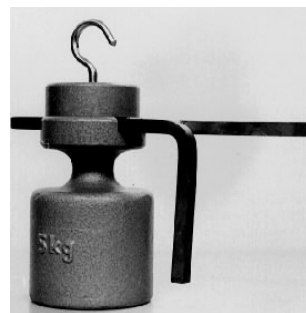


Abbildung 4.66: In der Leiterschleife wird ein Strom erzeugt, der ein starkes Magnetfeld erzeugt.

Strom kann auch aus Wärme erzeugt werden. Die so genannten Thermoelemente verwenden Kontakte zwischen unterschiedlichen Metallen. Wenn man

an diese Kontakte eine Temperaturdifferenz anlegt fließt ein Strom. Abb. 4.66 zeigt ein Experiment, bei dem ein Kontakt zwischen Kupfer und Konstantan verwendet; der eine Kontakt wird mit Eiswasser gekühlt, der andere mit einem Bunsenbrenner beheizt. Wird die Temperaturdifferenz genügend hoch so, fließt ein hoher Strom durch die Kupferschleife. Dabei kann man auch gleich den zweiten oben genannten Punkt verifizieren: Der Strom erzeugt ein Magnetfeld; dieses wird hier so stark, dass man damit ein 5 kg schweres Gewicht heben kann.

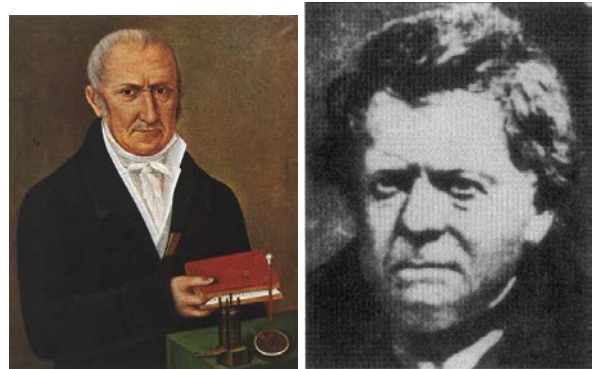


Abbildung 4.68: Alessandro Volta (1745-1827) und Georg Simon Ohm (1789-1854)

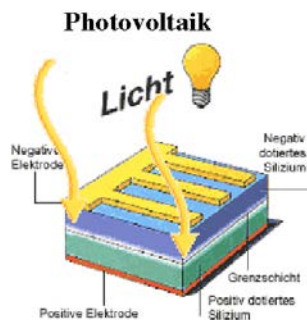


Abbildung 4.67: Prinzip der photoelektrischen Stromerzeugung.

Weitere Möglichkeiten zur Erzeugung von Strom umfassen Solarzellen (=Photodioden), bei denen Licht absorbiert wird und dabei Elektronen-Loch Paare (=fehlende Elektronen, "positive" Elektronen). Diese werden von metallischen Kontakten gesammelt und über den Verbraucher zurückgeführt. Abb. 4.67 zeigt die Funktionsweise eines solchen Elements.

4.5.3 Definitionen

Neben dem Strom benötigen wir die elektrische Spannung. Sie ist definiert über die Arbeit, die für die Trennung von Ladungen verrichtet werden muss:

$$U = \frac{W}{Q} \quad [U] = \text{V} = \text{Volt} = \frac{\text{J}}{\text{C}}.$$

Die Einheit Volt erinnert an Alessandro Volta (1745-1827) (→Abb. 4.68). Somit wird beim Transport von 1 Coulomb über eine Spannungsdifferenz von 1 V eine Energie von 1 Joule benötigt, resp. frei.

Ein Strom, der durch einen Widerstand fließt, leistet Arbeit: der Widerstand wird aufgeheizt. Die Leistung ist gegeben durch das Produkt aus Spannung und Strom,

$$P = UI = U^2/R = I^2R.$$

$$[P] = \text{Watt} = \text{W}$$

Die zeitlich integrierte Leistung ergibt die Arbeit, welche auch als Produkt aus Ladung und Potenzialdifferent U geschrieben werden kann:

$$W = \int P dt = QU.$$

Sind mehrere Widerstände hintereinander angeordnet, so hängt die Leistung, welche an einem Widerstand anfällt, von beiden Widerständen ab. Daraus kann man Messinstrumente bauen.

4.5.4 Widerstand

Der elektrische Widerstand R ist ein Maß für die Hinderung des Ladungstransportes

$$R = \frac{V}{I} \quad [R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega = \text{Ohm}, \quad (4.6)$$

d.h. der Widerstand eines Leiters beträgt ein Ohm wenn bei einem Stromfluss von 1 Ampère eine Spannung von 1 V anliegt. Die Einheit Ohm erinnert an Georg Simon Ohm (1789-1854) (→Abb. 4.68).

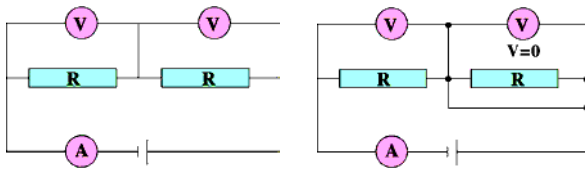


Abbildung 4.69: Messanordnung zur Verifizierung des Ohm'schen Gesetzes: links beträgt der Widerstand $2R$, rechts R .

Der Kehrwert des Widerstandes ist der

$$\text{Leitwert } G = \frac{1}{R} \quad [G] = S = \text{Siemens} = \frac{1}{\Omega}.$$

Die Proportionalität (4.6) zwischen Strom und Spannung wird als Ohm'sches Gesetz bezeichnet. Sie kann experimentell z.B. mit Hilfe des in Abb. 4.69 gezeigten Aufbaus realisiert werden. Schaltet man zwei Widerstände in Reihe, so dass durch beide der gleiche Strom fließt, so misst man auch über beiden die gleiche Spannung. Überbrückt man den zweiten Widerstand, wie in Abb. 4.69 rechts gezeigt, so stellt man fest, dass jetzt die ganze Spannung über dem ersten Widerstand abfällt; sie ist um den Faktor 2 gestiegen. Der Strom, welcher vom Messgerät angezeigt wird, hat sich ebenfalls verdoppelt. Man verifiziert weiterhin, dass der Strom proportional zur Spannung steigt, wenn wir diese erhöhen.

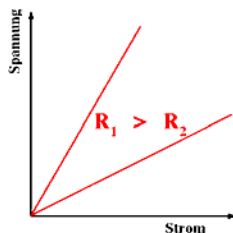


Abbildung 4.70: Lineare Abhängigkeit zwischen Strom und Spannung.

Abb. 4.70 zeigt die lineare Beziehung zwischen Spannung und Widerstand, welche als Ohm'sches Gesetz bezeichnet wird. Es handelt sich aber nicht um ein Naturgesetz, sondern um die Beschreibung eines Verhaltens das man häufig aber nicht immer findet. Der Widerstand entspricht der Steigung der Geraden, $R = dV/dI$.

4.5.5 Spezifischer Widerstand in Ohm'schen Leitern

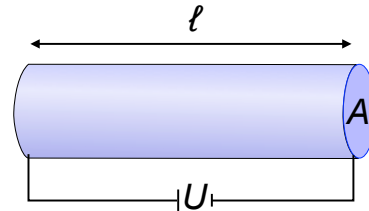


Abbildung 4.71: Dimensionen eines Leiterstücks.

Der Widerstand R eines Materialelementes hängt ab von den Dimensionen des Leiters, und vom Material, aus dem er besteht. In vielen Fällen ist er proportional zur Länge des Elementes und indirekt proportional zu seinem Querschnitt

$$R = \frac{\rho \ell}{A}.$$

Man definiert deshalb den spezifischen Widerstand ρ eines Materials. Die Einheit des spezifischen Widerstandes ist

$$[\rho] = \Omega m.$$

Dieser kann in weiten Bereichen variieren; man unterscheidet Materialklassen nach ihrem spezifischen Widerstand:

Klasse	Material	$\rho / \Omega m$
Isolatoren	Bernstein	10^{18}
	Quarzglas	$5 \cdot 10^{16}$
	Glimmer	$5 \cdot 10^{16}$
	Glas	$5 \cdot 10^{11}$
	Holz	$10^8 \dots 10^{14}$
Halbleiter	Germanium	0,46
	Tellur	$4,36 \cdot 10^{-3}$
	Silizium (rein)	640
Leiter	Kupfer	$5 \cdot 10^{16}$
	Silber	$1,59 \cdot 10^{-8}$
	Quecksilber	$96 \cdot 10^{-8}$
	Aluminium	$2,65 \cdot 10^{-8}$
	Eisen	$9,77 \cdot 10^{-8}$
	Nickel	$6,84 \cdot 10^{-8}$

Ganz allgemein besitzen gute Isolatoren spezifische Widerstände $> 10^{10} \Omega \text{ m}$, Halbleiter können in weiten Bereichen um $1 \Omega \text{ m}$ variieren, während gute Leiter bei $\sim 10^{-8} \Omega \text{ m}$ liegen. Die Ursachen für diese enorme Variationsbreite liegen in der quantenmechanischen Struktur der Materie.

Der Kehrwert des spezifischen Widerstandes ist die spezifische Leitfähigkeit σ . Mit ihrer Hilfe kann man z.B. die Stromdichte berechnen, als

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

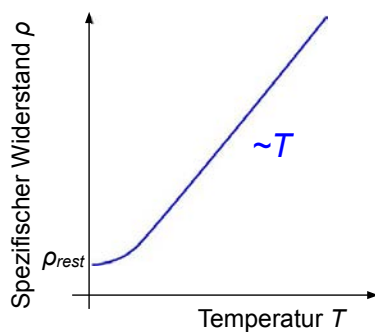


Abbildung 4.72: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes eines Metalls.

Der Widerstand variiert mit der Temperatur. Für Metalle findet man meist ein lineares Ansteigen mit der Temperatur, während er bei niedrigen Temperaturen näherungsweise konstant bleibt. Abb. 4.72 zeigt qualitativ diese Abhängigkeit. Man kann diese Abhängigkeit z.B. untersuchen, indem man den Widerstand bei Raumtemperatur und bei der Temperatur von flüssigem Stickstoff misst. Bei Kupfer nimmt der Widerstand um fast eine Größenordnung ab, bei NTC-Widerständen um mehrere Größenordnungen zu, während Konstantan und Kohleschicht Widerstände eine relativ geringe Abhängigkeit zeigen.

4.5.6 Modelle für die Leitfähigkeit

Dieser Befund kann in der Festkörperphysik interpretiert werden. Ganz grob kann man ihn so erklären, dass ideale metallische Festkörper bei tiefen

Temperaturen keinen Widerstand für die elektrische Leitung bieten. Bei endlichen Temperaturen finden Schwingungen der Ionen um ihre Gleichgewichtsposition statt, und diese Schwingungen behindern den Ladungstransport. Je höher die Temperatur, desto stärker die Schwingungen und desto schlechter die elektrische Leitung. Der endliche Widerstand bei tiefen Temperaturen kann auf Kristallfehler zurückgeführt werden.

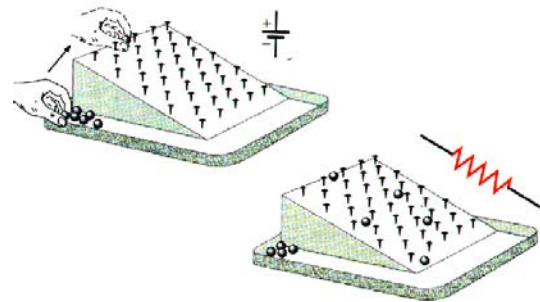


Abbildung 4.73: Modell für die spezifische Leitfähigkeit.

In einem mechanischen Modell kann man sich das so vorstellen, dass die Ladungsträger als Kugeln eine schiefe Ebene hinunterrollen (\rightarrow Abb. 4.73). Normalerweise würden sie durch die Schwerkraft beschleunigt. Sind jedoch auf dieser schiefen Ebene Hindernisse vorhanden, so stoßen die Kugeln damit und werden so langsamer hinunterrollen. Die Energie, welche die Kugeln bei den Stößen an die Hindernisse abgeben, wird durch das Anheben in das System hineingegeben. Im elektrischen Leiter wird diese Energie durch die Spannung zugeführt und an die Ionen übergeben. Dies führt zu einer Aufheizung des Materials.

Während bei den meisten Festkörpern Elektronen für den Ladungstransport verantwortlich sind, können auch Ionen Ladung transportieren. Materialien, bei denen dies auftritt, werden als feste Elektrolyte bezeichnet. Ihre technologische Bedeutung steigt momentan da sie eine Grundlage für Brennstoffzellen und Batterien bilden. Die Leitfähigkeit für Ionen steigt mit der Temperatur stark an.

Eine ähnliche Situation findet man auch bei der Signalübertragung in Nerven: die Signale werden

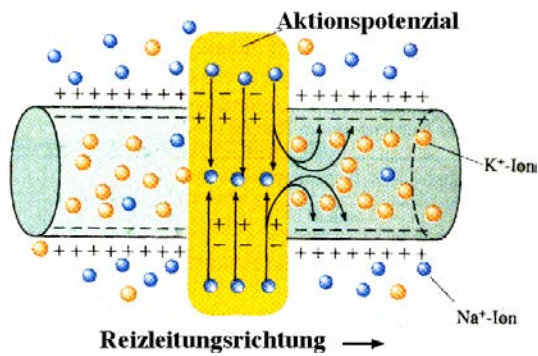


Abbildung 4.74: Modell für die Nervenleitung.

elektrisch übertragen, wie in Abb. 4.74 gezeigt. Allerdings findet der Ladungstransport senkrecht zur Reizleitungsrichtung statt, welche mit der Richtung der Nervenfaseroberfläche zusammenfällt. Das Signal wird durch die Spannung definiert, welche zwischen dem Inneren der Zelle und ihrer Umgebung anliegt. Ladungsträger sind hier nicht Elektronen, sondern Natrium (Na^+) und Kalium (K^+) Ionen.

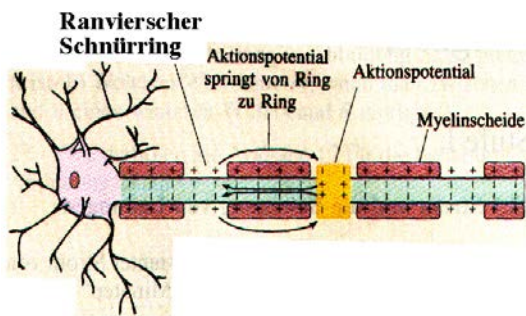


Abbildung 4.75: Einfluss der Myelinscheide auf die Nervenleitung.

Die Nervenfasern sind von einer Hülle umgeben, welche eine abschirmende Wirkung hat (\rightarrow Abb. 4.75). Die Signalübertragung findet so statt, dass das Aktionspotenzial von einem Ring (= "Ranvierscher Schnürring") zwischen zwei Myelinscheiden zum nächsten springt.

4.5.7 Driftgeschwindigkeit

Elektrische Signale werden praktisch mit Lichtgeschwindigkeit übertragen: die Signalübertragungsgeschwindigkeit ist durch die Aus-

breitungsgeschwindigkeit der Spannung, also des elektrischen Feldes bestimmt. Die einzelnen Ladungsträger bewegen sich hingegen mit einer wesentlich geringeren Geschwindigkeit, der sogenannten Driftgeschwindigkeit.

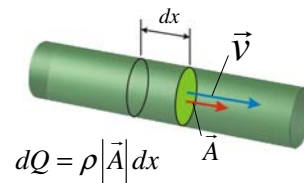
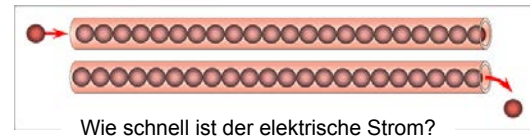


Abbildung 4.76: Modell zur Bestimmung der Driftgeschwindigkeit.

Um den Strom als lokale Größe zu definieren verwendet man die Stromdichte

$$j = \frac{dI}{dA},$$

also den Strom pro Fläche (\rightarrow Abb. 4.76). Sie kann mikroskopisch als Produkt aus Ladungsdichte nq und Geschwindigkeit v der Ladungsträger geschrieben werden:

$$j = nqv.$$

Wir verwenden diese Beziehung, um die Driftgeschwindigkeit v der Ladungsträger zu berechnen, wobei wir annehmen, dass die Dichte der Ladungsträger von der Größenordnung der Dichte der Atome in einem Metall ist. Die Anzahl Atome berechnen wir z.B. für Kupfer. Die Atommasse ist 63.5 u, die Dichte = 8950 kg m^{-3} . Somit enthält 1 m^3 Kupfer $8,95 \cdot 10^3 / 63,5 = 141 \text{ kMol}$ Atome. Mit der Avogadrozahl $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ erhalten wir die Anzahl Atome pro m^3 :

$$n = 6 \cdot 10^{23} \cdot 141 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3} = 0,85 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$\approx 10^{29} \text{ Atome/m}^3$$

Für die Stromdichte j setzen wir $1 \text{ A/mm}^2 = 10^6 \text{ A/m}^2$ als typischen Wert. Damit erhält man für die

Driftgeschwindigkeit

$$v = j/(nq) = \frac{10^6}{10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{A}}{\text{m}^2 \text{m}^{-3} \text{C}}$$

$$= 6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}.$$

Elektronen in einem Draht bewegen sich somit sehr langsam!

Interessant ist auch, dass die Geschwindigkeit direkt proportional zum Feld, also zur äußeren Kraft ist. Dies kontrastiert mit dem Bild eines freien Ladungsträgers, bei dem die Beschleunigung proportional zur Kraft ist. Ein solches Verhalten erhält man bei einer reibungsbehafteten Bewegung, d.h. für eine Bewegungsgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \gamma v.$$

Ein stationärer Zustand wird dann erreicht wenn die resultierende Kraft auf der rechten Seite verschwindet, $qE = \gamma v$. Die berechnete Driftgeschwindigkeit ist somit gegeben durch das Verhältnis

$$v_D = \frac{qE}{\gamma},$$

d.h. sie wird bestimmt durch das Verhältnis von elektrischer Kraft zur inneren Reibung für die Ladungsträger.

4.5.8 Supraleiter

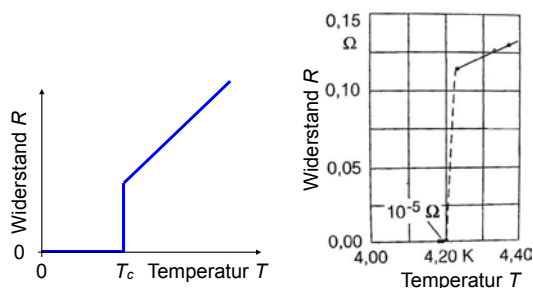


Abbildung 4.77: Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit bei Supraleitern.

Bei Supraleitern findet bei tiefen Temperaturen ein Übergang statt zu einem Zustand, wo der elektrische Widerstand verschwindet. Dieser Effekt wurde 1911 von Kamerlingh Onnes entdeckt, nachdem es ihm gelungen war, Helium zu verflüssigen. Abb. 4.77 zeigt die Original-Messkurve für Quecksilber aufgetragen: bei 4,2 K sinkt der Widerstand auf Null. Der plötzliche Übergang entspricht einem Phasenübergang, ähnlich wie der Siedepunkt; er tritt bei einer kritischen Temperatur T_c auf. Viele Elemente und Verbindungen werden bei unterschiedlichen Temperaturen supraleitend. Einige kritische Temperaturen sind

Stoff	T_c/K
Al	1,19
Be	0,026
Hg	4,15
Zn	0,9
Wo	0,012
Pb	7,2
V_3Si	17,1
Nb_3Si	18,0
$\text{Nb}_3\text{Al}_8\text{Ge}_{0,2}$	20,7
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$	90
$\text{HgBa}_2\text{CuO}_{4+x}$	133
$\text{CsRb}_2\text{C}_{60}$	31

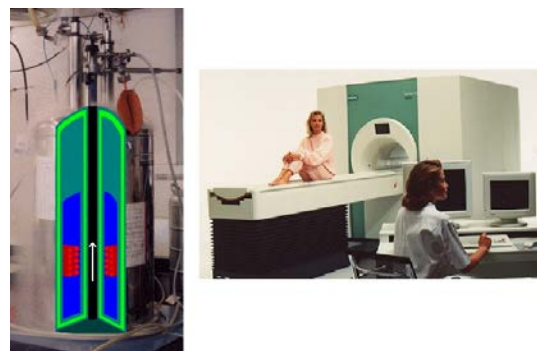


Abbildung 4.78: Supraleitende Magneten.

Die verlustlose Leitung von elektrischem Strom ist für verschiedene Anwendungen interessant, so für die Erzeugung von starken Magnetfeldern, wie sie z.B. in Kernspintomographen benötigt werden. Abb. 4.78 zeigt 2 Beispiele für solche Magneten.

4.5.9 Halbleiter

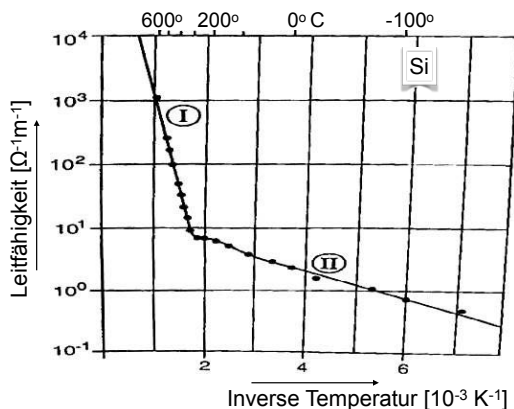


Abbildung 4.79: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes in einem Halbleiter (Si).

Im Gegensatz zu Metallen sinkt bei Halbleitern der Widerstand mit zunehmender Temperatur, d.h. die Leitfähigkeit nimmt zu, wie in Abb. 4.79 gezeigt. Man unterscheidet hier zwei Bereiche: im Hochtemperaturbereich I dominieren die intrinsischen Ladungsträger; ihre Zahl nimmt mit der Temperatur exponentiell zu. Bei niedrigeren Temperaturen (II) dominieren Ladungsträger, welche durch Fremdatome eingebracht wurden, wie z.B. Phosphor. Durch das Einbringen von Fremdatomen kann man die elektrischen Eigenschaften von Halbleitern in weiten Grenzen variieren; dies ist der wichtigste Grund für die enorme Rolle, welche Halbleiter heute spielen.

Ob ein Material als Halbleiter oder Isolator betrachtet wird, ist zu einem guten Teil temperaturabhängig.

So ist Glas bei tiefen Temperaturen ein sehr guter Isolator; bei hohen Temperaturen werden jedoch einzelne Ionen beweglich und man erhält eine erhebliche Leitfähigkeit.

4.5.10 Ladungstransport in Gasen und Flüssigkeiten

Auch in Gasen können Ladungen transportiert werden. Die Elektronen werden dabei beschleunigt bis sie wieder auf Gasteilchen treffen und schlagen weitere Elektronen aus diesen heraus.

Man kann den Effekt z.B. in Luft nachweisen. Dadurch findet man häufig ein nichtlineares Verhalten, da die Ladungen in einem elektrischen Feld beschleunigt werden, dadurch genügend kinetische Energie erhalten um weitere Ladungen durch Stoßionisation zu erzeugen, welche selber ebenfalls kinetische Energie erhalten.

In Flüssigkeiten und Gasen können Ladungen durch Ionen transportiert werden. Sind keine geladenen Teilchen vorhanden können diese z. T. auch durch Dissoziation (Elektrolyse) erzeugt werden.

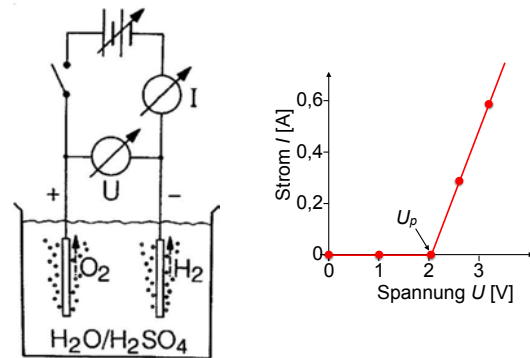


Abbildung 4.80: Stromleitung in Elektrolyten.

So findet man in verdünnter Schwefelsäure H^+ , HSO_4^- und SO_4^{2-} Ionen, welche im elektrischen Feld diffundieren. Hier wird der Strom somit von positiven und negativen Ladungsträgern transportiert (\rightarrow Abb. 4.80).

Bei niedrigen Spannungen fließt in Elektrolyten kein Strom; die Polarisationsspannung U_p wird durch das unterschiedliche chemische Potenzial der beiden Elektroden hervorgerufen. Oberhalb dieser Spannung verhält sich das System in guter Näherung wie ein Ohm'scher Leiter.

Wenn die Ionen die Elektroden erreichen geben sie ein Elektron an die Elektrode ab, resp. nehmen es von dort auf. Diese Art von Reaktion wird als Elektrolyse bezeichnet. Sie wird für verschiedene technische Anwendungen verwendet, wie z.B. die Spaltung von Wasser in Sauerstoff und Wasserstoff.

Die umgekehrte Reaktion verwendet man in Batterien; sind die Prozesse reversibel, so kann man entsprechende Elemente zur Speicherung von elektrischem Strom verwenden.

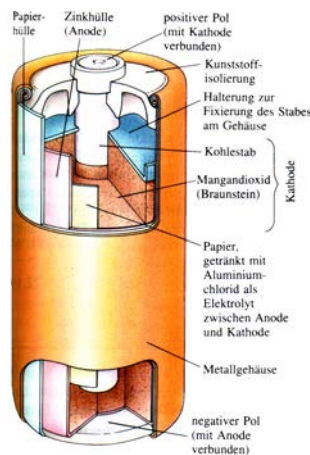


Abbildung 4.81: Aufbau einer Batterie.

Bei gewöhnlichen Batterien besteht die Kathode aus einem Kohlestab und Manganoxid als Reaktionsmittel, während die Anode aus einem Zinkblech besteht. Abb. 4.81 zeigt schematisch den Aufbau einer solchen Batterie.

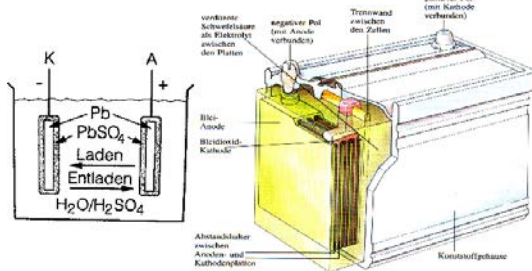


Abbildung 4.82: Blei-Akku.

Das am weitesten verbreitete System ist wohl die Bleibatterie (\rightarrow Abb. 4.82), wo die Umwandlung von Blei in Bleisulfat in verdünnter Schwefelsäure verwendet wird. Bei anderen Elektrolyten (z.B. AgNO_3) wird an einer der Elektroden Metall (Ag) abgeschieden. Solche Systeme werden verwendet für das Veredeln von Werkstücken durch Beschichten mit einer Metallschicht.

4.6 Schaltungen

4.6.1 Kirchhoff'sche Gesetze

Die Kirchhoff'schen "Gesetze" sind nützliche Regeln für die Analyse elektrischer Stromkreise. Das 1. Kirchhoff'sche Gesetz wird auch als Knotenregel bezeichnet (\rightarrow Abb. 4.83); es ist eine direkte Konsequenz des Erhaltungsgesetzes für elektrische Ladung.

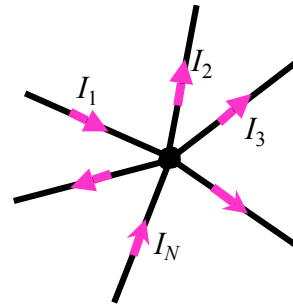


Abbildung 4.83: 1. Kirchhoff'sches Gesetz = Knotenregel.

Es lautet: die Summe aller Ströme die in einen Knoten hinein fließen ist gleich der Summe aller Ströme die aus dem Knoten heraus fließen

$$\sum_i I_i = 0.$$

Dies bedeutet im Wesentlichen, dass im Knoten keine Ladungen gespeichert, erzeugt oder vernichtet werden.

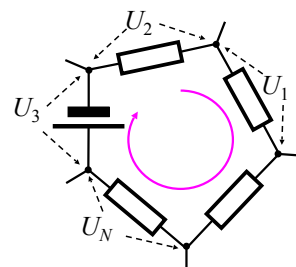


Abbildung 4.84: 2. Kirchhoff'sches Gesetz = Maschenregel.

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz wird auch als Maschenregel bezeichnet: In einem geschlossenen

Stromkreis (=Masche; Abb. 4.84) ist die Summe aller Spannungen gleich Null. Die Spannung als vorzeichenbehaftete Größe muss dabei immer in der gleichen Richtung gemessen werden.

4.6.2 Einfache Schaltungen

Als einfaches Anwendungsbeispiel betrachten wir den Spannungsabfall über zwei in Reihe geschalteten Widerständen, wie in Abb. 4.85 gezeigt.



Abbildung 4.85: Reihenschaltung von 2 Widerständen.

Der Strom muss gemäss Maschenregel überall gleich sein,

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots$$

Für die Spannung finden wir

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots$$

Wir berechnen nun den Widerstand, welcher die gleiche Wirkung hat wie zwei in Serie geschaltete Widerstände. Nach Definition ist das

$$R = \frac{U}{I} = \sum_i R_i,$$

d.h. der Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der einzelnen Widerstände.

Im Experiment verbinden wir zwei Widerstände von $R_1 = R_2 = R = 80\Omega$. Wenn wir eine konstante Spannung von 20 V über einen Widerstand legen beträgt der Strom 250 mA; liegt die gleiche Spannung an der Serienschaltung so sinkt der Strom auf 125 mA, entsprechend einem Widerstand von 160Ω . Dies kann auch direkt durch eine Widerstandsmessung verifiziert werden.

Als zweites Anwendungsbeispiel betrachten wir den Spannungsabfall über zwei parallel geschalteten Widerständen (\rightarrow Abb. 4.86). Gemäss dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz muss die Summe der beiden Spannungen (im Kreis gemessen) verschwinden, d.h. sie müssen entgegengesetzt gleich sein.

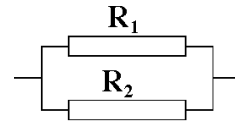


Abbildung 4.86: Parallelschaltung von Widerständen.

Messen wir beide Spannungen von links nach rechts müssen die Spannungen gleich sein, $U_1 = U_2 = U$. Somit fließen über die beiden Widerstände die Ströme

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2},$$

oder

$$I_1/I_2 = R_2/R_1.$$

Gemäss dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz muss die Summe der Ströme über die beiden Widerstände gleich dem zugeführten Strom sein, $I_1 + I_2 = I$. Daraus können wir den Widerstand der Parallelschaltung bestimmen:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{U/R_1 + U/R_2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

oder

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Auch dieses Resultat wird im Experiment verifiziert.

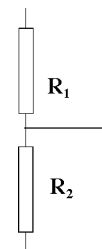


Abbildung 4.87: Spannungsteiler.

Als nächstes Beispiel betrachten wir einen Spannungsteiler (\rightarrow Abb. 4.87). Er besteht aus zwei in Serie geschalteten Widerständen. Gemäss Knotenregel fließt durch beide Widerstände der gleiche Strom $I = I_1 = I_2$. Der Spannungsabfall über dem ersten

Widerstand $U_1 = IR_1$ und über dem zweiten Widerstand $U_2 = IR_2$. Da der gesamte Spannungsabfall gemäss der Maschenregel der treibenden Spannung U_0 entsprechen muss, erhalten wir

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

d.h. die Spannung wird im Verhältnis der Widerstände geteilt.

Wir verifizieren dies für einen Schiebewiderstand.

4.6.3 Wheatstone'sche Brückenschaltung

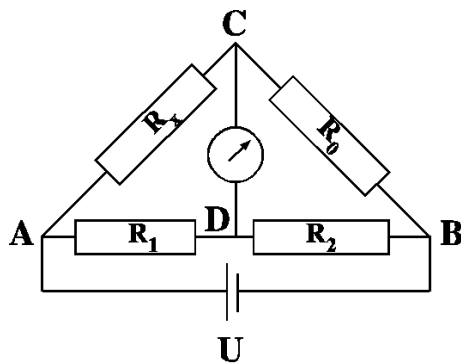


Abbildung 4.88: Wheatstone'sche Brückenschaltung.

Ein solcher Spannungsteiler wird auch verwendet in der Wheatstone'schen ⁵ Brücke, welche als Grundlage für die Messung von Widerständen verwendet wird (\rightarrow Abb. 4.88). Der zu messende Widerstand R_x wird dabei mit bekannten Widerständen R_0 , R_1 und R_2 verglichen, wobei das Verhältnis von R_1 zu R_2 so eingestellt wird, dass durch das Strommessgerät kein Strom fließt und somit auch keine Spannung abfällt. Solche Messungen sind besonders empfindlich und wenig stör anfällig.

Der Strom durch das Messinstrument verschwindet wenn für die Masche ACD $U_1 = U_x = R_1 I_1 = R_x I_x$ und für die Masche CBD $R_2 I_2 = R_0 I_0$. Außerdem muss gelten $I_1 = I_2$ und $I_x = I_0$. Division der beiden ersten Gleichungen ergibt

$$\frac{R_1 I_1}{R_2 I_2} = \frac{R_x I_x}{R_0 I_0} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_0}$$

⁵Charles Wheatstone 1802-1875

oder

$$R_x = R_0 \frac{R_1}{R_2}.$$

Im Experiment verwenden wir $R_0 = 25 \Omega$. Die Messung ergibt ein Verhältnis $R_1/R_2 = 30,2/69,8 = 0,433$. Somit erhalten wir

$$R_x = R_0 \frac{R_1}{R_2} = 10,82 \Omega$$

Die direkte Messung ergibt $R_x = 11,2 \Omega$.

4.6.4 Elektrische Schaltelemente

Elektrische Schaltungen werden aus unterschiedlichen Elementen aufgebaut. Die Menge an möglichen Elementen ist natürlich unbegrenzt. Es ist aber sinnvoll, einige besonders wichtige Elemente aufzulisten, wobei sie immer idealisiert werden.

- Ohm'sche Widerstände; sie zeichnen sich durch eine lineare Beziehung zwischen Strom und Spannung aus:

$$V = RI.$$

- Kondensatoren; wie bereits diskutiert findet man hier (im Idealfall) eine lineare Beziehung zwischen der gespeicherten Ladung und der Spannung:

$$V = \frac{Q}{C}.$$

- Induktivitäten (Spulen). Hier besteht eine lineare Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung des Stroms und der Spannung

$$V = L \frac{dI}{dt}.$$

- Dioden zeigen für negative Spannungen einen geringen Strom; für positive Spannungen ist der Strom deutlich größer und nichtlinear. Bei Röhrendioden erreicht er einen Sättigungswert, der von der Heizleistung abhängt. Bei Halbleiterdioden steigt der Strom an, bis die Schädigungsgrenze erreicht wird.

- Man kann Dioden u.a. dazu verwenden, um den Strom gleichzurichten oder um eine Begrenzung einzubauen.
- In einer Gasentladung nimmt der Widerstand mit zunehmendem Strom so stark ab, dass die nötige Spannung sogar absinkt. Man spricht hier von einem negativen differentiellen Widerstand.

4.7 Magnetfelder

4.7.1 Grundlagen

Während die Wechselwirkungen zwischen statischen elektrischen Ladungen sich durch das Coulomb'sche Gesetz, resp. ein elektrisches Feld beschreiben lassen, treten bei bewegten Ladungen zusätzlich magnetische Wechselwirkungen auf. Diese können ebenso durch ein magnetisches Feld beschrieben werden. Das Magnetfeld wird mit dem Buchstaben B , resp. H bezeichnet. Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Magnetfeldern wird etwas später diskutiert. Die Einheiten sind

$$[B] = \text{T} = \text{Tesla} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \quad [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

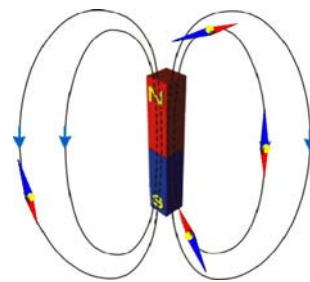


Abbildung 4.89: Magnetischer Dipol mit Feldlinien.

Im Falle des elektrischen Feldes wirken die elektrischen Ladungen als Quellen des Feldes; es existieren jedoch keine magnetischen "Ladungen" (d.h. Monopole), und somit keine Quellen für das magnetische Feld. Magnetische Feldlinien haben deshalb nie einen Anfang oder ein Ende, wie in Abb. 4.89 gezeigt. Als magnetische Grundeinheiten kann man die magnetischen Dipole betrachten.

Das Wegintegral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ eines Magnetfeldes ist abhängig vom Weg, im Gegensatz zum elektrischen Feld: Magnetfelder können somit nicht als Gradienten eines Potentials geschrieben werden. Dies ist eine direkte Konsequenz davon, dass die Feldlinien geschlossene Kurven darstellen. Man kann das Magnetfeld statt dessen als Rotation eines Vektorpotentials schreiben,

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Darauf soll hier aber nicht weiter eingegangen werden.

4.7.2 Dipole im Magnetfeld

Es gibt zwar keine magnetischen Ladungen, aber in Analogie zu den elektrischen Dipole gibt es magnetische Dipole.

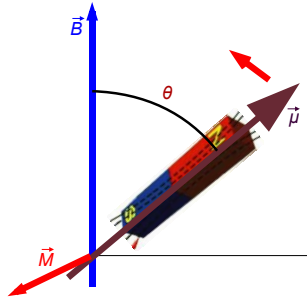


Abbildung 4.90: Magnetischer Dipol im Magnetfeld.

Genau wie auf elektrische Dipole in einem elektrischen Feld ein Drehmoment wirkt, erfahren magnetische Dipole $\vec{\mu}$ ($[\mu] = \text{Am}^2$) im Magnetfeld \vec{B} ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

wie in Abb. 4.90 dargestellt. Das Drehmoment ist somit maximal wenn der Dipol senkrecht zur Feldrichtung orientiert ist und verschwindet für parallele Orientierung.

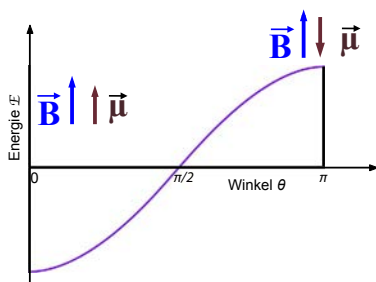


Abbildung 4.91: Energie des Dipols als Funktion der Orientierung.

Die potenzielle Energie ist analog zum elektrischen Dipol

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu \cdot B \cos \theta,$$

wobei θ den Winkel zwischen Dipol- und Feldrichtung darstellt. Abb. 4.91 zeigt die Abhängigkeit der potenziellen Energie von der Orientierung. Die Gleichgewichtsstellung entspricht somit der Orientierung parallel zu den Feldlinien, $\theta = 0$.

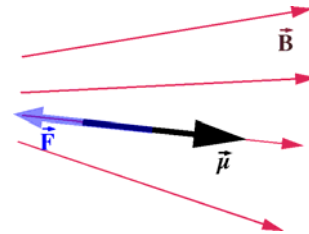


Abbildung 4.92: Kraft auf einen Dipol in einem inhomogenen Feld.

Genau wie bei elektrischen Dipolen wirkt auch auf magnetische Dipole in einem inhomogenen Feld eine Kraft, die von der Orientierung der Dipole bezüglich dem Magnetfeld abhängt (\rightarrow Abb. 4.92). Sind sie im Gleichgewicht, d.h. parallel zum Feld orientiert, so werden sie in Richtung des stärkeren Feldes gezogen. Ist die Orientierung entgegengesetzt, so werden sie abgestoßen.

4.7.3 Feldlinien und Magnetpole

Genau wie beim elektrischen Feld beschreibt man auch das magnetische Feld mit Hilfe von Feldlinien. diese können z.B. über die Orientierung von magnetischen Dipolen gemessen werden. Da keine Quellen für magnetische Felder existieren, sind magnetische Feldlinien immer geschlossene Schleifen.

Feldlinien können auf unterschiedliche Arten sichtbar gemacht werden. Meist verwendet man dafür Eisen-Feilspäne oder kleine, drehbar gelagerte Magnetchen.

Magnetfelder werden entweder durch elektrische Ströme oder magnetische Körper erzeugt. Ein typisches Beispiel ist ein Stabmagnet. Abb. 4.93 zeigt schematisch einen Stabmagneten. Er besitzt zwei magnetische Pole, d.h. er bildet einen magnetischen Dipol. Die Feldlinien beginnen am einen Pol, welcher magnetischer Nordpol genannt wird, laufen durch die Umgebung zum andern Ende, dem magnetischen Südpol, und im Material zurück. Bringt man

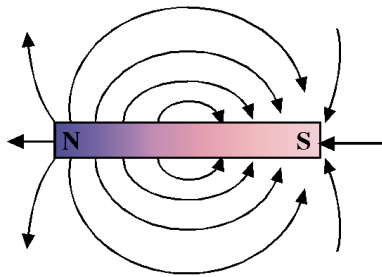


Abbildung 4.93: Stabmagnet, Pole, Feldlinien.

mehrere Stabmagnete zusammen so richtet sich der eine nach den Magnetfeldlinien des anderen aus.

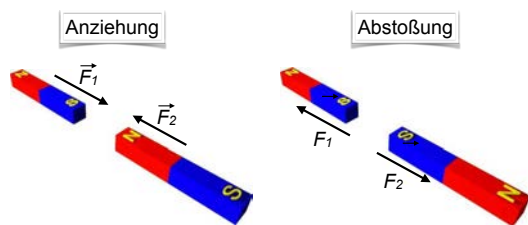


Abbildung 4.94: Anziehung und Abstoßung von Magneten.

Die niedrigste Energie hat die Kombination offenbar dann wenn ungleiche Pole benachbart sind: entgegengesetzt Pole ziehen sich an, gleiche Pole stoßen sich ab (siehe Abb. 4.94), in Analogie zu elektrischen Ladungen.

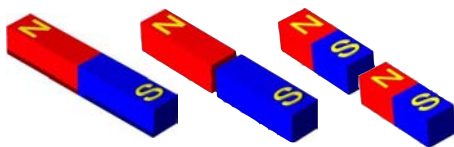


Abbildung 4.95: Teilung eines Stabmagneten ergibt 2 Stabmagneten.

Im Gegensatz zu elektrischen Ladungen oder elektrischen Dipole lassen sich Magnetpole nicht trennen. Zerbricht man einen Stabmagneten, dann ergeben sich zwei kürzere Magnete, welche beide jeweils zwei Polen besitzen, wie in Abb. 4.95 dargestellt.

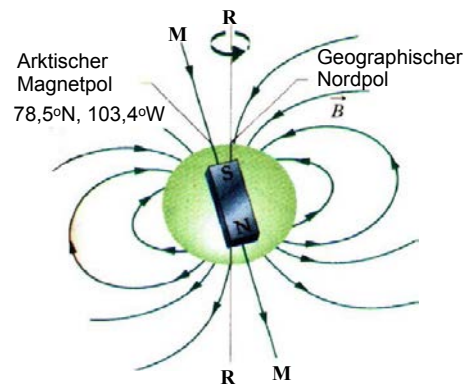


Abbildung 4.96: Magnetfeld der Erde. Der arktische Magnetpol befindet sich in der Nähe des geographischen Nordpols und ist ein magnetischer Südpol.

4.7.4 Erdmagnetfeld und Kompass

Auf Grund des Drehmomentes können magnetische Dipole dazu verwendet werden, die Orientierung und Stärke eines Magnetfeldes zu messen. Ein gutes Beispiel für einen magnetischen Dipol ist eine Kompassnadel. Diese richtet sich im Magnetfeld der Erde so aus, dass eines seiner Enden nach Norden weist. Man bezeichnet dieses Ende als magnetischen Nordpol. Da der magnetische Nordpol einer Nadel von einem magnetischen Südpol angezogen wird und nach Norden zeigt ist offenbar der magnetische Südpol der Erde in der Nähe des geographischen Nordpols (genauer: 78.5°N, 103.4°W), der magnetische Nordpol in der Nähe des geographischen Südpols (65°S, 139°E). Wie in Abb. 4.96 gezeigt, liegen die magnetischen Pole sich in der Nähe aber nicht exakt beim geographischen Pol befinden zeigt ein Kompass nicht exakt nach Norden (in Deutschland: Abweichung (Deklination) 2°). Die Feldlinien sind außerdem nicht horizontal (in Deutschland: Inklination 55°).

Die Nutzung des magnetischen Kompass wurde in China um das Jahr 1000 entwickelt; Kolumbus nutzte ihn für die Fahrt nach Amerika. In beiden Fällen wussten die Seefahrer wie sie ihn benutzen konnten, ohne aber die Funktionsweise zu kennen. Erst im Jahre 1600 konnte William Gilbert zeigen, dass man den Kompass verstehen kann wenn man annimmt, dass die Erde ein Magnetfeld besitzt.

4.7.5 Magnetfeld elektrischer Ströme

Magnetfelder können nicht nur von Dipolen erzeugt werden, sondern auch von bewegten elektrischen Ladungen. Dies weiss man erst seit dem 19. Jahrhundert.

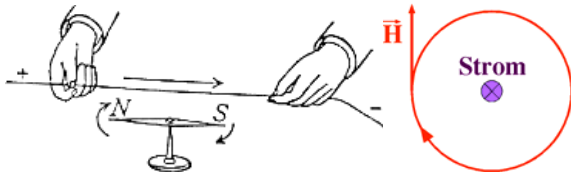


Abbildung 4.97: Links: Experiment von Oersted zum Nachweis dass ein elektrischer Strom ein Magnetfeld erzeugt. Rechts: das erzeugte Feld um den Leiter im Querschnitt.

Ørsted⁶ stellte 1821 fest, dass stromdurchflossene Leiter eine Kompassnadel in der Nähe beeinflussen. Abb. 4.97 zeigt schematisch das entsprechende Experiment.

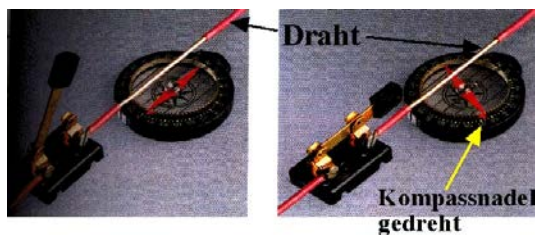


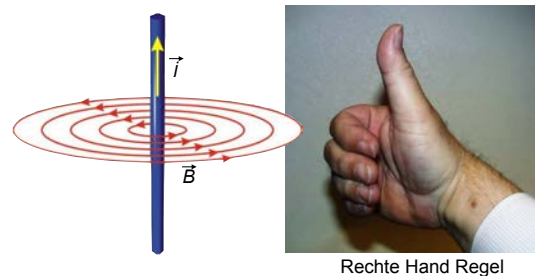
Abbildung 4.98: Nachweis des Magnetfeldes durch einen Kompass.

Abb. 4.98 zeigt eine aktuelle Version des Oersted-Experiments. Hier stellt man einen Wettbewerb zwischen dem Erdmagnetfeld und dem Magnetfeld des Drahtes fest. In der linken Bildhälfte ist der Strom ausgeschaltet. Der Leiter und die Kompassnadel sind parallel zum Erdmagnetfeld ausgerichtet. Rechts ist der Strom eingeschaltet und erzeugt ein Magnetfeld senkrecht zur Richtung des Leiters, wie schematisch in Abb. 4.97 rechts dargestellt. Die Kompassnadel richtet sich entlang der Vektorsumme aus dem Erdmagnetfeld und dem Magnetfeld des Stroms aus.

⁶Hans Christian Ørsted (1777 - 1851)

4.7.6 Das Durchflutungsgesetz

Mit Hilfe einer Reihe von solchen Experimenten stellt man fest, dass ein Strom, der durch einen geraden Leiter fließt, kreisförmige Feldlinien erzeugt, in deren Zentrum sich der Leiter befindet, wie in Abb. 4.99 gezeigt. Die Stärke des Magnetfeldes ist dabei proportional zum Strom. Man verwendet diesen Befund für die Definition der Magnetfeldstärke.



Rechte Hand Regel

Abbildung 4.99: Rechte-Hand-Regel für das Magnetfeld.

Die Richtung des Magnetfeldes kann durch die "Rechte-Hand-Regel" bestimmt werden (\rightarrow Abb. 4.99): zeigt der Daumen der rechten Hand in Stromrichtung, so geben die anderen Finger die Richtung des B -Feldes an.

Aus der Definition der Stromdichte $\vec{j} = d\vec{I}/dA$, welche durch ein Flächenelement dA fließt (\rightarrow Kap. 4.5.5) folgt umgekehrt dass der Gesamtstrom durch eine Fläche A gegeben als das Integral der Stromdichte über diese Fläche,

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I.$$

Das Magnetfeld in der Nähe einer stromdurchflossenen Fläche ist allgemein gegeben durch das Ampère'sche oder Durchflutungsgesetz. Es lautet, dass das Schleifenintegral des Magnetfeldes über eine beliebige geschlossene Kurve gleich dem Flächenintegral der Stromdichte über die eingeschlossene Fläche ist,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \sum_i I_i, \quad (4.7)$$

wobei das Flächenintegral über die Fläche läuft, die vom Pfad des Schleifenintegrals umschlossen wird.

Das Weg-Integral des magnetischen Feldes entlang der geschlossenen Kurve ist somit gleich dem gesamten Strom durch die Fläche. Daraus folgt auch die Einheit für das Magnetfeld: $[H] = \text{A/m}$. Mit Hilfe des Satzes von Stokes erhält man daraus die differentielle Form:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}.$$

Das Wegintegral eines Magnetfeldes ergibt offenbar einen Strom; wir vergleichen dies mit dem Wegintegral des elektrischen Feldes, welches eine Spannung, resp. eine Potenzialdifferenz ergibt. Die Dimensionen der beiden Felder sind $[E] = \text{V/m}$ und $[H] = \text{A/m}$.

Für einen geraden, unendlichen, stromdurchflossenen Leiter ist das Feld aus Symmetriegründen kreisförmig. Da der eingeschlossene Strom für alle Kreise der gleiche ist, folgt aus (4.7)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 2\pi r I$$

oder

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

d.h. das Feld fällt proportional zum Abstand ab.

4.7.7 Spulen

Aus dem Durchflutungsgesetz kann man auch für weitere Leiteranordnungen die Magnetfelder berechnen. Eine wichtige Art sind Spulen.

Für eine zylinderförmige (Solenoid-) Spule befinden sich die Feldlinien vor allem innerhalb des Zylinders, wie in Abb. 4.100 gezeigt. Außerhalb ist das Feld wesentlich schwächer. Wir vernachlässigen hier diejenigen Feldlinien, welche zwischen den einzelnen Windungen aus der Spule hinauslaufen. Alle übrigen Feldlinien umschließen in guter Näherung N mal den Leiter. Somit ist der Strom, der durch die von dieser Feldlinie aufgespannte Fläche fließt NI . Wendet man darauf das Durchflutungsgesetz an, so erhält man

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{innen}} \vec{H}_i \cdot d\vec{s} + \int_{\text{außen}} \vec{H}_a \cdot d\vec{s}$$

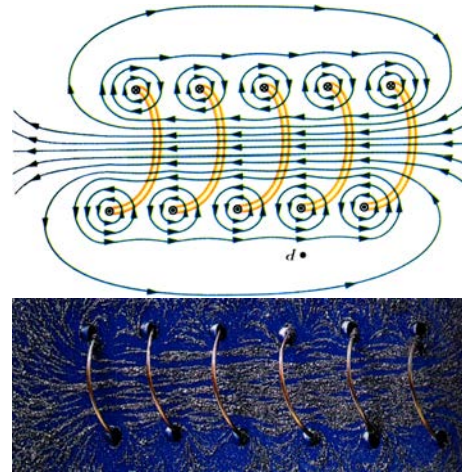


Abbildung 4.100: Verlauf der Feldlinien in einer stromdurchflossenen Spule; oben: schematisch; unten: sichtbar gemachte Feldlinien mit Hilfe von Eisenspänen.

$$\approx \int_{\text{innen}} \vec{H}_i \cdot d\vec{s}.$$

H_i beschreibt das Feld im Inneren der Spule, H_a außerhalb. Da das äußere Feld deutlich schwächer ist als das innere kann es in guter Näherung vernachlässigt werden. Das Feld im Inneren ist in guter Näherung konstant, so dass das Integral zu $H\ell$ wird, wobei ℓ die Länge der Spule darstellt. Damit erhalten wir für das Feld im Innern einer langen, dünnen Spule

$$H = \frac{NI}{\ell}.$$

Sowohl die Proportionalität zum Strom wie auch zur Windungszahl kann im Experiment verifiziert werden. Man sieht auch, dass das Feld im Innern der Spule recht homogen ist und außerhalb rasch abfällt.

Mit Hilfe von solchen Anordnungen werden heute die stärksten Magnetfelder erzeugt, die man im Labor erreichen kann, bis zu etwas über 100 T mit nicht-destruktiven Anordnungen, bei destruktiven Experimenten auch deutlich höher. In astrophysikalischen Objekten gibt es noch deutlich stärkere Magnetfelder: Auf der Oberfläche von Neutronensternen, wie z. B. Pulsaren, bis zu 10^8 T, bei Magnetaren, einer speziellen Sorte von Neutronensternen, bis zu 10^{11} T.

4.7.8 Das Biot-Savart Gesetz

(Benannt nach Jean Baptiste Biot (1774-1862), und Felix Savart (1791-1841))

Das Durchflutungsgesetz erlaubt einem nur für spezielle Fälle die Berechnung des Magnetfeldes, da es lediglich dessen Integral enthält.

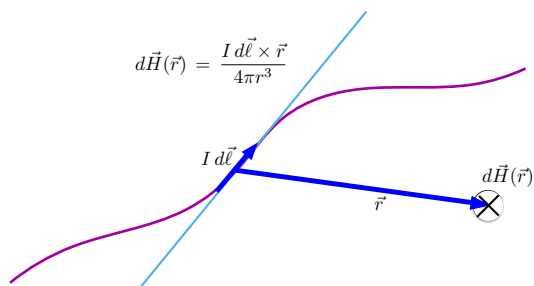


Abbildung 4.101: Magnetfeld eines Strom-Elementes.

Für beliebig geformte stromdurchflossene Leiter verwendet man eine differentielle Form und berechnet den Beitrag $d\vec{H}$ eines infinitesimalen Leiterstücks $d\vec{\ell}$ zum Magnetfeld im Punkt P (\rightarrow Abb. 4.101). Er beträgt

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

\vec{r} stellt den Verbindungsvektor vom Leiterelement zum Punkt P dar, an dem das Feld berechnet werden soll. Offenbar steht das Feld senkrecht zum Verbindungsvektor \vec{r} und zum Leiterelement $d\vec{\ell}$ d.h. senkrecht auf der Ebene, welche durch P und das Leiterelement definiert wird.

Für einen beliebigen (nicht notwendigerweise geschlossenen) Leiter erhält man das Magnetfeld als Integral über den Leiter,

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Das Biot-Savart'sche Gesetz kann in einem gewissen Sinn auch als das magnetische Äquivalent zum Coulomb'schen Gesetz angesehen werden: Während das Coulomb'sche Gesetz die Felderzeugung durch elektrische Ladungselemente beschreibt, wird hier die Felderzeugung durch Stromelemente beschrieben.

4.7.9 Magnetfeld ringförmiger Spulen

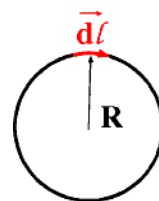


Abbildung 4.102: Kreisstrom und Längenelement $d\vec{\ell}$.

Als Beispiel berechnen wir das Magnetfeld im Mittelpunkt eines kreisförmigen Leiters, wie in Abb. 4.102 gezeigt. $d\vec{\ell}$ steht hier immer senkrecht auf \vec{r} , so dass man $d\vec{\ell} \times \vec{r}$ durch dsR ersetzen kann, wobei R den Radius des Rings darstellt. Damit wird

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \oint ds = \frac{I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{I}{2R}.$$

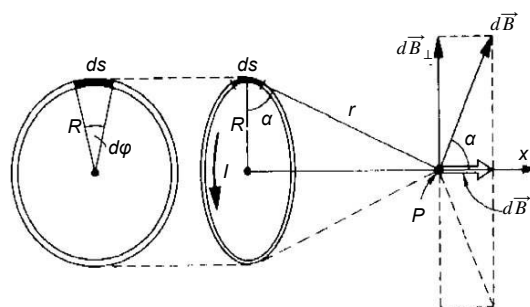


Abbildung 4.103: Magnetfeld auf der Spulenachse.

Analog kann man das Magnetfeld außerhalb der Leiterebene entlang der Symmetrieachse berechnen (\rightarrow Abb. 4.103). Aus Symmetriegründen bleibt nach Integration über die Spule lediglich die Komponente in Achsenrichtung übrig. Es genügt deshalb, wenn wir die Projektion auf die Achse berechnen, welche proportional ist zu $\cos \alpha$. Diese beträgt

$$H = \frac{I}{4\pi r^2} 2\pi R \cos \alpha.$$

Da $\cos \alpha = R/r$ wird somit

$$H = I \frac{R^2}{2r^3} = \frac{IR^2}{2(R^2 + \ell^2)^{3/2}},$$

wobei ℓ den Abstand von der Leiterebene darstellt.

Ist der Abstand ℓ groß im Vergleich zum Radius R , so kann dies vereinfacht werden zu

$$H = \frac{IR^2}{2\ell^3},$$

d.h. das Feld fällt mit der dritten Potenz des Abstandes ab. Der Kreisstrom IR^2 im Zähler entspricht einem magnetischen Dipol; dessen Stärke ist proportional zum Strom I und zur umflossenen Fläche.

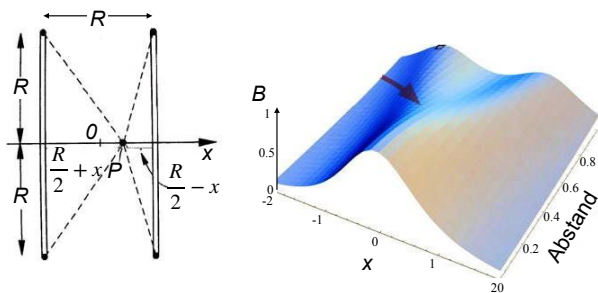


Abbildung 4.104: Ortsabhängigkeit der Magnetfeldstärke in einem Spulenpaar als Funktion des Abstandes zwischen den Spulen.

Benötigt man ein homogenes Magnetfeld, das besser zugänglich ist als für eine lange Spule, so kann man zwei (oder mehr) solche Spulen kombinieren wie in Abb. 4.104 gezeigt. In der Mitte zwischen den beiden Spulen ist die Ableitung der Stärke des Magnetfeldes aus Symmetriegründen immer Null, d.h. das Magnetfeld ist extremal und damit relativ homogen. Ist der Abstand gering, so erhält man ein Maximum, ist der Abstand groß, so handelt es sich um ein Minimum. Abb. 4.104 zeigt das Magnetfeld als Funktion des Spulenabstands und als Funktion des Ortes auf der Achse.

Helmholtz⁷ hat gezeigt, dass man für zwei Spulen die beste Homogenität erhält wenn die Spulen mit Radius R im Abstand R voneinander angebracht werden: dann wechselt die Krümmung von positiv auf negativ, d.h. sie verschwindet ebenfalls. Dazu muss in beiden Spulen der gleiche Strom in die gleiche Richtung fließen.

⁷Hermann von Helmholtz (1821-1894)

4.7.10 Flussdichte und magnetische Feldenergie

Im Rahmen der Elektrostatik hatten wir zwei Arten von Feldern diskutiert, das elektrische Feld E und die Verschiebungsdichte D , welche Polarisierungseffekte des Mediums enthält. Genauso gibt es in der Magnetostatik zwei Felder, das Magnetfeld H und die Flussdichte B . Im Vakuum sind die beiden Felder wieder direkt proportional:

$$B = \mu_0 H \quad [B] = \text{T} = \text{Tesla} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}. \quad (4.8)$$

Die Proportionalitätskonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

wird als magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des Vakuums bezeichnet. Eine präzisere Definition wird im Zusammenhang mit dem Induktionsgesetz gegeben.

Befinden sich die Felder nicht im Vakuum, sondern in einem Material, so muss die Proportionalität von Gleichung (4.8) um eine materialabhängige Konstante μ_r korrigiert werden. Diese liegt für die meisten Materialien nahe bei eins, außer bei den ferromagnetischen Materialien, welche in Kapitel 4.9.5 diskutiert werden.

Wie im elektrischen Feld ist auch im magnetischen Feld Energie gespeichert. Die magnetische Energiedichte ist

$$w_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB,$$

in offensichtlicher Analogie zur Elektrostatik (4.5). Die entsprechenden Einheiten sind

$$[HB] = \frac{\text{A Vs}}{\text{m m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

Da die Energie proportional zum Quadrat der Feldstärke ist, erhält man wiederum eine effektive Abstoßung der Feldlinien. Ein Magnetfeld speichert somit je nach Stärke eine große Energiemenge.

4.8 Bewegte Ladungen im Magnetfeld

4.8.1 Lorentzkraft

Bewegte Ladungen erzeugen Magnetfelder. Umgekehrt erzeugen Magnetfelder Kräfte auf bewegte Ladungen. Während statische Ladungen nur von elektrischen Feldern beeinflusst werden, wirken auf bewegte Ladungen auch in einem magnetischen Feld Kräfte.

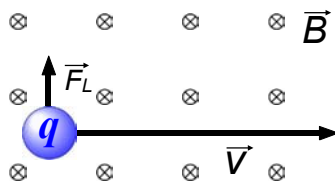


Abbildung 4.105: Kraft auf eine Ladung, die sich in einem Magnetfeld bewegt.

Bewegt sich eine Ladung q mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem Magnetfeld \vec{B} (\rightarrow Abb. 4.105), so spürt sie eine Kraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}),$$

welche als Lorentzkraft⁸ bezeichnet wird. Die drei Vektoren Geschwindigkeit, Magnetfeldrichtung und Kraft bilden ein rechtshändiges Koordinatensystem. Die Kraft wird maximal wenn die Bewegung senkrecht zum Magnetfeld erfolgt und verschwindet wenn sie parallel zu den Feldlinien läuft. Da die Kraft, und damit die Beschleunigung senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor stehen, ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht, sondern lediglich die Richtung. In einem homogenen Magnetfeld bewegen sich geladene Teilchen daher auf Kreisbahnen oder Spiralbahnen.

Die Ablenkung der Elektronen in einem Elektronenstrahl durch ein Magnetfeld wurde früher in Fernsehgeräten und Computermonitoren verwendet. Abb. 4.106 zeigt eine experimentelle Verifizierung des Effekts mit Hilfe des sogenannten Fadenstrahlrohrs.

Um ein homogenes Magnetfeld zu erhalten verwendet man ein Spulenpaar in Helmholtz Anordnung.

⁸nach Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928)

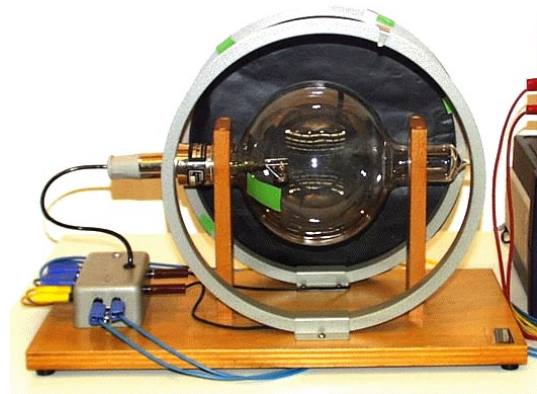


Abbildung 4.106: Fadenstrahlrohr.

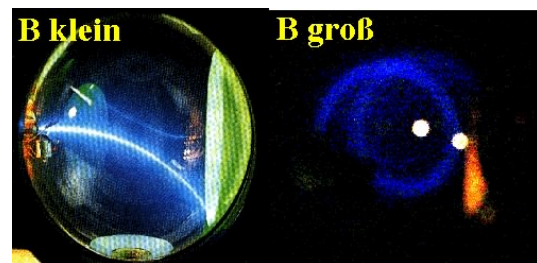


Abbildung 4.107: Spur der Elektronen in Magnetfeldern unterschiedlicher Stärke.

Die Elektronen werden über eine Beschleunigungsspannung in die Röhre "geschossen". Um den Elektronenstrahl sichtbar zu machen, wird verdünntes Wasserstoffgas verwendet, welches durch Elektronenstöße zum Leuchten gebracht wird. Ohne ein äußeres Feld bewegen sich die Elektronen geradlinig. Legt man ein Magnetfeld an, so wird der Strahl gebogen. Je stärker das Magnetfeld, desto enger die Kurve, wie in Abb. 4.107 gezeigt. Wird der Radius genügend klein, so kann er vollständig in der Röhre beobachtet werden.

4.8.2 Geladene Teilchen im Magnetfeld

Bewegt sich ein geladenes Teilchen senkrecht zum Magnetfeld, so wirkt eine Kraft, die senkrecht zum Magnetfeld und zum Geschwindigkeitsvektor steht. Das Teilchen wird dadurch beschleunigt, der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich jedoch nicht. Geschwindigkeit und Beschleunigung bleiben in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld, das Teilchen be-

wegt sich auf einer Kreisbahn. Der Radius r dieser Kreisbahn ist gegeben durch das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft F_{ZF} und Lorentzkraft F_L :

$$F_{ZF} = m \frac{v^2}{r} = F_L = qvB.$$

Somit ist

$$mv = qrB.$$

Wird die Geschwindigkeit v durch Beschleunigung mit einer elektrischen Potenzialdifferenz U erzeugt, so beträgt die kinetische Energie

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{mv^2}{2} = qU.$$

Somit

$$m^2 v^2 = q^2 r^2 B^2 = 2mqU.$$

Der Radius beträgt somit

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Umgekehrt kann aus der Messung des Radius das Verhältnis von Ladung zu Masse bestimmt werden

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}, \quad (4.9)$$

sofern das Magnetfeld bekannt ist.

Diese Messung kann auch am Fadenstrahlrohr durchgeführt werden. Im Experiment wurde eine Beschleunigungsspannung von 200 V verwendet. Der gemessene Strom kann in ein Magnetfeld umgerechnet werden:

$$B = 0,78 I \frac{\text{mT}}{\text{A}}.$$

Es wurden folgende Werte für Strom und Bahnradius gemessen:

I [A]	B [mT]	r [cm]	q/m [10^{11} C/kg]
1,25	0,998	4,55	1,94
1,5	1,17	3,73	2,1
2,0	1,56	2,91	1,94

Der Literaturwert beträgt, mit der Elementarladung e und der Elektronenmasse m_e

$$\frac{e}{m_e} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}}{9,109 \cdot 10^{-31} \text{kg}} = 1,760 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

4.8.3 Anwendungen

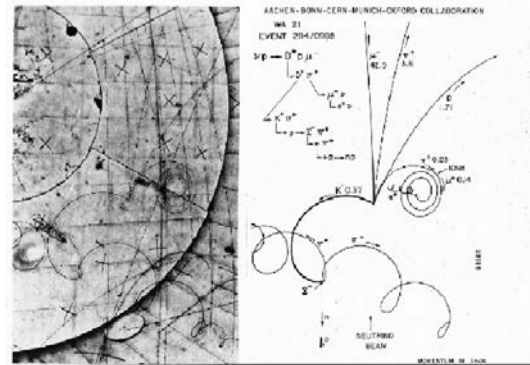


Abbildung 4.108: Teilchenspuren in der BEBC (=Big European Bubble Chamber) am CERN.

Die Möglichkeit, aus der Bahn eines Teilchens seine spezifische Ladung, also das Verhältnis von Ladung zu Masse zu bestimmen, wird z.B. in der Teilchenphysik intensiv genutzt, z.B. in so genannten Blaskammern, wo die Messung des Bahnradius wichtige Rückschlüsse auf die Art des erzeugten Teilchens ermöglicht. Abb. 4.108 zeigt als Beispiel einige Spuren, welche am CERN beobachtet wurden. Die Richtung der Bahnkrümmung erlaubt die Bestimmung des Vorzeichens der Ladung.

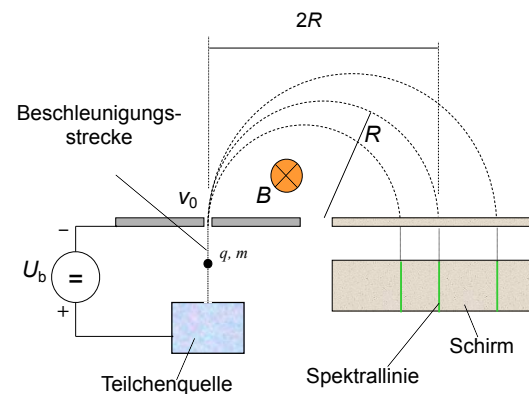


Abbildung 4.109: Massenspektrometer.

Man verwendet diesen Effekt auch, um Teilchen nach ihrer Masse (genauer: dem Verhältnis aus Ladung zu Masse) zu sortieren. Wie in Abb. 4.109 gezeigt, werden die geladenen Teilchen zunächst in einem elektrischen Feld beschleunigt. Danach werden

sie in einem Magnetfeld B abgelenkt, auf eine Kreisbahn mit Radius R . durch Auflösen von Gleichung (4.9) erhält man die Masse als Funktion des Bahnradius:

$$m = q \frac{B^2 R^2}{2U}.$$

Solche Geräte werden z.B. in der Chemie verwendet, um Moleküle zu identifizieren. Sie werden als Massenspektrometer bezeichnet.

4.8.4 Bahnen im Magnetfeld

Bewegt sich das Teilchen parallel zu den Magnetfeldlinien, so verschwindet das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$. Somit wirkt in diesem Fall keine Kraft auf das Teilchen, es kann sich entlang der Magnetfeldlinien frei bewegen.

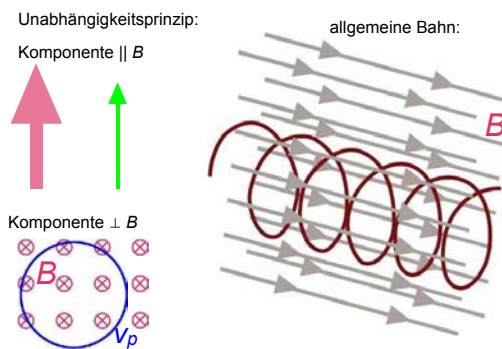


Abbildung 4.110: Allgemeine Bahn im Magnetfeld.

Im allgemeinen Fall hat das Teilchen Geschwindigkeitskomponenten parallel und senkrecht zum Magnetfeld. Während die parallele Komponente nicht beeinflusst wird und deshalb konstant bleibt, wird die senkrechte Komponente auf eine Kreisbahn gezwungen. Insgesamt resultiert somit eine Spiralbewegung um die Magnetfeldlinien, wie in Abb. 4.110 gezeigt. Dies kann wiederum im Fadenstrahlrohr beobachtet werden, indem man den Strahl verkippt, so dass er auch eine Komponente parallel zur Achse der Helmholtz-Spulen aufweist.

Bewegt sich ein geladenes Teilchen in einem inhomogenen Magnetfeld mit einer Geschwindigkeitskomponente entlang der Magnetfeldrichtung, so wirkt eine Kraft gegen diese Richtung, wie in Abb.

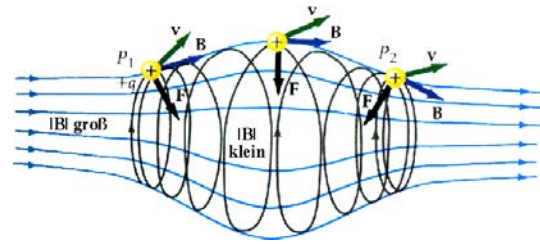


Abbildung 4.111: Magnetische Flasche.

4.111 gezeigt. Die Geschwindigkeit in Feldrichtung wird dadurch reduziert. Offenbar wirken somit Regionen starken Feldes wie ein Spiegel. "Magnetische Flaschen" können deshalb für den Einschluss von elektrisch geladenen Teilchen verwendet werden.

4.8.5 Geladene Teilchen im Erdmagnetfeld

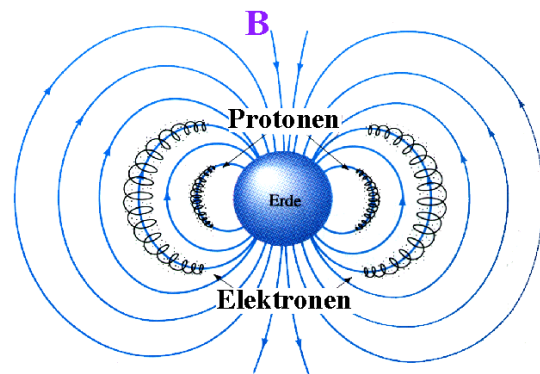


Abbildung 4.112: Geladene Teilchen im Magnetfeld der Erde.

Das Magnetfeld der Erde fängt auf ähnliche Weise elektrisch geladene Teilchen ein. Abb. 4.112 zeigt schematisch die Regionen, in denen Teilchen eingefangen werden.

Diese Bewegung von geladenen Teilchen ist u.a. für die Strahlungsgürtel (van Allen Gürtel) um die Erde verantwortlich. Allerdings können geladene Teilchen ebensowenig in diesen Bereich eindringen wie sie ihn verlassen können. Die hier gefangenen Teilchen wurden stattdessen zu einem wesentlichen Teil in der Magnetosphäre erzeugt. Wie in Abb. 4.113 gezeigt, schlagen kosmische Strahlen aus der Erdatmosphäre Neutronen heraus, welche als ungeladene Teilchen vom Magnetfeld der Erde nicht beeinflusst

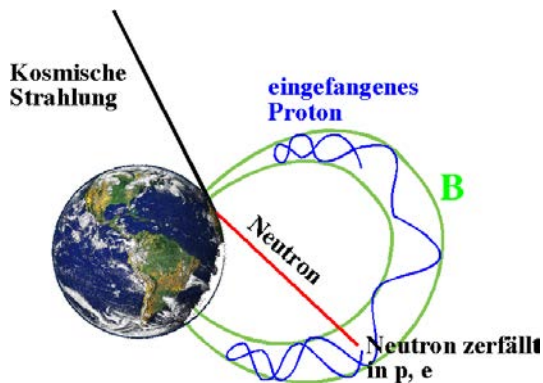


Abbildung 4.113: Einfangen der Teilchen.

werden. Sie haben jedoch eine endliche Lebensdauer und zerfallen z.T. im Magnetfeld in Protonen. Diese werden vom Magnetfeld eingefangen.

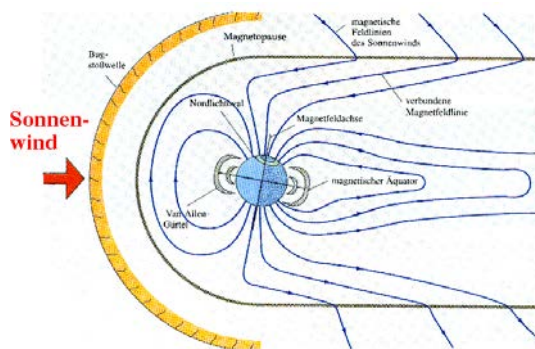


Abbildung 4.114: Verformung des Erdmagnetfeldes im Sonnenwind.

Das Magnetfeld der Erde wird verzerrt durch den Sonnenwind. Abb. 4.114 zeigt den Effekt. Dieser kommt dadurch zustande, dass die geladenen Teilchen im Magnetfeld durch die Lorentzkraft in unterschiedliche Richtungen abgelenkt werden. Dadurch fließt netto ein Strom senkrecht zum äußeren Magnetfeld. Dieser Strom erzeugt ein zusätzliches Magnetfeld, welches sich dem vorhandenen überlagert. Das Resultat entspricht einer Kraft auf die Feldlinien: sie werden in der Richtung der bewegten Ladungen gedrückt. Das Magnetfeld der Erde ist deshalb stark asymmetrisch: Auf der Seite der Sonne fällt es nach ca. 10 Erdradien auf die Stärke des Magnetfeldes der Sonne ab; auf der sonnenabgewandten Seite reicht es bis auf ca. 1000 Erdradien hinaus.

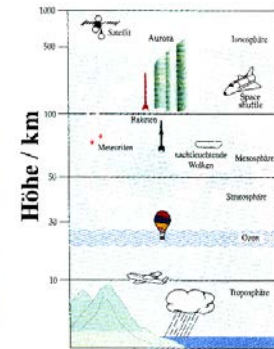


Abbildung 4.115: Das Polarlicht (Aurora Borealis) entsteht in den obersten Schichten der Erdatmosphäre.

Die geladenen Teilchen des Sonnenwinds werden vom Magnetfeld der Erde abgelenkt, aber nicht eingefangen. Wenn sie in die Erdatmosphäre eindringen, ionisieren sie die Luftmoleküle und regen sie zum Leuchten an, wie in Abb. 4.115 gezeigt. Das kann als Nordlicht beobachtet werden. Die Leuchterscheinungen finden in der Ionosphäre, in Höhen von mehreren hundert Kilometern statt, da die Teilchen nicht bis in niedrigere Bereiche der Atmosphäre gelangen.

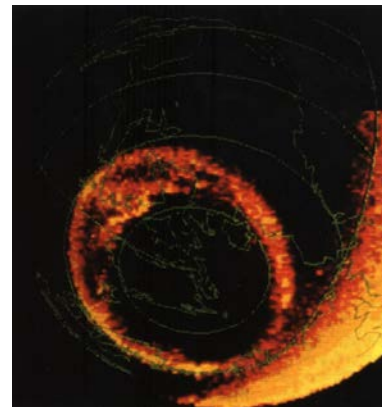


Abbildung 4.116: Polarlicht aus dem Weltraum.

Die Satellitenaufnahme in Abb. 4.116 zeigt, dass Nordlichter vor allem in der Nähe der magnetischen Pole stattfinden, wo die Magnetfeldlinien des Erdmagnetfeldes in die Erdatmosphäre eindringen.

Wie das Licht zustande kommt lässt sich u. A. an seinem Spektrum ablesen: im Gegensatz zum Sonnenlicht, welches ein kontinuierliches Spektrum auf-

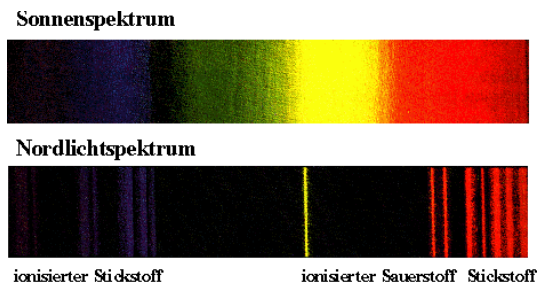


Abbildung 4.117: Spektren aus dem Nordlicht.

weist (d.h. sämtliche Wellenlängen sind vorhanden), besitzt das Nordlicht ein diskretes Linienspektrum, wie in Abb. 4.117 gezeigt. Die beobachteten Linien kommen dadurch zustande, dass die hochenergetischen Teilchen beim Eintreten in die Erdatmosphäre durch Stöße Luftmoleküle ionisieren. Wenn diese aus ihren hoch angeregten Zuständen in niedriger angeregte zurückfallen senden sie Licht von wohl definierter Wellenlänge aus.

4.8.6 Gekreuzte E- und B-Felder

Die Lorentzkraft ist genau so wie die Coulomb-Wechselwirkung proportional zur Ladung. Die Lorentzkraft ist zusätzlich aber auch proportional zur Geschwindigkeit, d.h. sie verschwindet, wenn die Ladung ruht. Man kann diesen Unterschied dazu verwenden, ein Geschwindigkeitsfilter für geladene Teilchen zu konstruieren.

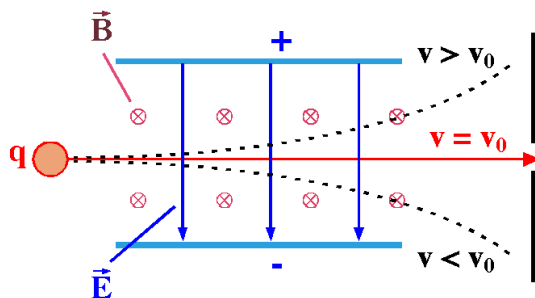


Abbildung 4.118: Gekreuzte Felder als Geschwindigkeitsfilter.

Abb. 4.118 zeigt das Prinzip: Man verwendet dazu ein elektrisches und ein magnetisches Feld im rechten Winkel zueinander. Eine Ladung q , welche sich

durch diese beiden Felder bewegt, erfährt die Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Diese verschwindet wenn die beiden Vektoren \vec{E} und $\vec{v} \times \vec{B}$ in entgegengesetzte Richtungen zeigen und die Geschwindigkeit des Teilchens gerade

$$v_0 = \frac{|E|}{|B|}$$

beträgt. Teilchen, für die diese Bedingung erfüllt ist, treffen durch die Blende am Ende des Apparates, während langsamere oder schnellere Teilchen nach unten oder oben abgelenkt werden, wie in Abb. 4.118 gezeigt.

Die elektrische und die magnetische Kraft sind beide proportional zur Ladung q , aber die Lorentzkraft ist außerdem proportional zur Geschwindigkeit v . Bei geringen Geschwindigkeiten ist deshalb die Coulomb-Kraft meistens wichtiger. Bei hohen Geschwindigkeiten, d.h. $v \approx c$ ändert sich dies jedoch. Ein Magnetfeld von 1 T erzeugt dann die gleiche Kraft wie ein elektrisches Feld

$$E = cB = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Dieser Wert ist deutlich höher als die Werte, welche üblicherweise in einem Labor erreicht werden können. Für schnelle Teilchen sind somit Magnetfelder eine deutlich effizientere Methode, ihre Flugbahn zu lenken.

4.8.7 Zyklotron

Mit Hilfe einer Kombination von elektrischen und magnetischen Feldern können elektrische Teilchen auf räumlich begrenztem Raum auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt werden. Ein relativ weit verbreitetes Gerät ist das Zyklotron.

Im Zyklotron (\rightarrow Abb. 4.119) werden Protonen durch ein homogenes Magnetfeld auf Kreisbahnen gezwungen. Zur Beschleunigung wird zwischen den beiden halbkreisförmigen (D-förmigen) Elektroden ein elektrisches Wechselfeld angelegt. Dieses wird synchron mit den umlaufenden Ionen umgepolt, typischerweise mit 10-30 MHz. Dadurch erfahren die

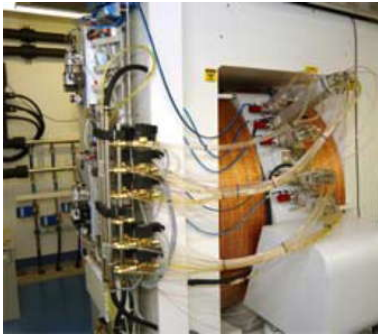


Abbildung 4.119: Zyklotron.

positiven Ionen im Spalt zwischen den beiden Elektroden immer ein Feld in Vorwärtsrichtung und werden so beschleunigt. Im Bereich der Elektroden ist das Gebiet frei von elektrischen Feldern, sie werden lediglich durch das senkrecht zu den Platten angelegte magnetische Feld auf Kreisbahnen geführt.

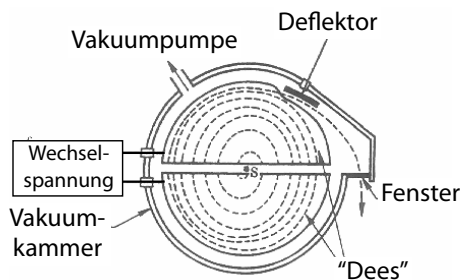


Abbildung 4.120: Bewegung der Ionen im Zyklotron.

Abb. 4.120 zeigt die Bahnen von geladene Teilchen im Magnetfeld. Bei konstanter Energie sind die entsprechenden Bahnen Kreisbahnen, wie in Kapitel 4.8.4 gezeigt. Deren Radius ist bestimmt durch das Gleichgewicht aus Lorentzkraft und Zentrifugalkraft:

$$evB = m \frac{v^2}{r}.$$

Daraus ergibt sich der Radius der Kreisbahn

$$r = \frac{mv}{eB}$$

und die Geschwindigkeit der Teilchen

$$v = \frac{eBr}{m}.$$

Der Radius ist somit proportional zur Geschwindigkeit und indirekt proportional zur Stärke des Magnetfeldes. Beim Beschleunigungsprozess wird den Elektronen durch Hochfrequenzfelder Energie zugeführt, sie werden also beschleunigt. Aufgrund der zunehmenden Geschwindigkeit wird der Bahnradius größer. Da der Radius proportional ist zur Geschwindigkeit, bleibt die Umlaufzeit konstant,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{eB}.$$

Somit ist die benötigte Hochfrequenz für alle Teilchen die gleiche, unabhängig von ihrer Geschwindigkeit und dem Bahnradius. Sie hängt jedoch von der spezifischen Ladung e/m ab.

Die Energie der Ionen ist

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(eBr)^2}{2m}.$$

Die maximale Energie wird erreicht, wenn die Teilchen den maximalen Radius erreichen. Dieser ist durch die Grenzen des Vakuumgefäßes oder des Magnetfeldes gegeben. Mit solchen Geräten können Energien von bis zu 25 MeV erreicht werden.

4.8.8 Hall Effekt

Während wir bisher nur die Bewegung geladener Teilchen im Vakuum diskutiert haben findet man die gleichen Prozesse auch in Materie. So kann die Kompensation von gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern in Halbleitern beobachtet werden. Er wird dort als Hall-Effekt bezeichnet.

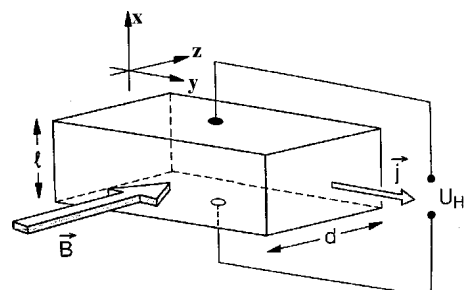


Abbildung 4.121: Hall Effekt: Strom im Magnetfeld.

Fließt ein Strom in einem dünnen Plättchen der Dicke ℓ , und ist ein Magnetfeld senkrecht dazu angelegt, so erfahren die Ladungsträger eine Lorentzkraft, welche sie in der Geometrie von Abb. 4.121 nach oben oder unten ablenkt. Abb. 4.121 zeigt die entsprechende Mess-Anordnung. Die Lorentzkraft wird dann kompensiert, wenn sich durch die abgelenkten Ladungsträger ein elektrisches Feld senkrecht zur Flussrichtung aufgebaut hat.

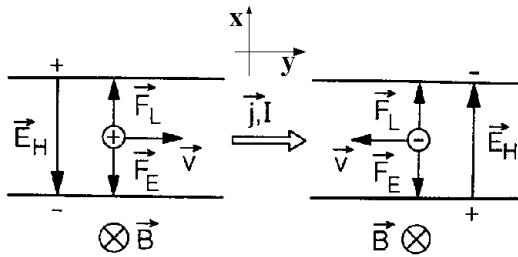


Abbildung 4.122: Kräfte beim Hall Effekt.

Abb. 4.122 zeigt den Fall, dass sich die Kräfte gerade kompensieren - einmal für positive Ladungen, einmal für negative. Handelt es sich bei den Ladungsträgern um Elektronen, so ist die Bewegungsrichtung der Ladungsträger entgegen der Stromrichtung. Dann kompensiert das Feld die Lorentzkraft wenn

$$eE_x = \frac{eU_x}{\ell} = -ev_y B_z.$$

Diese resultierende Spannung

$$U_x = -\ell v_y B_z = U_H$$

wird als Hall-Spannung U_H bezeichnet.

Wie in Kapitel 4.5.7 diskutiert, wird die Geschwindigkeit v_y der Ladungsträger als Driftgeschwindigkeit bezeichnet. Sie kann über die Stromdichte j und Ladungsträgerdichte n bestimmt werden:

$$j = \frac{I}{\ell d} = nqv_y.$$

Damit wird die Driftgeschwindigkeit

$$v_y = \frac{j}{nq} = \frac{I}{\ell d n q}$$

und wir erhalten für die Hall Spannung

$$U_H = U_x = -\frac{\ell j B_z}{nq} = -\frac{I B_z}{n q d}.$$

Die Messung der Hall Spannung kann deshalb zur Messung der magnetischen Flussdichte B_z (bei bekannter Ladungsträgerdichte) oder zur Messung der Ladungsträgerdichte n (bei bekannter Flussdichte) verwendet werden.

4.8.9 Messung der Ladungsträgerdichte

Die Hall Spannung ist indirekt proportional zur Dichte der Ladungsträger. Der Grund ist, dass bei geringerer Ladungsträgerdichte die Geschwindigkeit der Ladungsträger bei gegebenem Strom größer ist und somit die Lorentzkraft stärker wirkt. Deshalb macht sich der Halleffekt bei Halbleitern, wo die Ladungsträgerdichte gering ist, stärker bemerkbar als bei Metallen mit hoher Ladungsträgerdichte.

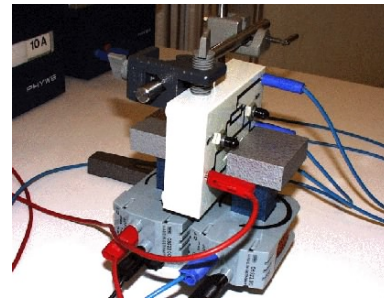


Abbildung 4.123: Messung des Hall Effektes.

Abb. 4.123 zeigt ein entsprechendes Experiment. Hier wird ein Wismut Plättchen mit einer Breite von $d = 2 \text{ mm}$ verwendet. Die Ladungsträgerdichte ne von Wismut beträgt $2 \cdot 10^6 \text{ C m}^{-3}$. Bei einem Strom von 4 A und einem Feld von $B = 35 \text{ mT}$ erhält man eine Hall Spannung von

$$U_H = \frac{4 \text{ A } 35 \cdot 10^{-3} \text{ T}}{2 \cdot 10^6 \text{ C m}^{-3} 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 35 \mu \text{ V}.$$

Wismut ist für Hall-Experimente wegen der geringen Ladungsträgerdichte besonders geeignet. Für Kupfer findet man im Experiment eine Hall-Konstante (Materialkonstante)

$$K_H = \frac{1}{nq} = -0.55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}.$$

Das Vorzeichen besagt dass die Ladungsträger negativ (d.h. Elektronen) sind. Mit $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$

C findet man für die Dichte der Ladungsträger

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{K_{He}} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 0,55 \cdot 10^{10} \text{m}^3/\text{C}} \\ &= 11,3 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

Diesen Wert kann man vergleichen mit der Dichte der Atome in Kupfer:

$$\begin{aligned} n_{Cu} &= \frac{N_A \rho}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 8,91 \cdot 10^6}{63,55} \text{m}^{-3} \\ &= 8,46 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

Offenbar tragen pro Cu-Atom 1,3 Elektronen zur elektrischen Leitung bei. Man kann dies verallgemeinern: In metallischen Leitern ist das Verhältnis der Leitungselektronen zu Atomen von der Größenordnung eins.

Aus dem Vorzeichen der Hall Konstanten kann man auch die Art der Ladungsträger bestimmen. In den meisten Metallen sind die Ladungsträger negativ geladen, d.h. es handelt sich um Elektronen.

4.8.10 Stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

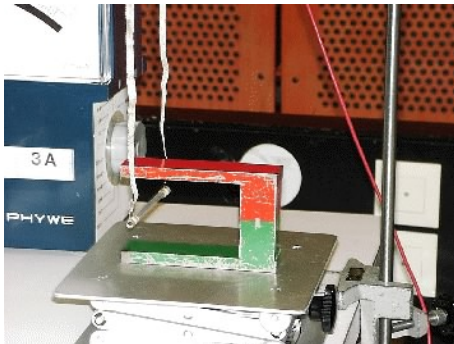


Abbildung 4.124: Leiterschaukel im Magnetfeld.

Befinden sich die bewegten Ladungen in einem Leiter, so wirkt eine entsprechende Kraft auf den Leiter. Abb. 4.124 zeigt eine entsprechende experimentelle Anordnung. Die Summe der Lorentz-Kräfte auf alle $N = nV$ beweglichen Ladungen im Volumen V beträgt

$$\vec{F}_L = Vnq(\vec{v} \times \vec{B}) = V(\vec{j} \times \vec{B}).$$

Hier wurde die Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{I}{A} = nq\vec{v}$$

verwendet, wobei angenommen wurde, dass sie über das betrachtete Volumen konstant sei. Dies ist für infinitesimale Volumenelemente erfüllt; es ist deshalb sinnvoll, die Kraft auf das entsprechende Volumenelement zu beziehen:

$$\frac{\vec{F}_L}{\Delta V} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

Offenbar ergibt das Vektorprodukt von Stromdichte und Flussdichte die Kraftdichte. Diese Gleichung enthält keine Proportionalitätskonstante; dies ist kein Zufall: Die Flussdichte B wurde so definiert, dass in dieser Gleichung die Proportionalitätskonstante = 1 wird.

Genau wie die Ladungen wird der stromdurchflossene Leiter senkrecht aus dem Magnetfeld hinaus gedrückt. Die Kraft beträgt für ein infinitesimales Leiterstück $d\ell$

$$d\vec{F} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}).$$

Man verifiziert im qualitativen Vorlesungsexperiment dass sowohl eine Umkehrung der Stromrichtung wie auch eine Umkehrung der Richtung des Magnetfeldes eine Umkehr der Kraftwirkung ergeben.

Den gleichen Effekt kann man auch über das Magnetfeld erklären: Der stromdurchflossene Leiter erzeugt ein kreisförmiges Magnetfeld, welches dem äußeren Magnetfeld überlagert wird. Das gesamte Magnetfeld ist auf einer Seite des Leiters schwächer als auf der anderen Seite. Da Magnetfeldlinien sich gegenseitig abstoßen, resultiert dies in einer Kraft auf den Leiter, welche so wirkt, dass die Feldstärke ausgeglichen wird.

4.8.11 Parallele stromdurchflossene Leiter

Analog wirkt eine Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern, wie im Beispiel von Abb. 4.125. Man kann dies verstehen, indem man die Kraft, die auf den Leiter 2 wirkt, beschreibt als Resultat des

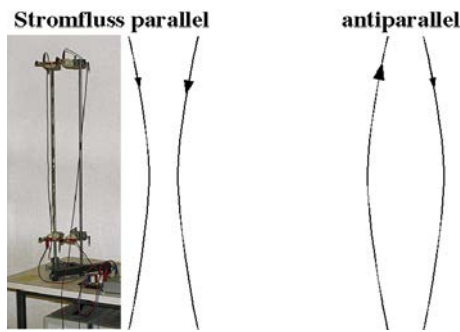


Abbildung 4.125: Parallele stromdurchflossene Leiter.

Stromflusses im Magnetfeld des Leiters 1 (und umgekehrt): Der eine Leiter erzeugt ein Magnetfeld

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

Der stromdurchflossene zweite Leiter der Länge ℓ erfährt damit eine Kraft

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Die Richtung der Kraft ist offenbar senkrecht zum Leiter und senkrecht zum Feld. Das Feld ist wiederum senkrecht zur Ebene, in der sich die beiden Leiter befinden. Damit wirkt die Kraft in der Ebene der Leiter. Der Betrag ist

$$|F| = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi r} I_1 I_2.$$

Da die Kraft auf beide Leiter gleich wirkt, wurde hier der Index 2 weggelassen. Der numerische Wert wird mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ und $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$, $\ell = r = 1 \text{ m}$, $|F| = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$. Dieser Wert ist exakt, ohne Rundung, weil die Stromstärke im SI-System so definiert ist:

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorruft.

Für praktische Realisierungen werden allerdings etwas andere Geometrien verwendet. Die Richtung der Kraft ist anziehend, sofern die beiden Ströme parallel fließen, abstoßend wenn sie in entgegengesetzte Richtungen fließen.

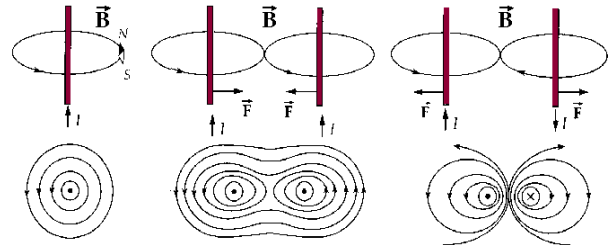


Abbildung 4.126: Feldlinien von 2 parallelen Strömen.

Man kann den Effekt auch auf eine etwas symmetrischere Weise herleiten, indem man die Überlagerung der Feldlinien betrachtet, wie in Abb. 4.126 gezeigt. Fließen die beiden Ströme parallel, so kommt es zwischen den beiden Leitern zu einer Reduktion der Feldstärke und damit zu einer anziehenden Kraft. Fließen die beiden Ströme in entgegengesetzter Richtung, so verstärken sich die Felder zwischen den Leitern und die Abstoßung der Feldlinien führt zu einer Abstoßung der Leiter.

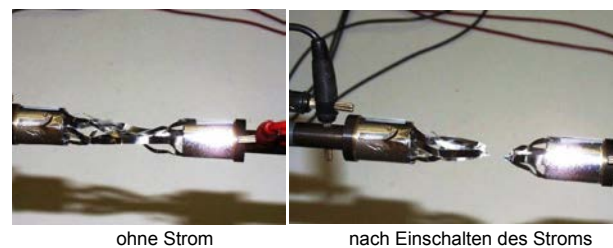


Abbildung 4.127: Pinch Effekt an einem System aus Aluminiumleitern.

Die gegenseitige Anziehung von parallel fließenden Strömen erzeugt eine Art gegenseitige Anziehungskraft. Je größer die Stromdichte desto größer die gegenseitige Anziehung. Abb. 4.127 zeigt dies an einem einfachen Beispiel, in dem ein Strom durch ein Bündel von Aluminiumstreifen fließt. Diese ziehen sich immer stärker zusammen, bis sie an der dünnsten Stelle verglühen.

4.8.12 Drehmoment auf Leiterschleife

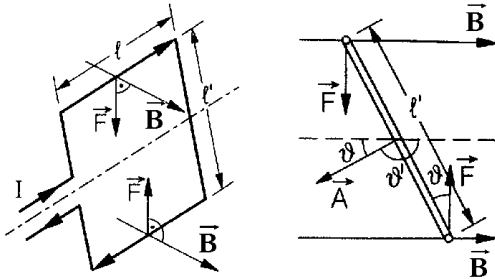


Abbildung 4.128: Kräfte auf Leiterschleife im Magneteten.

Wir verwenden diese Resultate, um das Drehmoment zu berechnen, welches auf eine stromdurchflossene Leiterschleife in einem Magnetfeld wirkt. Abb. 4.128 zeigt die entsprechende Anordnung. Die Leiterschleife sei um eine Achse (in der Figur gestrichelt gezeichnet) drehbar gelagert. Wir brauchen hier nur die beiden parallelen Teilstücke der Länge ℓ zu betrachten. Sie liegen senkrecht zu den Magnetfeldlinien, so dass der Betrag der Kraft durch

$$F = I \ell B$$

gegeben ist. Zusammen bilden sie ein Kräftepaar und erzeugen ein Drehmoment

$$M = F \ell' \sin \theta' = I \ell \ell' B \sin \theta' = I A B \sin \theta',$$

also proportional zum Produkt aus Strom, stromumflossener Fläche A und Flussdichte B . Das Drehmoment wird maximal, wenn die Flächennormale zur Schleife senkrecht zu den Feldlinien liegt, also bei $\theta' = \pm \pi/2$.

Man kann dieses Resultat auch sehr kompakt schreiben als

$$\vec{M} = I \vec{A} \times \vec{B},$$

wobei \vec{A} wie üblich senkrecht auf der Fläche A steht und sein Betrag gleich der Fläche ist. Dieses Resultat gilt allgemein, nicht nur für rechteckige Stromschleifen. In Analogie zum entsprechenden Resultat der Elektrostatik kann man ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$ definieren

$$\vec{\mu} = I \vec{A}$$

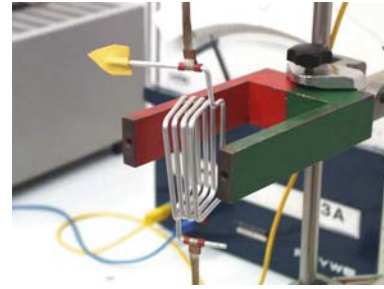


Abbildung 4.129: Demonstration des Drehmoments.

und erhält $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ - genau wie zu Beginn des Kapitels für elementare magnetische Dipole diskutiert.

Man kann diesen Effekt leicht verifizieren, indem man eine stromdurchflossene Spule in das Magnetfeld eines Permanentmagneten bringt. Abb. 4.129 zeigt das entsprechende Experiment.

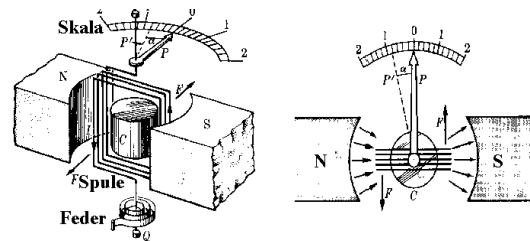


Abbildung 4.130: Schematischer Aufbau eines Drehspulinstruments.

Dieses Prinzip kann z.B. für die Messung eines Stroms verwendet werden. Wie in Abb. 4.130 gezeigt, lässt man ihn durch eine Leiterschleife fließen, welche sich in einem Magnetfeld befindet. Die beiden Teilstücke, welche senkrecht zu den Feldlinien laufen, erzeugen ein Drehmoment, welches über einen Zeiger nachgewiesen wird.

4.8.13 Elektromotoren

Das Drehmoment, welches eine stromdurchflossene Spule in einem Magnetfeld erfährt, bildet auch die Basis für Elektromotoren. Wie in Abb. 4.131 gezeigt, verwendet man einen statischen Magneten (Stator) und stromdurchflossene Leiter, welche einen magnetischen Dipol erzeugen, der sich im Magnetfeld des Stators ausrichtet.

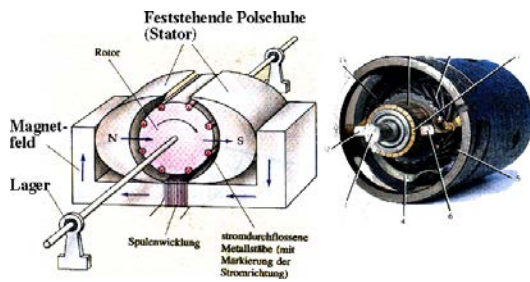


Abbildung 4.131: Aufbau eines Elektromotors.

Da man in diesem Fall im Allgemeinen eine kontinuierliche Rotation erhalten möchte, muss der Stromfluss entsprechend angepasst werden. Indem man diesen Dipol in eine andere Richtung dreht, erreicht man eine Drehung des Rotors. Dazu müssen die Ströme im richtigen Moment auf andere Leitersätze übertragen werden. Dies leisten die sogenannten Bürsten oder Schleifkontakte. Diese Art von Motoren wird mit Gleichstrom betrieben und wird deshalb als Gleichstrommotor bezeichnet.

Eine andere Möglichkeit ist der Betrieb mit Wechselstrom. Entsprechende Motoren werden als Wechselstrommotoren bezeichnet.

4.8.14 Elektromagnetische Bezugssysteme

Die elektrischen und magnetischen Felder sind eng miteinander verknüpft; bei einem Wechsel des Bezugssystems gehen die einen (teilweise) in die anderen über.

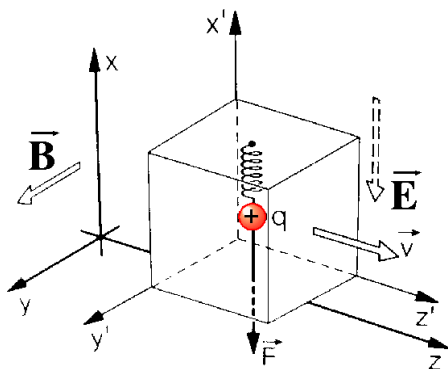


Abbildung 4.132: Kraft auf bewegte Ladung.

Abb. 4.132 zeigt eine Box, in der eine Ladung

an einem Kraftmesser aufgehängt ist. Wird diese Box durch ein horizontales ($\parallel y$) Magnetfeld bewegt, wirkt auf die Ladung eine Lorentzkraft

$$\vec{F}_1 = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

nach unten. Für einen Beobachter, der sich mit der Box mitbewegt, wird $v = 0$, und die Lorentzkraft verschwindet. Er sieht aber trotzdem die Auslenkung. Offenbar existiert in seinem Bezugssystem ein elektrisches Feld, welches eine Kraft

$$\vec{F}_2 = q\vec{E}$$

bewirkt. Offenbar entsteht durch den Übergang ins bewegte Bezugssystem ein zusätzliches Feld

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}.$$

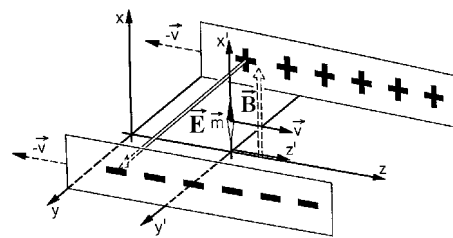


Abbildung 4.133: Felder in einem bewegten Bezugssystem.

Ein analoges Gedankenexperiment kann man für magnetische Wechselwirkungen durchführen. In Abb. 4.133 bewegt sich eine Magnetenadel zwischen zwei geladenen Platten. Ein Beobachter, der sich mit der Nadel mitbewegt, sieht auf beiden Seiten eine Flächenstromdichte, welche ein Magnetfeld erzeugt. Die Stärke dieses Magnetfeldes beträgt (ohne Herleitung)

$$B' = -\epsilon_0\mu_0(\vec{v} \times \vec{E}),$$

wobei \vec{E} das Feld ist, welches im Ruhesystem durch die Ladungsverteilung erzeugt wird.

Beide Felder - das elektrische wie das magnetische - sind jeweils senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zum ursprünglichen Feld orientiert. Die Feldkomponenten entlang der Bewegungsrichtung werden jeweils nicht betroffen.

4.8.15 Lorentz-Transformation

Die hier diskutierten Beziehungen müssen modifiziert werden wenn die Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit c nähert. Sie lauten dann für eine Bewegung in x -Richtung mit Geschwindigkeit $v_x = \beta c$:

$E'_x = E_x$	$H'_x = H_x$
$E'_y = \gamma(E_y - v_x B_z)$	$H'_y = \gamma(H_y + v_x D_z)$
$E'_z = \gamma(E_z + v_x B_y)$	$H'_z = \gamma(H_z - v_x D_y)$

Der Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wurde bereits in Kapitel 2.8.11 eingeführt. Er ist ~ 1 so lange die Geschwindigkeit klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit. Wie in der Relativitätstheorie gezeigt wird kann die Geschwindigkeit nicht größer als c werden. Wenn $v \rightarrow c$ geht, wird γ sehr groß. Diese Transformation der Feldgleichungen kann auch verwendet werden, um z.B. das Biot-Savart'sche Gesetz aus dem Coulomb-Gesetz herzuleiten.

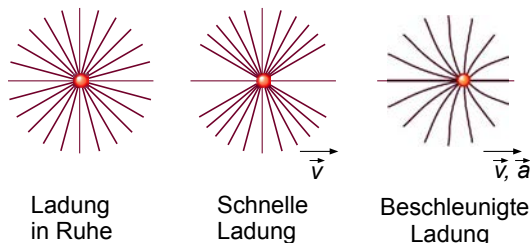


Abbildung 4.134: Feldlinien von relativistisch bewegten Ladungen.

Die Feldlinien sehen dementsprechend anders aus: für sehr schnelle Teilchen sind die Feldlinien in einer Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung konzentriert, wie in Abb. 4.134 gezeigt. Bei beschleunigten Ladungen werden sie außerdem gekrümmt.

Dies ist auch der Grund dafür dass die Strahlung bei relativistischen Teilchen grösstenteils in Vorwärtsrichtung abgestrahlt wird. Abb. 4.135 zeigt den Strahlungskegel für eine Ladung, welche sich mit

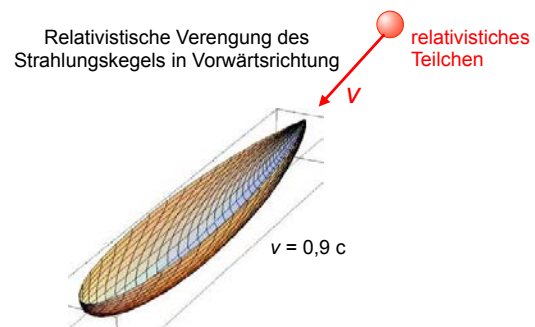


Abbildung 4.135: Relativistische Verengung des Strahlungskegels in Vorwärtsrichtung.

90 % der Lichtgeschwindigkeit bewegt. Ein Beispiel dafür solche relativistischen Teilchen sind Elektronen in einem Speicherring (wie z.B. DELTA).

4.9 Materie im Magnetfeld

Diese Kapitel behandelt die magnetischen Eigenschaften von Materie. Hier geht es nicht um mikroskopische elementare Teilchen wie einzelne magnetische Dipole, sondern um makroskopische Körper. Deren Eigenschaften können jedoch auf die Wechselwirkungen zwischen den darin enthaltenen elementaren magnetischen Dipolen zurückgeführt werden.

4.9.1 Elementare magnetische Dipole

Ein Stahldraht kann magnetisiert werden indem man ihn in ein Magnetfeld bringt. Der Draht enthält anschließend einen Nord- und einen Südpol, wie man anhand der Wechselwirkung mit einer Kompassnadel nachweisen kann.

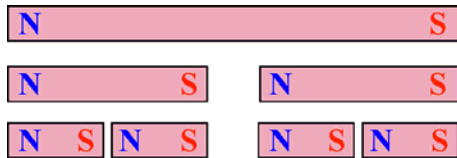


Abbildung 4.136: Dipole in einem magnetisierten Draht.

Dass es sich hier um mikroskopische Dipole handelt, und nicht um jeweils einen magnetischen Monopol am Ende des Drahtes, sieht man daran, dass man beim Teilen des Drahtes in zwei Teile die Teile nicht eine "Ladung" enthalten, sondern selber wieder als Dipole wirken, wie in Abb. 4.136 gezeigt.

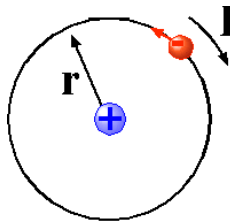


Abbildung 4.137: Elementarer Dipol = Kreisstrom.

Die Aufteilung in immer kleinere Dipole geht weiter bis auf die atomare Ebene. Wie bei der Diskussion der stromdurchflossenen Leiterschleife gezeigt, erzeugen elektrische Kreisströme magnetische Dipolmomente

$$\vec{\mu} = IA\vec{n} \quad [\mu] = \text{Am}^2,$$

wobei I den Strom, A die Fläche und \vec{n} den Normalenvektor auf die Fläche darstellt. Solche Dipole existieren auch in mikroskopischer Form in unterschiedlichen Materialien. Als ein einfaches Modell berechnen wir das magnetische Moment eines Elektrons, welches wie in Abb. 4.137 gezeigt um einen Atomkern kreist. In einem klassischen Modell beschreiben wir den Kreisstrom durch ein einzelnes

Elektron. Dieses erzeugt einen Strom

$$|I| = e \frac{\omega}{2\pi}.$$

Damit wird das magnetische Moment

$$\mu = I\pi r^2 = \frac{r^2 e \omega}{2}.$$

In der Quantenmechanik wird gezeigt, dass der Drehimpuls von Elektronen in Atomen nur Werte annehmen kann, die einem Vielfachen der Planck'schen Konstanten

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05459 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

besitzen; im klassischen Modell entspricht dies für den kleinsten nicht verschwindenden Wert des Drehimpulses

$$\hbar = m_e r^2 \omega.$$

Damit wird das magnetische Moment dieses atomaren Kreisstroms

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \text{Js}}{2,9 \cdot 10^{-31} \text{kg}} \\ &= 9,27 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2. \end{aligned}$$

Dieses elementare magnetische Moment wird als Bohr'sches Magneton bezeichnet. Es stellt die Einheit für mikroskopische magnetische Momente dar. In realen Systemen ergeben sich Korrekturen, die aber von der Größenordnung von eins sind.

4.9.2 Magnetisierung

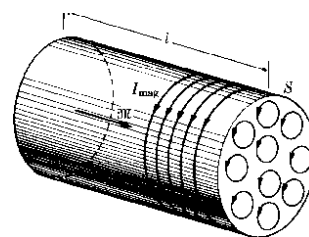


Abbildung 4.138: Induzierte Kreisströme.

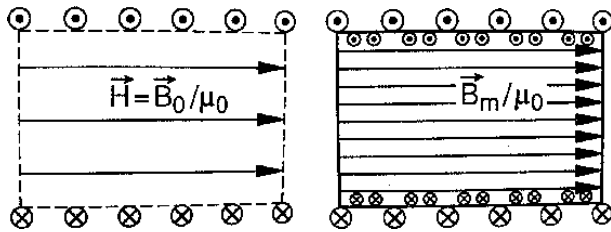


Abbildung 4.139: Links: Spule erzeugt Magnetfeld. Rechts: magnetisches Material erhöht die Flussdichte.

Analog zum elektrischen Feld wird auch bei magnetischen Feldern im Material eine magnetische Polarisation induziert, wie in Abb. 4.138 gezeigt.

Wir betrachten zunächst die Anordnung von Abb. 4.139 links: eine Solenoidspule erzeugt im Innern ein Magnetfeld H . Bringt man ein magnetisches Material in diese Spule so stellt man fest, dass die magnetische Flussdichte B bei gleichem Strom zunimmt, wie in Abb. 4.139 rechts gezeigt. Die Zunahme der Flussdichte B kann man mit einer Hall-Sonde messen, wenn der Eisenkern hineingeschoben wird. Man kann sich dies so vorstellen, dass im magnetischen Stab Ringströme fließen, welche ein zusätzliches Feld erzeugen, das parallel zum externen Feld μH liegt.

Wie in Abb. 4.138 und 4.139 gezeigt, kann man sich diese zusätzlichen Ringströme entweder als an der Oberfläche liegend (wie die Oberflächenladungen bei Dielektrika) vorstellen, oder als kleine Ringströme im gesamten Volumen des Stabes. Die Ringströme im Innern kompensieren sich gegenseitig, lediglich der Oberflächenstrom bleibt unkompensiert. Im Gegensatz zu einer normalen Stromdichte ist dieser magnetische Oberflächenstrom jedoch verlustfrei, d.h. er führt nicht zu einer Erwärmung und bleibt zeitlich unverändert.

Die gesamte magnetische Flussdichte im Material ist

$$B_m = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 H_0 = B_0 + \mu_0 J,$$

wobei sich H_0 und B_0 auf die Situation ohne Material, d.h. auf die leere Spule beziehen. μ_r ist die relative Permeabilität (=Durchlässigkeit) des Mediums.

In der letzten Gleichung stellt der Term $\mu_0 J$ den Beitrag des Materials zum gesamten Feld dar. J wird als

magnetische Polarisation oder Magnetisierung bezeichnet, und ist durch die Stärke, Dichte und Ausrichtung der mikroskopischen Dipole gegeben. Sie ist häufig proportional zum äußeren Feld,

$$\vec{J} = (\mu_r - 1) \vec{H}_0 = \chi_m \vec{H}_0.$$

Die Proportionalitätskonstante χ_m wird als magnetische Suszeptibilität bezeichnet. Sie kann wahlweise anstelle der Permeabilität μ_r verwendet werden.

Permeabilität und magnetische Suszeptibilität können gemessen werden, indem man die Änderung der Induktivität einer Spule beim Einführen des entsprechenden Materials misst - in enger Analogie zum Dielektrikum im Plattenkondensator.

4.9.3 Klassifikation magnetischen Verhaltens

Man unterscheidet drei Klassen von magnetischen Materialien, welche sich durch die Werte von χ_m unterscheiden:

- in diamagnetischen Materialien ist die magnetische Polarisation klein und entgegen dem äußeren Feld ausgerichtet, $\chi_m < 0$.
- in paramagnetischen Materialien ist die magnetische Polarisation klein und parallel zum äußeren Feld ausgerichtet, $\chi_m > 0$.
- in ferromagnetischen Materialien ist die magnetische Polarisation groß und parallel zum äußeren Feld ausgerichtet, $\chi_m \gg 0$. Häufig ist sie aber nicht mehr proportional zum äußeren Feld.

Ist die Suszeptibilität negativ, so ist die induzierte Magnetisierung dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet. Die Energie des so induzierten magnetischen Dipols ist damit positiv und proportional zur Stärke des Magnetfeldes. Auf ein diamagnetisches Material wirkt deshalb eine Kraft in Richtung des schwächeren Feldes.

Diesen Fall erhält man z.B. wenn man eine Glas- kugel in ein inhomogenes magnetisches Feld bringt, wie in Abb. 4.140 gezeigt. Dabei spielt es keine Rolle welches der Nord- und welches der Südpol ist, die

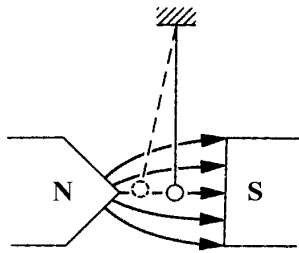


Abbildung 4.140: Kraft in einem inhomogenen Magnetfeld.

Glaskugel wird immer in Richtung des schwächeren Feldes bewegt. Im Gegensatz dazu ist die Magnetisierung in einem paramagnetischen Material parallel zum äußeren Feld orientiert. Es kann seine Energie somit erniedrigen indem es sich in Richtung des stärkeren Feldes bewegt. Diesen Fall kann man mit einer Aluminiumkugel nachvollziehen.

Die Unterscheidung zwischen Dia- und Paramagnetismus kann auch mit Hilfe von Stäbchen vorgenommen werden, welche sich im Magnetfeld parallel respektive senkrecht zu den Feldlinien ausrichten.

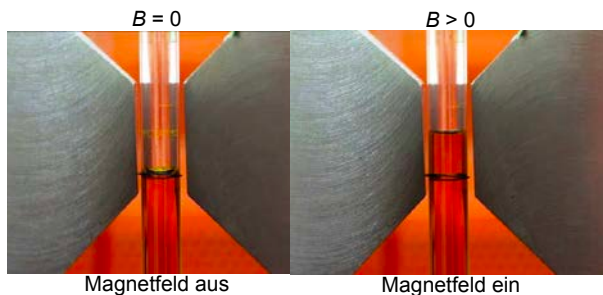


Abbildung 4.141: Eine rote paramagnetische Flüssigkeit wird in ein Magnetfeld hinein gezogen.

Magnetische Eigenschaften findet man nicht nur in Festkörpern; auch Flüssigkeiten sind paramagnetisch wenn sie entsprechende Ionen enthalten. Abb. 4.141 zeigt als Beispiel eine Lösung von FeCl_3 , welche paramagnetische Eisenionen enthält. Auch in diesem Fall kann das Material Energie gewinnen indem es sich in das Gebiet mit höherer Energie bewegt, also im Rohr hochsteigt.

Abb. 4.142 fasst die wichtigsten magnetischen Stoffeigenschaften zusammen.

Stoffmagnetismus	Diamagnetismus	Paramagnetismus	Ferronagnetismus	Antiferromagnetismus	Ferromagnetismus
Ursachen	abgeschlossene Elektronenschalen	unausgefüllte innere Elektronenschalen	unausgefüllte innere Elektronenschalen	unausgefüllte innere Elektronenschalen; sehr kleine Atomabstände; NaCl-Struktur	unausgefüllte innere Elektronenschalen; Spinellstruktur (MgO, Al ₂ O ₃)
Wirkungen (magnetische Momente)	jeder Stoff: Kompensation der Spinnmomente; nur bei äußeren Feld vorhanden	regellose Verteilung	parallele Spinausrichtung in Weisschen-Böckchen	zwei ferromagnetische Untergitter gleicher Spinnmomente	zwei ferromagnetische Untergitter mit ungleichen Spinnmomenten
Temperaturabhängigkeit des Kehrwerts der magnetischen Suszeptibilität	keine	$\frac{1}{\chi_m} \propto T$ Curiesches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T}$	$\frac{1}{\chi_m} \propto T - T_c$ Curie-Weissches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$	$\frac{1}{\chi_m} \propto T - T_N$ Curie-Weissches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_N}$ (richtungsabhängig)	$\frac{1}{\chi_m} \propto T - T_c$ Curie-Weissches Gesetz: $\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$ (im allgemeinen komplizierter Verlauf)
magnetische Suszeptibilität	$-1 < \chi_m < 0$	$10^{-4} < \chi_m < 10^{-3}$	$10^1 < \chi_m < 10^5$	—	—
Werkstoffe	Ag, Au, Bi, Cu, H ₂ , N ₂	Sn, H ₂ , W, Al, O ₂	Co, Fe, Cd, Ni	FeO, NiO, CoO, CrF ₂ , FeF ₂ , CoF ₂	MnO, Fe ₂ O ₃ , (Mn, Fe, Ni, Co) Ferite

Abbildung 4.142: Übersicht über magnetische Materialeigenschaften.

4.9.4 Mikroskopisches Modell

Das magnetische Verhalten unterschiedlicher Materialien kann auf mikroskopische Eigenschaften zurückgeführt werden. Die wichtigsten Beiträge stammen von den magnetischen Momenten der Elektronen, wobei unterschieden werden kann zwischen deren Bahnmoment \vec{m}_{Bahn} und Spin-Moment \vec{m}_{Spin} , welcher der Eigenrotation der Elektronen entspricht.

Der Diamagnetismus existiert in allen Körpern; er kann jedoch durch andere Effekte überdeckt werden. In diamagnetischen Materialien sind die Elektronen jeweils in Paaren vorhanden, deren magnetische Momente entgegengesetzt ausgerichtet sind. Dadurch tragen diese nicht zum Magnetismus bei. Hingegen erzeugt das äußere Magnetfeld eine Präzession der Elektronenhülle. Der daraus resultierende Kreisstrom erzeugt eine magnetische Polarisation in entgegengesetzter Richtung zum externen Feld, so dass die Flussdichte reduziert wird.

Generell ist der Diamagnetismus umso stärker je größer die Elektronendichte ist und je weiter die Elektronen vom Atomkern entfernt sind. Abb. 4.143 zeigt die Suszeptibilitäten für eine Auswahl von Materialien - links für diamagnetische Materialien, rechts für paramagnetische.

In paramagnetischen Materialien existieren magnetische Spin-Momente, welche ohne Magnetfeld zufällig orientiert sind und sich deshalb gegenseitig kompensieren. Liegt ein äußeres Magnetfeld an, so werden die magnetischen Momente teilweise ausgerich-

Cu	$-9.6 \cdot 10^{-6}$		
Ag	$-25.2 \cdot 10^{-6}$		
Sb	$-70.9 \cdot 10^{-6}$	Al	$+20.85 \cdot 10^{-6}$
Bi	$-156.0 \cdot 10^{-6}$	Pt	$+257.4 \cdot 10^{-6}$
NaCl	$-13.9 \cdot 10^{-6}$	Mn	$+883.0 \cdot 10^{-6}$
SiO ₂	$-29.6 \cdot 10^{-6}$	V	$+340.0 \cdot 10^{-6}$
H ₂ O	$-7 \cdot 10^{-6}$	O ₂ (g)	$+1.9 \cdot 10^{-6}$
N ₂ (g)	$-6.75 \cdot 10^{-9}$	O ₂ (fl)	$+3.6 \cdot 10^{-3}$

Abbildung 4.143: Suszeptibilität in diamagnetischen (links) und paramagnetischen Materialien (rechts).

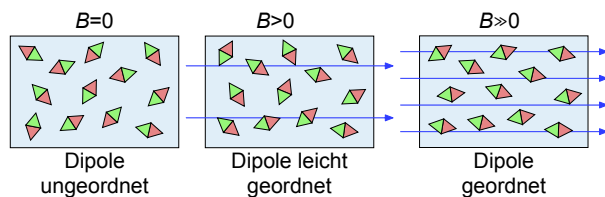


Abbildung 4.144: Mikroskopisches Modell des Paramagnetismus.

tet und erzeugen eine Polarisation parallel zum äußeren Feld, wie in Abb. 4.144 skizziert. Die Stärke dieser Polarisation ist durch das Gleichgewicht zwischen dem Energiegewinn durch parallele Orientierung und der thermischen Bewegung gegeben.

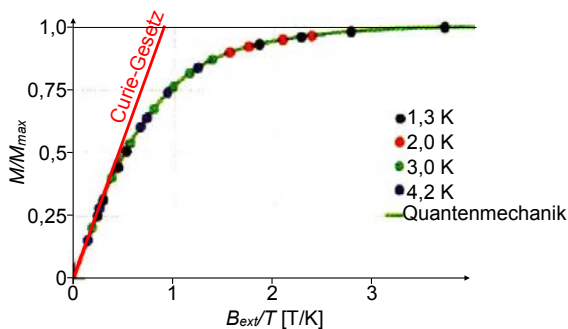


Abbildung 4.145: Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung.

Die Ausrichtung der magnetischen Dipole im Magnetfeld ist teilweise statistischer Natur, wobei ein starkes Magnetfeld eine stärkere Ausrichtung bevorzugt, während hohe Temperaturen zu einer rein zufälligen und damit gleich verteilten Orientierung führen. Insgesamt wird die Suszeptibilität in einem

gewissen Bereich durch das Curie-Gesetz⁹

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

beschrieben. Die Curie-Konstante C ist eine materialabhängige Konstante, welche die Stärke der internen magnetischen Momente enthält. In Abb. 4.145 ist die Magnetisierung

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

dargestellt. Die rote Gerade zeigt die Voraussage des Curie-Modells.

Bei tiefen Temperaturen und hohen Feldern findet man Abweichungen von diesem linearen Verhalten, wie in Abb. 4.145 gezeigt. Sie können dadurch erklärt werden, dass dann alle Dipole vollständig ausgerichtet sind. Eine quantitative Behandlung ist jedoch nur mit Hilfe der Quantenmechanik möglich.

4.9.5 Ferromagnetismus

In Materialien mit nur teilweise gefüllten Elektronenschalen kann die starke Wechselwirkung zwischen den Elektronen zu einem qualitativ anderen Verhalten führen. In diesen ferromagnetischen Substanzen wie Eisen, Kobalt oder Nickel sind die Konstanten χ_m und $\mu_r \gg 1$ (etwa 5000 bei Eisen). Außerdem ist der Zusammenhang $B(H)$ nicht mehr linear und damit auch $\mu_r(H)$ eine Funktion des äußeren Feldes. Die mikroskopische Ursache davon ist, dass die Wechselwirkung zwischen den atomaren Dipolen wesentlich stärker ist als die Wechselwirkung mit dem äußeren Magnetfeld. Je nach Vorzeichen der Wechselwirkung ist es dann für die Dipole energetisch günstiger, sich parallel zu ihren Nachbarn zu orientieren (bei ferromagnetischer Wechselwirkung), oder anti-parallel (bei antiferromagnetischer Wechselwirkung).

Die starke Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten führt zu einer bevorzugten parallelen Ausrichtung ihrer magnetischen Momente so dass auch ohne externes Magnetfeld eine endliche Magnetisierung existieren kann. Die Richtung dieser Magnetisierung hängt von der Vorgeschichte des

⁹ 1896 von Pierre Curie (1859 - 1906) vorgeschlagen

Materials ab. Dieses Verhalten wird als Ferromagnetismus (oder Antiferromagnetismus) bezeichnet. Man nutzt den Effekt z.B. in Permanentmagneten. Abb. 4.146 zeigt den Effekt anhand eines einfachen Modells.

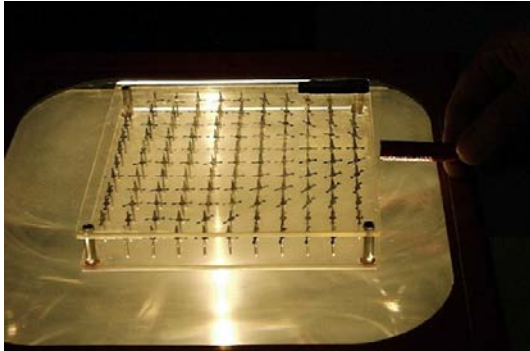


Abbildung 4.146: Modell für ferromagnetische Materialien.

Gegen die parallele Ausrichtung wirkt wiederum die thermische Bewegung. Es gibt deshalb eine Temperatur T_C , oberhalb der sich solche Materialien wie ein Paramagnet verhalten, während sie sich unterhalb ferromagnetisch verhalten. Die genaue Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität ist jedoch etwas anders als bei reinen Paramagneten:

$$\chi_m(\text{Ferromagnet}) = \frac{C}{T - T_C} \quad \text{für } T > T_C.$$

Dies wird als Curie-Weiss-Gesetz¹⁰ bezeichnet. Hier nimmt die Suszeptibilität mit abnehmender Temperatur zu und divergiert bei der kritischen Temperatur T_C , der Curie-Temperatur. Bei dieser Temperatur genügt somit (idealisiert) schon ein beliebig kleines Feld, um eine makroskopische magnetische Polarisation zu erzeugen, es entsteht eine spontane Polarisation. Diese kritischen Temperaturen sind stark materialabhängig. Sie können weniger als 1 K oder > 1000 K betragen.

Indem man ein ferromagnetisches Material über die Curie-Temperatur erwärmt, macht man es zu einem Paramagneten; kühlt man es wieder ab so wird es wieder zu einem Ferromagneten. Abb. 4.147 zeigt ein Experiment, welches die Erwärmung des Nickelrades ausnutzt, um das Material paramagnetisch zu

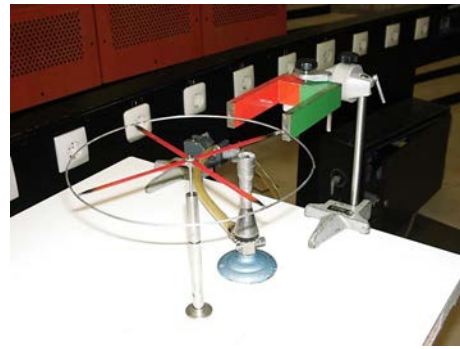


Abbildung 4.147: Änderung der magnetischen Eigenschaften bei der Curie-Temperatur.

machen (also im Vergleich zum ferromagnetischen Material nichtmagnetisch. Es wird deshalb weniger stark vom Magneten angezogen als der ferromagnetische Teil des Rings, es entsteht netto ein Drehmoment, welches auf den Ring wirkt und er beginnt sich zu drehen. Dadurch wird ein anderer Teil erwärmt und das Drehmoment dadurch aufrecht erhalten.

4.9.6 Magnetische Domänen

Die spontane Polarisierung des ferromagnetischen Materials entsteht zunächst nur lokal, d.h. die Momente orientieren sich auf einer Skala von Mikrometern parallel zueinander. Es entstehen Bereiche, in denen die Momente alle in die gleiche Richtung orientiert sind.

Diese kleinen magnetischen Domänen werden als Weiss'sche Bezirke¹¹ bezeichnet und sind die größten magnetisch homogenen Bereiche. Abb. 4.148 zeigt ein Beispiel. Ohne äußeres Magnetfeld treten auf einer größeren Skala alle Orientierungen gleichwertig auf. Weiss'sche Bezirke kann man u.a. im Polarisationsmikroskop beobachten. Je nach Art des Kristallgitters gibt es verschiedene mögliche Vorzugsorientierungen für die Domänen. Im Beispiel von Abb. 4.148 gibt es vier äquivalente Orientierungen, in einem ebenen hexagonalen Modell sechs.

Wird ein äußeres Feld angelegt, so wachsen die Bezirke, in denen die Magnetisierung parallel zum

¹⁰Pierre Curie und Pierre-Ernest Weiss (1865 - 1940)

¹¹nach Pierre Weiss (1865-1940)

4 unterschiedliche Magnetisierungsrichtungen

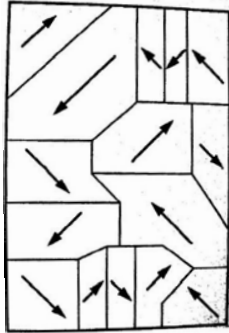


Abbildung 4.148: Weiß'sche Bezirke in einem ferromagnetischen Material. Links: schematische Darstellung der Orientierung. Rechts: Im Polarisationsmikroskop.

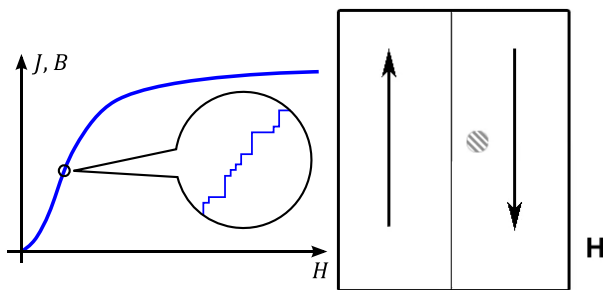


Abbildung 4.149: Barkhausen Effekt: Nichtstetige Verschiebung von Domänenwänden.

äußeren Feld liegt auf Kosten der anderen Bezirke. Bei noch stärkeren Feldern können auch ganze Domänen umklappen. Diesen Effekt kann man auch akustisch hörbar machen. In diesem Experiment werden drei dünne Drähte aus Nickel, geglühtem Eisen und Stahldraht verglichen. Wie in Abb. 4.149 gezeigt, verschieben sich die Domänenwände nicht kontinuierlich, sondern sprunghaft. Bei jedem Sprung nimmt die Flussdichte plötzlich zu. Dadurch wird in der Spule ein Spannungspuls induziert, der als Knacken hörbar wird. Dieser Effekt wird als Barkhausen-Effekt bezeichnet.

Wenn das Feld genügend groß wird, stellen sich alle atomaren Dipole parallel zum äußeren Feld, das Material ist vollständig polarisiert. Wird das äußere

Feld entfernt, dann bleibt ein Teil dieser Magnetisierung erhalten. Diese Materialien können deshalb auch ohne äußeres Magnetfeld eine Magnetisierung zeigen.

Allgemein ist die Beziehung zwischen B und H in ferromagnetischen Materialien nicht mehr linear. Man kann eine Permeabilität nur noch differentiell definieren:

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}.$$

Material	μ_r
Ferrite	1000
Fe (rein)	10000
Co	1400
Ni-Fe (μ -Metall)	<100000

Tabelle 4.2: Permeabilität μ_r von ferromagnetischen Materialien.

Diese Permeabilitäten / Suszeptibilitäten können sehr groß sein, im Bereich von 1000 bis 100'000. Tabelle 4.2 zeigt einige Beispiele. Das Material mit der grössten Suszeptibilität, μ -Metall, wird insbesondere verwendet, um magnetische Felder abzuschirmen.

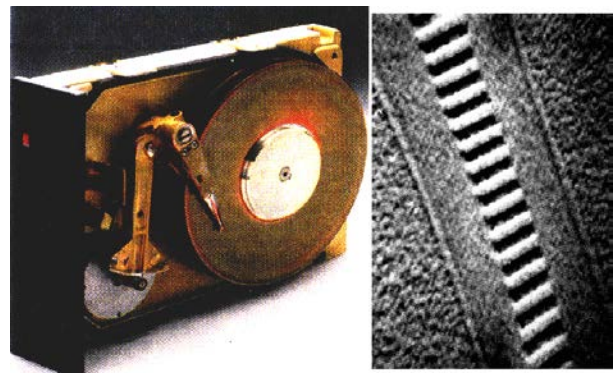


Abbildung 4.150: Magnetische Datenspeicherung; links: Festplatte; rechts: Spur aus magnetischen Zellen (bits).

Es existiert eine ganze Reihe von weiteren Anwendungen für ferromagnetische Materialien. Eine davon ist die Verwendung für die Speicherung von Daten. In einer Festplatte sind, wie in Abbildung

4.150 gezeigt, einzelne Bezirke mit einer bestimmten Richtung polarisiert.

4.9.7 Magnetische Hysterese

In ferromagnetischen Materialien ist die Flussdichte B nicht mehr proportional zur Stärke des äußeren Feldes H , sondern sie hängt sowohl von H ab wie auch von der Vorgeschichte.

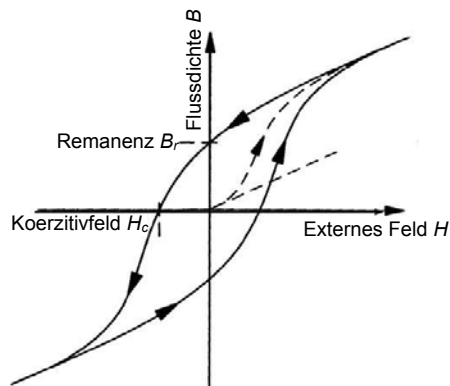


Abbildung 4.151: Magnetische Hysterese.

Trägt man für ein ferromagnetisches Material die magnetische Flussdichte gegen das äußere Magnetfeld auf, so erhält man eine Kurve, die von der zeitlichen Änderung der Felder abhängt. Abb. 4.151 zeigt das generelle Verhalten. Beginnt man mit einem nicht magnetisierten Material, so findet man ein näherungsweise lineares Verhalten. Bei größeren Feldern treten Sättigungseffekte auf. Diese können auf die vollständige Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke zurückgeführt werden. Wird das Feld wieder verringert so bleibt die Orientierung zunächst erhalten. Auch ohne äußeres Feld findet man eine Magnetisierung, die sogenannte Remanenz B_r . Dies ist die charakteristische Eigenschaft eines Permanentmagneten. Erst wenn ein Gegenfeld (das Koerzitivfeld H_c) angelegt wird kann diese Magnetisierung auf Null reduziert werden. Für stärker negatives Feld tritt eine negative Magnetisierung auf, welche schließlich ebenfalls sättigt.

Im Experiment wird das äußere Magnetfeld H und die magnetische Flussdichte B gemessen, welches in einem Eisenkern einer Solenoidspule erzeugt wird. Das äußere Magnetfeld wird periodisch variiert,

während die Flussdichte über eine zweite Spule gemessen wird.

	B_r / T	H_c / A/m
C-Stahl	1	3600
Cr-Stahl	0.95	5000
AlNiCo Stahl	1.25	44000
Co-Stahl	0.95	19000
seltene Erden	0.9	700000

Abbildung 4.152: Remanenz und Koerzitivfeld einiger Materialien.

Gute Permanentmagnete haben hohe Koerzitivfeldstärken und hohe Remanenzen (\rightarrow Abb. 4.152). Die Remanenzfelder liegen in der Größenordnung von 1 T, während die Koerzitivfelder von einigen 1000 bis zu einigen 100000 A/m gehen können. Die höchsten Werte erzielt man mit seltenen Erden, da diese eine große Zahl ungepaarter Elektronen enthalten.

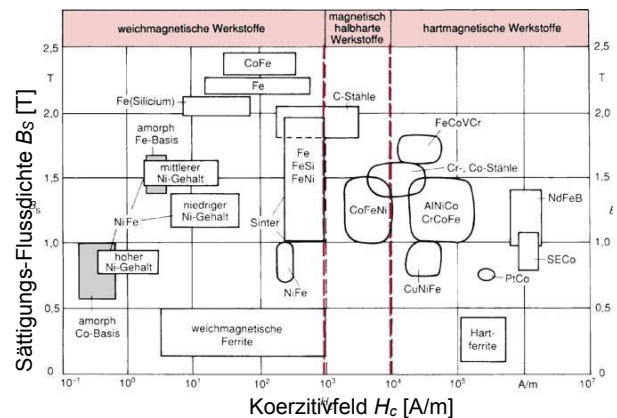


Abbildung 4.153: Sättigungsfeld und Koerzitivfeld unterschiedlicher magnetischer Werkstoffe.

Während die Sättigungsfeldstärken alle im Bereich von 1 T liegen, können die Koerzitivfelder über viele Größenordnungen variieren. Man beachte die logarithmische Skala in Abb. 4.153.

Die Fläche der Hysterese im B - H Diagramm hat die Einheit einer Energiedichte; sie entspricht der Energie, welche in einem Zyklus des äußeren H -Feldes im Material deponiert wird. Bei Transformatoren (siehe Kapitel 3.6) finden viele solche Zyklen statt. Man versucht deshalb die Hysteresen für solche Anwendungen möglichst gering zu machen. Materialien, welche diese Bedingung erfüllen, werden

als magnetisch weich bezeichnet; sie zeichnen sich dadurch aus, dass die Magnetisierung nach Entfernung des äußeren Feldes wieder verschwindet. Für solche Anwendungen sind z.B. Ferrite gut geeignet, da sie schon bei geringen Koerzitivfeldern umpolarisiert werden.

4.9.8 Weitere magnetische Ordnungseffekte

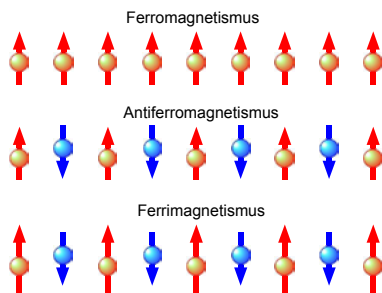


Abbildung 4.154: Unterschiedliche Arten magnetischer Ordnung.

Neben ferromagnetischem Verhalten gibt es auch antiferromagnetisches Verhalten. Abb. 4.154 vergleicht die verschiedenen Arten magnetischer Ordnung. Bei antiferromagnetischer Wechselwirkung ist die antiparallele Orientierung energetisch günstiger. Die kritische Temperatur wird hier als Neel-Temperatur T_N bezeichnet. Oberhalb der Neel-Temperatur gilt ein abgewandeltes Curie-Weiss Gesetz

$$\chi_m = \frac{C}{T + T_N}.$$

Unterhalb T_N ist χ_m stark materialabhängig und zeigt eine komplizierte Temperaturabhängigkeit.

Eine weitere Klasse von magnetischen Materialien sind die Ferrimagnete oder Ferrite. Hier sind magnetische Momente unterschiedlicher Größe antiparallel ausgerichtet und kompensieren sich teilweise.

Die Ausrichtung der magnetischen Momente kann auch Auswirkungen auf die Form des Materials haben. Bei piezoelektrischen Materialien konnte die Form mit Hilfe eines angelegten elektrischen Feldes verändert werden. Ähnlich kann mit Hilfe von magnetischen Feldern die Form von magnetischen Materialien geändert werden. Dieser Effekt wird als

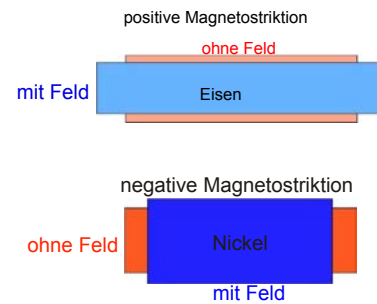


Abbildung 4.155: Magnetostraktion.

Magnetostraktion bezeichnet. Bei positiver Magnetostraktion (z.B. Fe; Abb. 4.155 oben) verlängert sich das Material beim Anlegen eines Feldes; bei negativer Magnetostraktion (z.B. Nickel) verkürzt und verbreitert sich das Material.

4.9.9 Ferrofluide



Abbildung 4.156: Oberfläche eines Ferrofluids im Feld eines Stabmagneten.

Auch Flüssigkeiten können ferromagnetische Eigenschaften haben - man bezeichnet sie dann als Ferrofluide. Sie bestehen aus wenigen Nanometer großen magnetischen Partikeln, die in einer Trägerflüssigkeit kolloidal suspendiert sind. Die Partikel werden in der Regel mit einer polymeren Oberflächenbeschichtung stabilisiert. Echte Ferrofluide sind stabile Dispersionen, was bedeutet, dass sich die festen Teilchen nicht mit der Zeit absetzen und selbst in extrem starken Magnetfeldern nicht aneinander anlagern oder sich von der Flüssigkeit als andere Phase abscheiden. Ferrofluide sind superparamagnetisch und besitzen eine sehr geringe Hysterese. Abb.

4.156 zeigt die Oberfläche eines Ferrofluids im Feld eines Stabmagneten.

4.9.10 Magnetische Eigenschaften von Supraleitern

Neben der verlustlosen Leitung von Elektrizität haben Supraleiter auch außergewöhnliche magnetische Eigenschaften.

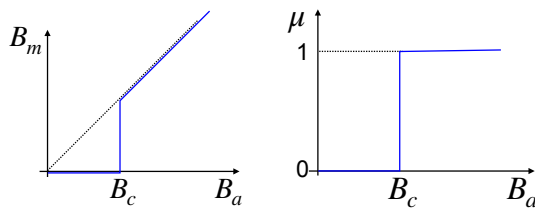


Abbildung 4.157: Temperaturabhängigkeit der Flussdichte im Innern eines Supraleiters (links) und der magnetischen Permeabilität (rechts).

Insbesondere sind sie perfekte Diamagneten. Dies bedeutet, dass magnetische Felder nicht ins innere eines Supraleiters eindringen können. Wie in Abb. 4.157 gezeigt gilt dies allerdings nur bis ein kritisches Feld erreicht ist; oberhalb dieser Feldstärke dringt das Magnetfeld wieder ein. Dadurch bricht auch die Supraleitung zusammen.

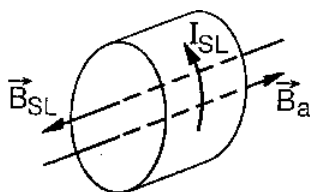


Abbildung 4.158: Kreisströme an der Oberfläche eines Supraleiters.

Das Ausstoßen des Magnetfeldes geschieht dadurch, dass an der Oberfläche des Supraleiters Kreisströme entstehen, die ein Magnetfeld erzeugen, welches das äußere Feld gerade kompensiert. Abb. 4.157 zeigt schematisch den Oberflächenstrom.

Man kann dies durch die Permeabilität μ_r ausdrücken: sie beträgt im supraleitenden Bereich 0,

wie in Abb. 4.157 rechts gezeigt. Wenn ein kritisches Feld erreicht wird, dringt das Feld wieder in das Material ein, die Permeabilität wird 1. Diese Eigenschaft, das Magnetfeld auszustoßen, wird als Meißner-Ochsenfeld Effekt¹² bezeichnet.

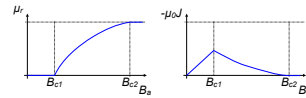


Abbildung 4.159: Permeabilität und Magnetisierung in einem Typ-II Supraleiter.

In sogenannten Typ II Supraleitern wird dieses Verhalten etwas modifiziert: hier dringt das Feld nicht mehr schlagartig ein, sondern die Permeabilität steigt über einen Bereich von Feldstärken an bis sie den Wert 1 erreicht. Abb. 4.159 zeigt die Permeabilität als Funktion der Temperatur.

4.9.11 Anwendungen

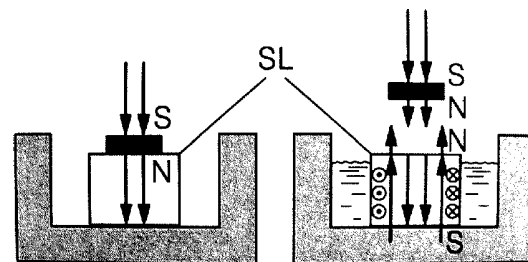


Abbildung 4.160: Meissner-Effekt.

Dieses Verhalten kann mit einem Experiment demonstriert werden, bei dem ein Magnet auf einen Supraleiter gelegt wird. Handelt es sich um einen Hoch- T_c Supraleiter, so genügt flüssiger Stickstoff, um ihn unter die kritische Temperatur abzukühlen. Wie in Abb. 4.160 gezeigt, wird dadurch das Feld aus dem Supraleiter ausgestoßen und der Magnet schwebt über dem Supraleiter. Man kann dies auch so verstehen, dass der induzierte Oberflächenstrom ein Feld erzeugt, welches dem äußeren entgegengesetzt ist. Es stehen sich somit zwei gleiche Pole gegenüber, was zu einer Abstoßung führt.

¹²nach Fritz Walther Meißner (1882-1974) und Robert Ochsenfeld (1901-1993)

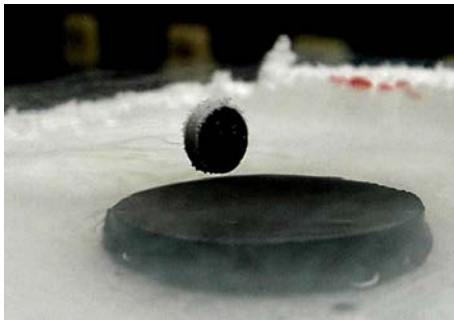


Abbildung 4.161: Ein Kobalt-Magnet schwebt über einem Supraleiter.

Abb. 4.161 zeigt eine Fotografie eines entsprechenden Vorlesungsexperiments.



Abbildung 4.162: Zug schwebt mit Hilfe von supra-leitenden Magneten.

Dieser Effekt wird z.B. bei einem japanischen Konkurrenzprodukt zum Transrapid verwendet, um ihn über der Schiene schweben zu lassen. Abb. 4.162 zeigt einen Prototypen.

4.10 Zeitabhängige Felder und Ströme

Bisher hatten wir diskutiert, wie elektrische Ströme magnetische Felder erzeugen. Jetzt wird der umgekehrte Prozess diskutiert: wie ein zeitlich veränderliches Magnetfeld eine Spannung und damit einen Strom induziert.

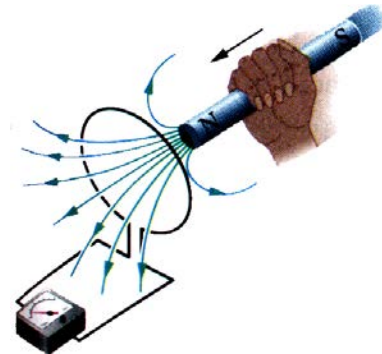


Abbildung 4.163: Flussänderung induziert Spannung.



Abbildung 4.164: Ein Magnet wird in eine Leiterschleife geschoben und induziert dadurch eine Spannung.

4.10.1 Induktion: Phänomenologie

Das Phänomen der Induktion kann anhand eines einfachen Experimentes gezeigt werden, wie in Abb. 4.164 gezeigt. Hier wird ein Stabmagnet in eine Leiterschleife geschoben, während die Spannung über der Leiterschleife gemessen wird. Man stellt fest, dass beim Hineinschieben eine positive Spannung gemessen wird, welche wieder auf Null fällt, wenn der Magnet nicht mehr verschoben wird. Beim Herausziehen findet man wieder eine Spannung, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Dreht man den Stabmagneten, schiebt also den entgegengesetzten Pol in die Leiterschleife, so misst man einen negativen Spannungspuls, beim Herausziehen einen positiven.

Wird die Bewegung schneller durchgeführt, so wird der Spannungstoß kürzer, aber intensiver; die Flä-

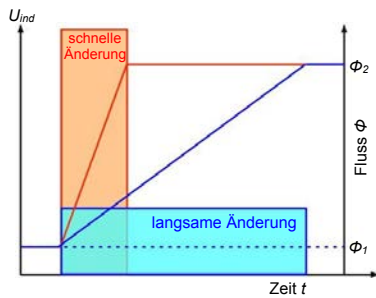


Abbildung 4.165: Fluss als Funktion der Zeit und induzierte Spannung.

che $\int U(t) dt$ bleibt konstant. Abb. 4.165 zeigt zwei Beispiele in roter respektive blauer Farbe. In beiden Fällen steigt der magnetische Fluss durch die Spule von Φ_1 auf Φ_2 , aber über unterschiedliche Zeiten. Im roten Fall entsteht ein kurzer aber starker Spannungspuls, im blauen Fall ein schwacher aber langer Puls.

4.10.2 Magnetischer Fluss

Aus einer Reihe von Experimenten dieser Art findet man, dass dieses Integral gegeben ist durch die Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule. Der magnetische Fluss ϕ durch eine Fläche A ist definiert als das Integral

$$\phi = \int \vec{B} \cdot \vec{A} = \int B dA \cos \theta,$$

d.h. nur die Komponente der Flussdichte senkrecht zur Fläche trägt bei. Bildlich kann man sich den Fluss als die Summe aller Feldlinien vorstellen, welche die Fläche A durchstoßen. Die Einheit des magnetischen Flusses,

$$[\phi] = \text{Vs} = \text{Wb} = \text{Weber},$$

bezieht sich auf Wilhelm Weber (1804-1891). Die magnetische Flussdichte B ist dementsprechend definiert als Fluss pro Fläche,

$$B = \frac{d\phi}{dA} \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T} = \text{Tesla}.$$

Die Einheit Tesla erinnert an Nikola Tesla (1856-1943).

Die magnetische Flussdichte \vec{B} und das Magnetfeld \vec{H} sind im Vakuum und in vielen Materialien direkt proportional zueinander:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}.$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Die Proportionalitätskonstante μ_0 wird als magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des Vakuums bezeichnet. In einem Material wird die Permeabilität des Vakuums mit der relativen Permeabilität μ_r multipliziert.

Steigt der Fluss durch die Leiterschleife linear mit der Zeit, so misst man eine Spannung, die während dieser Zeit konstant ist, wie in Abb. 4.165 gezeigt. Je schneller das Magnetfeld steigt, desto höher ist die Spannung. Das Integral $\int U(t) dt$, in diesem Fall $U \Delta t$, ist jedoch unabhängig von der Rate und nur durch die Flussdifferenz $\Delta\phi$ zwischen Anfangs- und Endwert gegeben,

$$\int U(t) dt = \phi_1 - \phi_2 = -\Delta\phi.$$

4.10.3 Induktionsgesetz

Eine nützlichere Schreibweise für die Beziehung zwischen Flussänderung und induzierter Spannung ist die differenzielle Form

$$U_{ind}(t) = -N \frac{d\phi}{dt},$$

wobei N die Anzahl der Windungen darstellt. Die Änderung $d\phi/dt$, resp. $\phi_2 - \phi_1$ des magnetischen Flusses kann auf unterschiedliche Weise erreicht werden. Wir beschränken uns hier auf den einfachen Fall, dass das Magnetfeld homogen ist. Dann ist

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BA \cos \theta).$$

Hier stellt A die Fläche der Leiterschleife und θ den Winkel zwischen Feldrichtung und Flächennormalar dar. Somit existieren drei Möglichkeiten, um eine Spannung zu induzieren:

Man kann

- die Flussdichte B ändern. Dies wird typischerweise mit einem Elektromagneten erreicht. Das Prinzip wird vor allem im Transformator verwendet, der in Kapitel 4.10.12 im Detail behandelt wird. Eine etwas andere Möglichkeit, die Flussdichte zu ändern, basiert darauf, dass man einen Magneten mehr oder weniger weit in die Leiterschleife hinein schiebt. Dies wurde im obigen Experiment gezeigt und wird bei einigen Typen von Mikrofonen verwendet.
- die Fläche A der Schleife ändern.

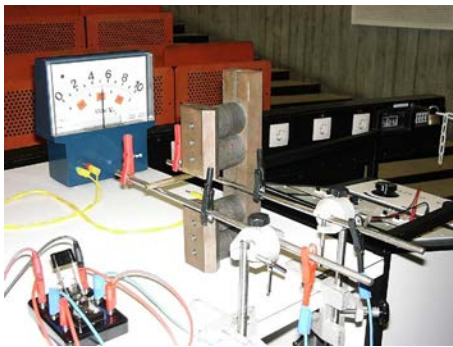


Abbildung 4.166: Änderung der Schleifenfläche durch rollenden Stab.

Dies wird z.B. beim in Abb. 4.166 gezeigten Experiment gemacht, indem man eine Leiterschleife verwendet, welche aus zwei festen und einem rollenden Kupferstab gebildet wird. Ein Permanentmagnet sorgt für den Fluss durch diese Spule.

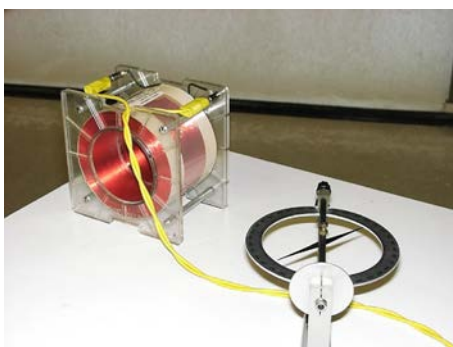


Abbildung 4.167: Orientierung der Spule.

- Als dritte Möglichkeit kann man die Orientierung der Schleife bezüglich dem Magnetfeld ändern. Das Experiment von Abb. 4.167 ver-

wendet dafür eine Spule, die eine große Anzahl Windungen aufweist. Damit ist es möglich, sogar im Erdmagnetfeld eine leicht messbare Induktionsspannung zu erzeugen. Den zweiten und dritten Fall kann man zusammenfassen als eine Änderung von $d\vec{A}/dt$.

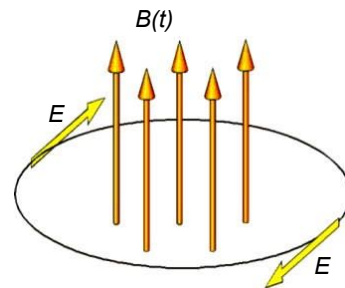


Abbildung 4.168: Magnetische Flussdichte und induziertes Feld.

Betrachtet man die induzierte Spannung über einem geschlossenen Ring wie in Abb. 4.168, so entspricht sie einem Integral des Feldes über die Schleife,

$$U(t) = \oint_{\text{Schleife}} E(t, r) dr \propto \frac{\partial}{\partial t} B(t).$$

Dies ist nicht mit der üblichen Definition eines Potentials vereinbar, welches auf dem Ring einen eindeutigen Wert besitzen sollte und somit für ein Schleifenintegral verschwinden sollte. Es wird deshalb als Wirbelfeld bezeichnet. Wie dieses zu interpretieren ist, hängt von den physikalischen Randbedingungen ab. So kann der Ring nicht ganz geschlossen sein und die Spannungsdifferenz über einem Widerstand abfallen.

4.10.4 Wechselstromgenerator

Wir betrachten den dritten Fall etwas genauer; er stellt die Grundlage für die Erzeugung von Strom in Kraftwerken dar. Abb. 4.169 zeigt das Prinzip. Wir betrachten hier eine rechteckige Schleife, welche sich um eine Achse senkrecht zum Magnetfeld dreht. Die induzierte Spannung beträgt

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} (\vec{B}_0 \cdot \vec{A}).$$

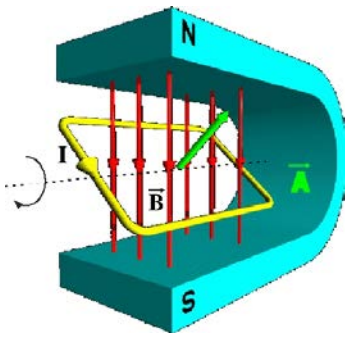


Abbildung 4.169: Drehbare Spule im Magnetfeld.

Wir gehen davon aus, dass sowohl das Magnetfeld \vec{B}_0 wie auch der Betrag A der Fläche konstant sind.

Hingegen soll die Orientierung von \vec{A} sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω ändern. Damit wird

$$U_{ind} = -N \frac{d}{dt} (B_0 A \cos \omega t) = N B_0 A \omega \sin \omega t.$$

Man erhält also eine Spannung, die sinusförmig variiert. Dieser Effekt ist die Grundlage für elektrische Generatoren. Die elektrische Leistung, die dabei gewonnen wird, muss durch mechanische Arbeit kompensiert werden, welche nötig ist, um den induzierten Dipol im statischen Magnetfeld zu drehen. Dies gilt allgemein, für alle hier vorgestellten Varianten der Induktion: die induzierten Ströme erzeugen ein Magnetfeld, welches der Ursache entgegenwirkt (Lenz'sche Regel). Entsprechend kann man alle gezeigten Anordnungen nicht nur als Generator, sondern auch umgekehrt als Motor betreiben.

4.10.5 Induzierte Ströme und Lenz'sche Regel

Das Experiment zeigt zunächst, dass in der Leiterschleife eine Spannung induziert wird. Natürlich entspricht dieser Spannung auch ein Strom. Ein Strom durch eine Leiterschleife erzeugt darin einen magnetischen Dipol. Damit stellt sich die Frage, wie dieser Dipol orientiert ist - gleich wie der Magnet, der ihn erzeugt, oder umgekehrt.

Für die Klärung dieser Frage verwenden wir den Thomson-Ring: Wie in Abb. 4.170 gezeigt, wird eine Leiterspule aus Aluminium um einen Eisenkern

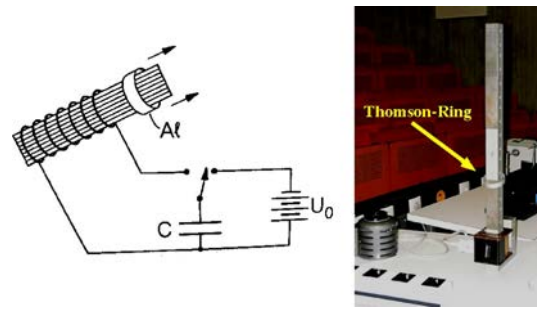


Abbildung 4.170: Versuchsaufbau zum Thomson-Ring Versuch.

gelegt, in dem mit Hilfe einer Induktionsspule ein wechselndes Magnetfeld erzeugt wird. Man beobachtet, dass die Spule schwebt. Somit wird sie vom Magneten, der den Strom induziert, abgestoßen.

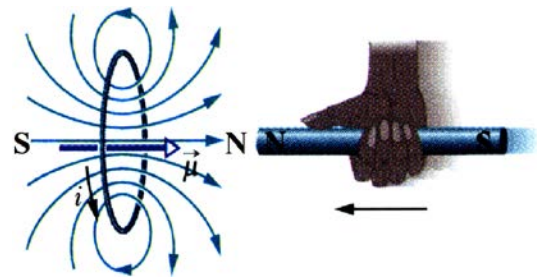


Abbildung 4.171: Die Lenz'sche Regel.

Daraus folgt, dass der induzierte Magnet dem erzeugenden Magneten entgegen-gerichtet ist. Dieses Resultat ist allgemein als "Lenz'sche Regel"¹³ bekannt: Wie in Abb. 4.171 gezeigt, wirkt die induzierte Spannung ihrer Ursache entgegen. Im Falle einer Leiterschleife erzeugt die Spannung einen Strom, welcher eine Änderung des Feldes verringert: Wird der Magnet in die Spule hineingeschoben so schwächt der induzierte Strom dieses Feld ab; wird er herausgezogen, so verstärkt der induzierte Strom das Feld, d.h. er versucht eine Abschwächung zu verringern. Der induzierte Dipol erzeugt in beiden Fällen eine Kraft, welche überwunden werden muss wenn der Magnet in die Leiterschleife hinein geschoben wird.

¹³Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 - 1865)

4.10.6 Wirbelströme

Zeitlich variable Magnetfelder, die in elektrische Leiter eindringen, erzeugen dort ebenfalls Ströme, welche die Quellen von Magnetfeldern sind. Diese Ströme werden als Wirbelströme bezeichnet. Sie können schädlich sein, wie z.B. in Transformatoren, wo sie für einen Teil der Verluste verantwortlich sind, oder nützlich, wie z.B. in Wirbelstrombremsen, wo sie als verschleißfreie Bremsen dienen.

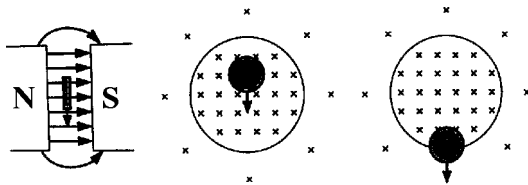


Abbildung 4.172: Wirbelströme: Eine Kupferscheibe fällt durch ein Magnetfeld und wird durch Wirbelströme gebremst.

Den Effekt kann man z.B. beobachten wenn man eine Münze durch ein Magnetfeld fallen lässt. Dabei findet man, dass sie nur langsam in das Magnetfeld eindringt (siehe Abb. 4.172). Im homogenen Magnetfeld fällt sie mit normaler Geschwindigkeit, da hier der Fluss konstant bleibt. Am unteren Ende des Magnetfeldes wird sie wieder stark verlangsamt. Der Effekt zeigt eine gewisse Analogie zum Meissner-Effekt: Auch hier verzögern die Wirbelströme das Eindringen des Magnetfeldes in das Leitermaterial. Allerdings kann dies für normal leitende Materialien nur eine Verzögerung bewirken, da die Verluste im Leiter ein Abklingen der Oberflächenströme bewirken.

Den Effekt der Wirbelstrombremse man auch anhand des Waltenhofen'schen Pendels zeigen (→ Abb. 4.173). Dabei schwingt ein Pendel mit einer Kupferplatte als Gewicht zwischen den Polschuhen eines Magneten. Je stärker das Magnetfeld ist, welches hier eingeschaltet wird, desto stärker ist die Bremswirkung. Dieser Effekt verschwindet praktisch völlig, wenn statt einer durchgehenden Kupferplatte eine Kupferplatte mit Schlitzen eingesetzt wird. Die Schlitze eliminieren einen Teil der Wirbelströme und damit die Bremswirkung. Dies wird. u.a.



Abbildung 4.173: Waltenhofen'sches Pendel.

in Transformatoren genutzt: die Eisenkerne in Transformatoren enthalten Schlitze, um Wirbelströme und damit verbundene Verluste zu verringern.

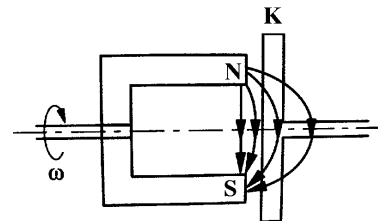


Abbildung 4.174: Wirbelstrombremse als Kupplung.

Man kann Wirbelströme auch dazu verwenden, eine verschleißfreie Kupplung zu bauen. Bei dem in Abb. 4.174 gezeigten System dreht sich der Hufeisenmagnet so, dass die Feldlinien sich in der frei rotierenden Kupferscheibe K bewegen. Dabei werden Wirbelströme induziert, welche die Kupferscheibe in eine Drehbewegung versetzen. Wirbelstrombremsen werden nach dem Prinzip des Waltenhofen'schen Pendels konstruiert.

4.10.7 Selbstinduktion

Wird ein elektrischer Leiter von einem variablen Strom durchflossen, so erzeugt er ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, welches auch im Leiter selbst eine Spannung erzeugt, die der zeitlichen Änderung entgegenwirkt. Dieser Effekt wird als Selbstinduktion bezeichnet. Die Stärke hängt von der Geometrie der Leiter ab. Der Effekt muss vor allem bei der Entwicklung von schnellen Schaltungen berücksichtigt

werden, wo er wesentlich zur Beschränkung der Geschwindigkeit beiträgt.

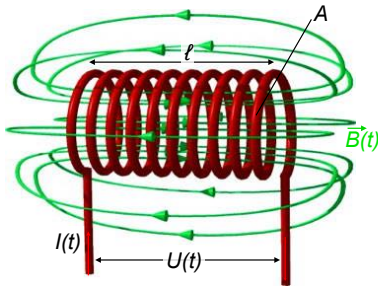


Abbildung 4.175: Der Strom $I(t)$ erzeugt in der Spule das Feld $\vec{B}(t)$.

Wir betrachten als Beispiel eine lange zylinderförmige Spule der Länge ℓ mit N Wicklungen, wie in Abb. 4.175 gezeigt. Bei einem Strom I beträgt das Magnetfeld im Innern

$$H = \frac{IN}{\ell}.$$

Ändert man den Strom durch die Spule, so induziert die damit verbundene Flussänderung eine Spannung

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -N \frac{d\phi}{dt} = -NA\mu_0\mu_r \frac{dH}{dt} \\ &= -NA\mu_0\mu_r \frac{N}{\ell} \frac{dI}{dt}. \end{aligned}$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen Stromänderung und induzierter Spannung wird als Induktivität bezeichnet,

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}. \quad [L] = \text{Henry} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \Omega\text{s}$$

Die Einheit Henry bezieht sich auf Joseph Henry (1797-1878). Im hier betrachteten Fall einer Spule ist somit

$$L_{Spule} = \mu_0\mu_r \frac{N^2 A}{\ell}.$$

Die Definition der Induktivität erfolgt analog zum Kondensator, wo die Kapazität als Verhältnis aus gespeicherter Ladung (d.h. Integral des Stroms) und Spannung definiert ist. Bei der Induktivität erzeugt nicht das Integral, sondern die zeitliche Änderung

des Stroms eine Spannung. Induktivitäten sind, neben Widerständen und Kapazitäten die dritte Form von passiven, linearen elektronischen Bauelementen. Wie bei Widerständen addieren sich Induktivitäten bei Serienschaltung, während bei Parallelschaltungen die Kehrwerte addiert werden.

Die Induktivität kann auch gemessen werden als Integral der induzierten Spannung für eine gegebene Stromänderung:

$$L = \frac{\int_{I_1}^{I_2} U_{ind} dt}{I_2 - I_1}.$$

Das Integral umfasst den Zeitbereich während dem der Strom von I_1 auf $I_2 = I_1 + \Delta I$ geändert wird.

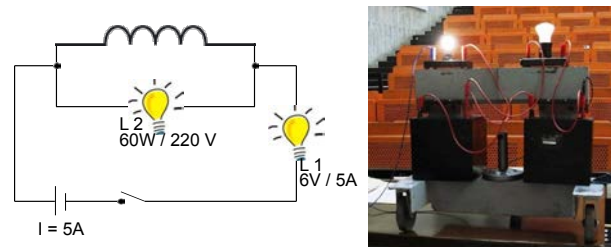


Abbildung 4.176: Einschaltverzögerung durch Induktionsspulen.

Das Einschaltverhalten einer Induktivität kann im Experiment sichtbar gemacht werden, indem man die entsprechenden Ströme über Glühlampen sichtbar macht. Abb. 4.176 zeigt einen entsprechenden Aufbau. Hier fließt nach Schließen des Schalters ein konstanter Strom von 5 A durch die Lampe L_1 . Unmittelbar nach Einschalten wächst der Strom durch die Spule, während der Strom durch die Lampe L_2 abnimmt. Beim Öffnen des Schalters löscht L_1 aus, während die Lampe L_2 noch brennt: die im Magnetfeld der Spule enthaltene Energie wird durch diese Lampe entladen.

4.10.8 Magnetische Feldenergie

Mit Hilfe der Selbstinduktion kann für eine lange dünne Zylinderspule der Energieinhalt des magnetischen Feldes hergeleitet werden (\rightarrow Abb. 4.177): Damit der Strom I durch die Spule fließen kann,

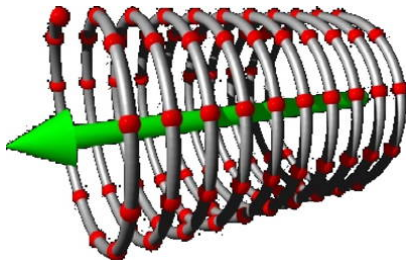


Abbildung 4.177: Magnetfeld einer Spule.

muss die Arbeit

$$W = \int U I dt = L \int \frac{dI}{dt} I dt$$

geleistet werden. Hier wurde berücksichtigt, dass die von außen angelegte Spannung gerade die induzierte Spannung kompensieren muss,

$$U = -U_{ind} = L \frac{dI}{dt}.$$

Die Integration ergibt

$$W = L \int I dI = \frac{1}{2} L I^2.$$

Schreibt man den Strom als Funktion der magnetischen Feldstärke $H = IN/\ell$, $I = H\ell/N$, so erhält man

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} L \frac{H^2 \ell^2}{N^2} = \frac{1}{2} \frac{H^2 \ell^2}{N^2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{\ell} \\ &= \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \mu_r \ell A = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} H^2 V. \end{aligned}$$

Division durch das Volumen $V = \ell A$ ergibt die Energiedichte

$$w_{magn} = \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \mu_r = \frac{1}{2} H B. \quad (4.10)$$

Dies gilt für eine lineare Beziehung zwischen H und B ; für nichtlineare Abhängigkeiten muss die Energie durch Integration bestimmt werden.

Mit Hilfe der Selbstinduktion können auch sehr hohe Spannungen erzeugt werden indem man den Strom sehr schnell ändert, z.B. indem man ihn plötzlich unterbricht.

Dies wird z.B. beim Funkeninduktor (\rightarrow Abb. 4.178) verwendet. Dieser ist aus einer zylindrischen Primärspule mit wenigen und einer darüber gewickelten Sekundärspule mit vielen Windungen aufgebaut. Man

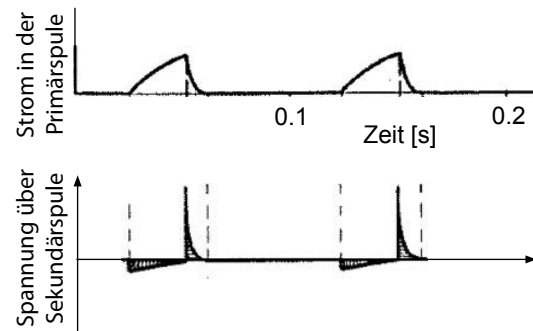


Abbildung 4.178: Funkeninduktor.

lässt dabei zunächst einen Strom durch die Primärspule fließen. Wenn das Feld in der Spule stark genug ist, öffnet es einen Schalter, welcher den Strom unterbricht. Im Magnetfeld in der Spule ist jedoch gemäß Gl. (4.10) eine erhebliche Energie gespeichert, die nach außen abgeführt werden muss. Durch die rasche Änderung des Stroms ändert sich der magnetische Fluss durch die darüber gewickelte Sekundärspule mit vielen Windungen. Dadurch wird eine hohe Spannung aufgebaut, welche über eine Funkenstrecke kurzgeschlossen wird. Dieses Prinzip wird auch in Benzinmotoren zur Erzeugung des Zündfunken im Zylinder verwendet.

4.10.9 Periodische Ströme und Felder

Periodische Spannungen, Ströme und Felder spielen eine besonders wichtige Rolle. Sie werden beschrieben durch harmonische Funktionen

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_u).$$

Hier stellt U_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und ϕ_u die Phase dar. In einem linearen System fließt dann ein Strom $I(t)$ mit der gleichen Frequenz:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_i). \quad (4.11)$$

Die beiden Phasen unterscheiden sich wenn die Schaltung Induktivitäten und / oder Kapazitäten enthält (was in realen Schaltungen immer der Fall ist!).

Wenn Spannungen und Ströme zeitabhängig sind, ist es nützlich, ihre Stärke über einen zeitunabhängigen

Parameter zu quantifizieren. Eine Möglichkeit sind Effektivwerte, z.B.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}.$$

Für eine sinus-förmige Zeitabhängigkeit wie in (4.11) ist

$$I_{eff} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

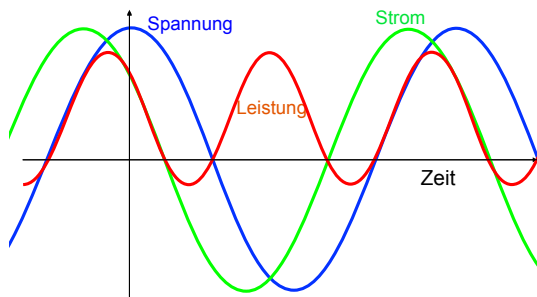


Abbildung 4.179: Strom, Spannung und Leistung als Funktion der Zeit.

Die Leistung, welche bei einem Wechselstrom über einer Impedanz abfällt, ändert sich als Funktion der Zeit. Die mittlere Leistung eines Wechselstroms hängt deshalb nicht nur von der Amplitude oder vom Effektivwert von Strom und Spannung ab, sondern auch von der relativen Phase. Sie kann berechnet werden als

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) U(t) dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\phi_u - \phi_i).$$

Die Leistung hängt somit vom Produkt der Amplituden von Strom und Spannung ab und oszilliert mit der relativen Phase $\phi_u - \phi_i$ zwischen Strom und Spannung. Abb. 4.179 zeigt die Zeitabhängigkeit für einen spezifischen Fall.

Beim 3-Phasen Wechselstrom verwendet man drei Leiter (zusätzlich zum Nulleiter), in denen die Phase der Spannung jeweils um 120 Grad verschoben ist:

$$\begin{aligned} U_R &= U_0 \sin(\omega t) \\ U_S &= U_0 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ U_T &= U_0 \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

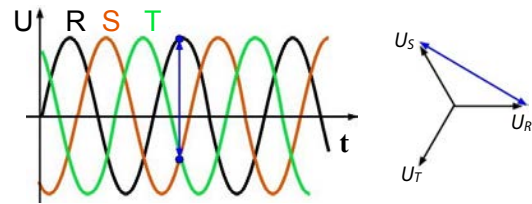


Abbildung 4.180: 3-Phasen Wechselstrom.

Diese drei Phasen können als komplexe Amplituden dargestellt werden. In Europa ist die Frequenz $\nu = \omega/2\pi = 50$ Hz, die Amplitude $U_0 = 325$ V. Die Spannung zwischen zwei der drei Phasen beträgt

$$U_2 = 2U_0 \sin \frac{2\pi}{3} = 563 \text{ V},$$

was einem Effektivwert von 398 V (~ 400 V) entspricht. Man sieht leicht, dass die Summe der drei Amplituden verschwindet.

4.10.10 Komplexe Schreibweise, Impedanz

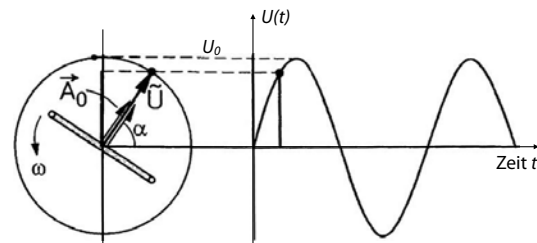


Abbildung 4.181: Darstellung einer harmonischen Zeitabhängigkeit als komplexe Amplitude.

Wechselströme und Wechselspannungen können auch gut als komplexe Größen dargestellt werden, d.h. als Absolutbetrag und Phase. Die physikalischen Größen entsprechen dem reellen Anteil. Eine Wechselspannung der Kreisfrequenz wird dann als

$$U(t) = U_0 e^{i(\omega t + \phi_u)} = U_0 e^{i\phi_u} e^{i\omega t}$$

dargestellt, wie in Abb. 4.181 gezeigt. Meist rechnet man nur mit der komplexen Amplitude $U_0 e^{i\phi_u}$. Die Realteile werden auch als Wirkanteile, die Imaginärteile als Blindanteile bezeichnet. Gemäss der

Euler'schen Formel $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ kann man die beiden Schreibweisen ineinander überführen:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_n) = \Re[U_0 e^{i(\omega t + \phi_n)}].$$

Diese Notation hat den großen Vorteil, dass Kapazitäten (Kondensatoren) und Induktivitäten (Spulen) einfach als komplexe Widerstände behandelt werden können. Für alle passiven, linearen Elemente gilt

$$U = ZI.$$

Hier stellt Z die Impedanz der Schaltung dar, in offensichtlicher Verallgemeinerung des Ohm'schen Gesetzes.

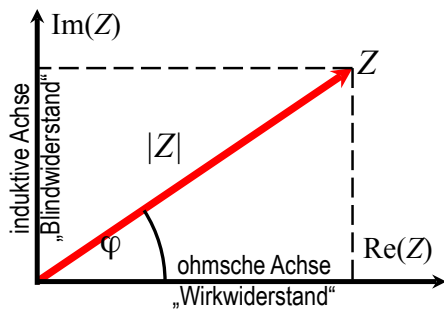


Abbildung 4.182: Impedanz in der komplexen Ebene.

Wie in Abb. 4.182 gezeigt, ist der Realteil der Impedanz gegeben durch den Ohm'schen Widerstand, während die imaginäre Achse die Beiträge von Induktivitäten und Kondensatoren enthält.

Die Berechnung von zeitabhängigen Problemen in elektrischen Schaltungen reduziert sich von der Lösung von Differentialgleichungen auf die Lösung von einfachen lineare algebraischen Gleichungen. Der Preis, den man dafür bezahlt, ist, dass das Verhältnis zwischen Spannungen und Strömen von der Frequenz des Wechselstroms abhängt.

Ein idealer Ohm'scher Widerstand ist für Gleich- und Wechselströme identisch, d.h. das Verhältnis von Spannung und Strom ist konstant. Ein Kondensator ist für Gleichströme undurchlässig, stellt aber für hohe Frequenzen einen Kurzschluss dar; die entsprechende Impedanz ist indirekt proportional zur Frequenz.

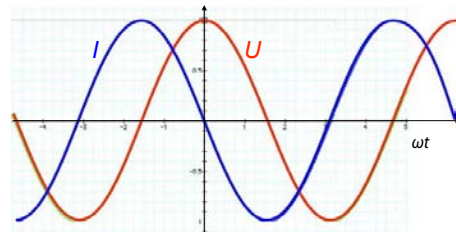


Abbildung 4.183: Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung über einem Kondensator.

Strom und Spannung sind jedoch nicht in Phase. Wie in Abb. 4.183 gezeigt, erreicht die Spannung dann ihr Maximum, wenn das Integral des Stroms maximal ist, d.h. beim Nulldurchgang des Stroms. Die Phasenverzögerung um 90 Grad entspricht in der komplexen Darstellung einer Multiplikation mit $e^{i\pi/2} = i$. Die Impedanz einer Kapazität C ist deshalb

$$Z(C) = \frac{1}{i\omega C}.$$

Eine Spule ist für hohe Frequenzen undurchlässig, stellt aber für Gleichströme einen Kurzschluss dar. Hier ist die Spannung proportional zur Ableitung des Stroms, sie eilt dem Strom um eine Viertelperiode voraus. Die Impedanz ist deshalb

$$Z(L) = i\omega L.$$

Zusammengefasst sind die Impedanzen $Z_\omega = U_\omega / I_\omega$ für

- Ohm'schen Widerstand $Z(R) = R$
- Induktionsspule $Z(L) = i\omega L$
- Kondensator $Z(C) = \frac{1}{i\omega C}$.

Die Frequenz der Wechselspannung geht in den 3 Fällen in unterschiedlicher Weise ein. Daraus folgt auch eine unterschiedliche Abhängigkeit von der Frequenz. Abb. 4.184 fasst die Frequenzabhängigkeit schematisch zusammen: Bei einem Widerstand besteht keine Abhängigkeit. Bei einer Spule nimmt der Betrag der Impedanz linear mit der Frequenz zu, beim Kondensator nimmt er mit der indirekt proportional zur Frequenz ab.

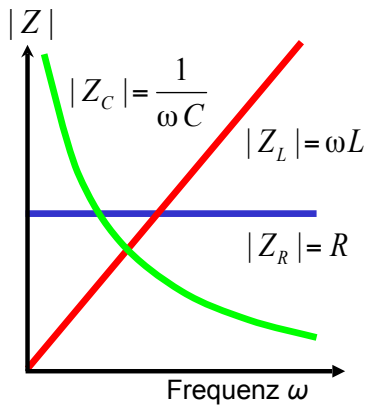


Abbildung 4.184: Frequenzabhängigkeit der Impedanz für Widerstand (blau), Spule (rot) und Kapazität (grün).

4.10.11 Rechnen mit Impedanzen

Die Rechenregeln für komplexe Impedanzen sind die gleichen wie für Widerstände. So kann die Knotenregel ersetzt werden durch die Regel, dass die Summe aller Ladungen, welche durch einen Knoten fließt, verschwindet.

Für die Parallel-, resp. Serienschaltung von Impedanzen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Widerstände. Daraus folgt z.B., dass für eine Serienschaltung von Kapazitäten die Kehrwerte addiert werden,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Die komplexe Schreibweise eignet sich auch, um die Leistung zu berechnen. Man erhält den Effektivwert der Leistung, oder die Wirkleistung, für einen Wechselstrom als

$$P = \frac{1}{2} \Re \{ U I^* \} = \frac{1}{2} \Re \{ U^* I \}.$$

Der Faktor

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt$$

enthält die Mittelung über eine Periode der Oszillation.

Für einen Ohm'schen Widerstand sind Strom und Spannung immer in Phase, d.h.

$$U = U_0 e^{i(\omega t + \phi)}, \quad I = I_0 e^{i(\omega t + \phi)},$$

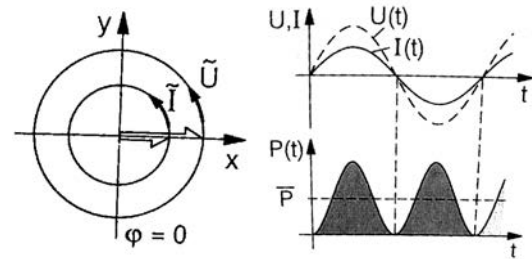


Abbildung 4.185: Strom und Spannung beim Ohm'schen Widerstand.

mit gleicher Phase ϕ , wie in Abb. 4.185 gezeigt. Im Zeigerdiagramm sind die beiden komplexen Amplituden parallel. Somit ist

$$P = \frac{1}{2} \Re \left\{ U_0 e^{i(\omega t + \phi)} I_0 e^{-i(\omega t + \phi)} \right\} = \frac{1}{2} U_0 I_0.$$

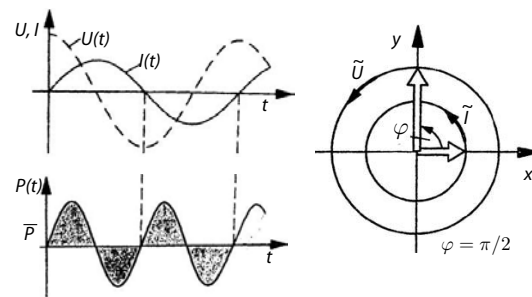


Abbildung 4.186: Strom und Spannung bei einer Spule.

Für eine rein imaginäre Impedanz (Spule oder Kondensator) sind Spannung und Strom 90° außer Phase, Abb. 4.186 zeigt den Fall einer Spule.

$$U = U_0 e^{i(\omega t + \phi)},$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \phi - \pi/2)}.$$

Die Effektivleistung ist dann

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re \left\{ U_0 e^{i(\omega t + \phi)} I_0 e^{-i(\omega t + \phi - \pi/2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \Re \left\{ e^{i\pi/2} \right\} = 0, \end{aligned}$$

d.h. es wird keine mittlere Arbeit geleistet. Die momentane Leistung $P(t)$ ist während einer Periode

gleich lang positiv wie negativ. Ein idealer Transformator z.B., der im Leerlauf betrieben wird, zieht keine Leistung. Allerdings sind in den Zuleitungen Strom und (Verlust-)Spannung nicht notwendigerweise außer Phase, so, dass trotzdem Verluste auftreten.

In einer allgemeinen elektrischen Schaltung findet man sowohl reelle wie auch imaginäre Impedanzen. Die Gesamtimpedanz erhält man bei Serienschaltung durch Addition, bei Parallelschaltungen durch Addition der Kehrwerte. Mit den resultierenden komplexen Impedanzen kann anschließend wie gewohnt gerechnet werden.

4.10.12 Transformatoren

Transformatoren sind eine Möglichkeit, Spannungen auf einen anderen benötigten Wert zu bringen.

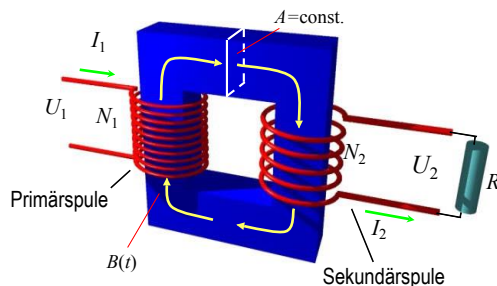


Abbildung 4.187: Transformatorschaltung.

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 , die auf ein Eisenjoch gewickelt sind. Abb. 4.187 zeigt die Schaltung für den idealen, d.h. verlustfreien Transformator. Reale Transformatoren weisen Verluste auf, aufgrund

- Streufeld Verluste: $\phi_s < \phi_p$
- Ohm'sche Verluste in den Spulenwiderständen
- Wirbelstromverluste im Transformator-Blech
- Ummagnetisierungsverluste (=Fläche der Hysterese)

Für den idealen Transformator kann der induzierte magnetische Fluss über das Induktionsgesetz berechnet werden. Auf der Eingangsseite wird ein Wechselstrom der Spannung U_1 angelegt, welcher in

der Spule einen magnetischen Fluss ϕ erzeugt. Dieser magnetische Fluss wird gerade so stark, dass die gemäß Induktionsgesetz erzeugte Spannung der Eingangsspannung entspricht,

$$U_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt},$$

wobei N_1 die Zahl der Windungen auf der Eingangsseite (= der Primärseite) angibt.

Im idealen Transformator wird der gesamte erzeugte magnetische Fluss mit Hilfe eines Eisenkerns zur zweiten, sekundärseitigen Spule mit N_2 Windungen gebracht. Dort wird, ebenfalls nach Induktionsgesetz, eine Wechselspannung

$$U_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

induziert. Das Verhältnis der beiden Spannungen ist somit

$$U_2 = U_1 \frac{N_2}{N_1},$$

d.h. die beiden Spannungen an einem Transformator verhalten sich (im Leerlauf) wie das Verhältnis der beiden Windungszahlen.

4.10.13 Anwendungen

Wird ein Verbraucher angeschlossen, d.h. fließt auf der Sekundärseite ein Strom, so muss die dadurch induzierte Spannung ebenfalls berücksichtigt werden. Das Übertragungsverhältnis hängt außerdem von den Verlusten im Transformator ab, also z.B. davon, ob die gesamte Flussdichte auf die Sekundärseite übertragen wird. Die übliche Konstruktion eines Transformators nutzt direkt die Tatsache, dass die induzierte Spannung durch die Änderung der magnetischen Flussdichte B und nicht durch die Änderung des magnetischen Feldes H bestimmt ist: der Eisenkern erhöht die Flussdichte und damit die induzierte Spannung um μ_r .

Transformatoren werden vor allem verwendet, um die Spannung von einer Netzspannung (z.B. 230 V) auf die aktuell benötigte Spannung zu transformieren (z.B. 12 V). Sie können aber auch dazu verwendet werden, sehr hohe Ströme zu erzeugen, z.B. zum

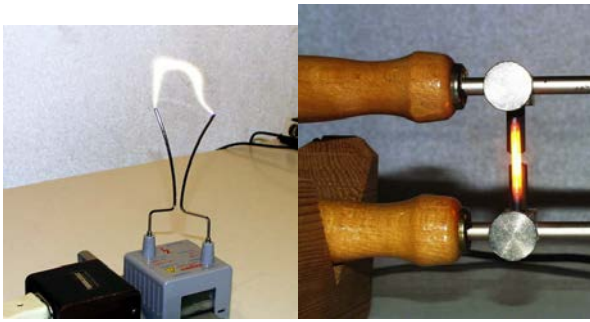


Abbildung 4.188: Links: Erzeugung einer Hochspannung. Rechts: Erzeugung eines hohen Stroms.

Schweißen. Abb. 4.188 zeigt 2 entsprechende Anwendungen. Links wird eine Hochspannung erzeugt. Dafür wurde ein Transformator mit 23000 Wicklungen auf der Sekundärspule und 500 auf der Primärspule verwendet um eine Spannung von 230 V auf 10 kV zu transformieren. Im zweiten Fall wurden auf der Primärseite wiederum 500 Wicklungen verwendet, auf der Sekundärseite 5 Wicklungen. Damit wurde aus einem primärseitigen Strom von 2,5 A ein sekundärseitiger Strom von 250 A erzeugt. Dieser reicht um den Nagel durchzuschmelzen.

Transformatoren werden u.a. verwendet, um die Spannung bei der Übertragung über große Distanzen zu erhöhen und sie anschließend wieder zu erniedrigen. Dies ist deshalb nützlich weil dadurch die Verluste gering gehalten werden. Dies kann man anhand eines einfachen Rechenbeispiels zeigen: Wir nehmen an, dass eine Leistung von 2 kW vom Erzeuger zum Verbraucher übertragen werden soll und, dass die Übertragungsleitung einen Widerstand von $R = 10 \, \Omega$ aufweise. Bei einer Spannung von 200 V wird ein Strom von 10 A benötigt. Die Spannung sinkt dann bis zum Verbraucher auf 100 V, so, dass nur noch 1 kW (=50%) zur Verfügung stehen. Wird die gleiche Leistung bei 20 kV übertragen so wird ein Strom von 0.1 A benötigt; die Spannung sinkt um 1 V auf 1999 V, d.h. die Verluste sind auf 1/20000 reduziert worden.

4.10.14 Aperiodische Ströme

Je größer der Kondensator, desto mehr Zeit benötigt man bei gegebenem Strom, um ihn zu laden. Man kann die komplexe Schreibweise auch für aperiodische Ströme verwenden.

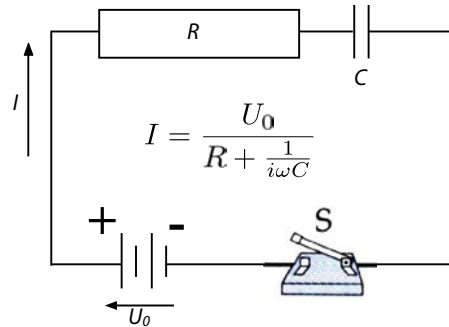


Abbildung 4.189: Stromkreis mit Schalter.

Wir betrachten einen Schaltkreis, der eine Spannungsquelle U_0 enthält, einen Widerstand R , einen Kondensator C , und einen Schalter S (\rightarrow Abb. 4.189). Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S findet man die Spannungen

$$V_R = IR \quad V_C = \frac{I}{i\omega C}.$$

Mit $V_R + V_C = U_0$ findet man

$$IR + I \frac{1}{i\omega C} = U_0,$$

oder

$$I(\omega) = \frac{U_0}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{U_0}{R} \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega RC}}.$$

Dieser Ausdruck beschreibt das Verhalten des Stroms im Frequenzbereich: für kleine Frequenzen $\omega < 1/RC$ ist der Nenner groß und es fließt kein Strom, für große Frequenzen beträgt der Strom

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Dieses Resultat kann qualitativ leicht nachvollzogen werden: Ein Gleichstrom kann nicht durch den Kondensator fließen, für hohe Frequenzen ($\omega RC \gg 1$) wirkt der Kondensator dagegen wie ein Kurzschluss

und die gesamte Spannung fällt über dem Widerstand ab.

Um das zeitliche Verhalten zu bestimmen, kann man $I(\omega)$ Fourier-transformieren. Das Resultat ist

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}.$$

Der Strom setzt somit zunächst mit dem Maximalwert ein, der ohne den Kondensator fließen würde, und nimmt exponentiell auf Null ab. Die Zeitkonstante ist gegeben durch das Produkt aus Widerstand und Kapazität, $\tau_{RC} = RC$.

Um schnelle Schaltungen zu erhalten, benötigt man somit kleine Kapazitäten und Widerstände. Dies wird am Besten bei integrierten Schaltkreisen erreicht.

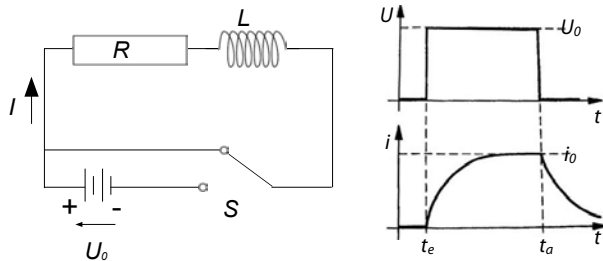


Abbildung 4.190: Widerstand und Spule als Tiefpassfilter.

Legt man an eine Spule eine Spannung an, so folgt der Strom verzögert. Wir berechnen hier das Ausschaltverhalten: Wenn die Batterie in Abb. 4.190 überbrückt ist, muss die Summe der Spannungen über der Spule und dem Widerstand verschwinden:

$$IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung für die Stellung des Schalter wie in Abb. 4.190 und einen endlichen Anfangsstrom I_0 ist

$$I(t) = I_0 e^{-tR/L}.$$

Der Strom fällt somit exponentiell auf Null ab, mit der Zeitkonstanten $\tau_{RL} = L/R$.

Der Einschaltvorgang unterscheidet sich lediglich durch die zusätzliche Spannungsquelle. Der Strom steigt deshalb vom Anfangswert Null exponentiell

auf den Langzeitwert $I_\infty = U/R$ an. Bei langen Zeiten hat die Spule also keinen Einfluss auf das Verhalten der Schaltung; sie verzögern jedoch die Zeit, bis der stationäre Zustand erreicht wird. Schnelle Schaltungen erhält man somit mit kleinen Induktivitäten und großen Widerständen in Serie zur Induktivität.

4.11 Die Maxwell Gleichungen

Im Bereich der klassischen Mechanik bieten die Newton'schen Gesetze eine Grundlage für die meisten beobachteten Phänomene. Im Gebiet von Elektrizität und Magnetismus liefern die Maxwell'schen Gleichungen eine noch umfassendere Beschreibung, welche die Grundlage für alle beobachteten Phänomene umfasst. Die vier Gleichungen, welche Maxwell 1861-1864 hergeleitet hat, basieren auf damals bereits bekannten Beziehungen wie dem Durchflutungsgesetz und dem Induktionsgesetz und bleiben bis heute gültig. Je nach Materialsystem müssen sie um die relevanten Daten für das Medium ergänzt werden (Suszeptibilitäten und Permeabilitäten). Ansonsten wird ihre Gültigkeit nur durch die Quantenmechanik begrenzt; die Verallgemeinerung auf Phänomene, bei denen die Quantenmechanik eine Rolle spielt, liefert die Quanten-Elektrodynamik.

4.11.1 Felder

Die Maxwell-Gleichungen stellen Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern her. Deren Definitionen werden deshalb hier nochmals zusammengefasst. Das elektrische Feld \vec{E} ist definiert über die Kraft \vec{F} , die auf eine Probeladung q wirkt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad [E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} kann dagegen über eine Flächenladungsdichte definiert werden,

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{n} \quad [D] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

In vielen Systemen ist \vec{D} proportional zu \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \quad \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Im Vakuum ist $\epsilon_r = 1$.

Den magnetischen Teil des Feldes beschreibt die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} \quad [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}},$$

resp. die magnetische Flussdichte \vec{B} , welche häufig direkt proportional zu \vec{H} ist:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}.$$

In nichtmagnetischen Materialien ist $\mu_r = 1$. Hier wurde angenommen, dass das Medium isotrop sei, dass also alle Richtungen gleichwertig seien. Dies ist insbesondere in Festkörpern meist nicht der Fall. Die Proportionalitätskonstanten ϵ_r , μ_r werden dann zu Tensoren.

Es gilt das Überlagerungsprinzip:

$$\vec{E}_t = \sum_i \vec{E}_i,$$

wobei \vec{E}_i das Feld darstellt, welches von der Ladung q_i erzeugt wird: die Felder einzelner Ladungen addieren sich. Daraus folgt auch, dass der Fluss durch

eine beliebige Oberfläche sich ebenfalls als Summe der einzelnen Beiträge, respektive im kontinuierlichen Grenzfall als Integral ergibt:

$$\iint_O \vec{E}_t \cdot d\vec{A} = \sum_i \iint_O \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{q_t}{\epsilon_0},$$

mit $q_t = \sum_i q_i$ als Gesamtladung.

Für das Magnetfeld gilt

$$\iint_O \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (4.12)$$

Wie beim Fluss des elektrischen Feldes ist der Fluss des magnetischen Feldes ein Maß für die Zahl der Feldlinien, welche durch die entsprechende Fläche dringen. In differenzieller Form wird aus (4.12)

$$\text{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0.$$

Dies ist ein Ausdruck dafür, dass magnetische Feldlinien immer geschlossen sind.

4.11.2 Die Grundgleichungen von Elektrizitätslehre und Magnetismus

Zwischen den Feldern und den Ladungen gibt es einige Beziehungen, die wir bereits diskutiert haben:

$$\text{elektrische Feldgleichung: } \text{div} \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$$\text{magnetische Feldgleichung: } \text{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\text{Induktionsgesetz: } U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\text{Durchflutungsgesetz: } \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}.$$

Während diese Phänomene zunächst als relativ unabhängig voneinander gesehen wurden, konnte James Clerk Maxwell 1864 eine Theorie des Elektromagnetismus aufstellen, welche alle Phänomene in einem einheitlichen Gesamtbild zusammenfasste. Für eine einheitliche Schreibweise werden das Induktionsgesetz und das Durchflutungsgesetz etwas umgeformt. Beide sind hier in ihrer Integralform geschrieben, bei denen jeweils über eine Fläche A integriert wird. In der differentiellen Form beziehen

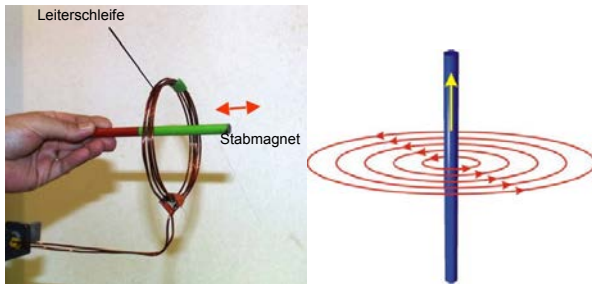


Abbildung 4.191: Induktionsgesetz (links) und Durchflutungsgesetz (rechts).

sie sich beide auf ein infinitesimales Flächenelement. Außerdem drücken wir die abgeleiteten Größen $U = \int E$ und $\Phi = \iint B$ durch die Felder aus, so dass die Gleichungen direkt die Felder E , D , H und B miteinander verknüpfen. Damit erhält das Induktionsgesetz die Form

$$U_{ind} = \oint_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Das erste Integral erfolgt entlang dem Rand der Fläche, das zweite Integral über die Fläche. Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes wandeln wir das Linienintegral ebenfalls in ein Flächenintegral um:

$$\oint_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Da diese Gleichung für beliebige Flächen A gilt, müssen die Integranden gleich sein,

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}.$$

In analoger Weise erhalten wir aus dem Durchflutungsgesetz die differentielle Form

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (4.13)$$

4.11.3 Der Verschiebungsstrom

Betrachtet man nur den Strom, welcher in einem Leiter fließt, so kommt es zu Unstetigkeiten, z.B. bei der Aufladung eines Kondensators: zwischen den Platten werden keine Elektronen transportiert. Trotzdem erscheinen auf der einen Seite Ladungen, welche auf der anderen Seite entfernt werden. Betrachtet man

also die Spannung, welche in einer Leiterschleife erzeugt wird, wenn der Strom durch den Kondensator ändert, so würde man unterschiedliche Resultate erhalten, je nachdem ob man die Integrationsfläche durch den Draht vor dem Kondensator oder durch den Bereich zwischen den Kondensatorplatten legt. Dies ist unphysikalisch und entspricht nicht dem experimentellen Befund.

Maxwell erkannte, dass die Gleichung (4.13) unvollständig war: neben den "gewöhnlichen" Strömen j kann auch der sog. "Verschiebungsstrom", welcher einer Änderung der dielektrischen Verschiebung entspricht, einen Beitrag zum Magnetfeld liefern. Die Ladung auf den Kondensatorplatten beträgt

$$Q = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}.$$

Der Strom ist Ladung pro Zeit, also

$$\frac{dQ}{dt} = I_v = \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}.$$

Berücksichtigt man dies im Durchflutungsgesetz, so wird dieses zu

$$\oint_{dA} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + I_v,$$

respektive in der differentiellen Form zu

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{d}{dt} \vec{D}.$$

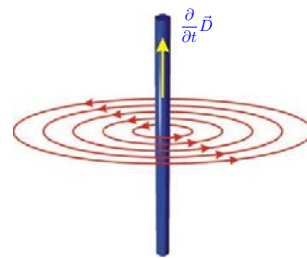
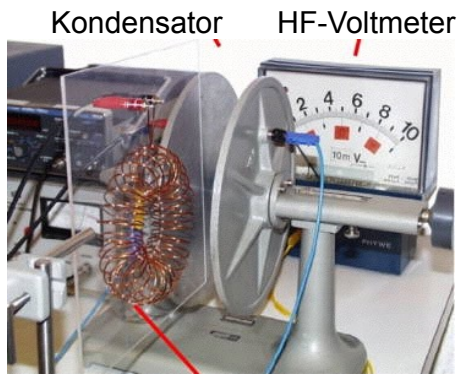


Abbildung 4.192: Beitrag des Verschiebungsstroms zum Magnetfeld.

Die Änderung $d\vec{D}/dt$ der dielektrischen Verschiebung \vec{D} als Funktion der Zeit erzeugt also ein entsprechendes Magnetfeld, wie in Abb. 4.192 skizziert. Dieses kann z.B. mit Hilfe des Induktionsgesetzes über die induzierte Spannung nachgewiesen werden.



Toroidspule zur Vermessung der kreisförmigen Magnetfelder

Abbildung 4.193: Messung des Verschiebungsstroms über das induzierte Magnetfeld.

Abbildung 4.193 zeigt ein entsprechendes Experiment. Im Luftspalt zwischen den beiden Kondensatorplatten befindet sich eine torusförmige Spule, welche die Flussänderung entlang ihrer Achse misst. Hier werden offenbar keine Ladungsträger durch den Luftspalt verschoben, aber es wird ein elektrisches Feld und damit eine dielektrische Verschiebung aufgebaut. Die zeitliche Änderung dieses Feldes erzeugt ein kreisförmiges Magnetfeld, konzentrisch zur Achse des System, wie ein normaler Strom. Diese kann über seine Induktionswirkung in der toroidalen Spule experimentell nachgewiesen werden.

4.11.4 Die Maxwell-Gleichungen

Die erste Maxwell-Gleichung entspricht der Feldgleichung. Sie kann in integraler oder differenzieller Form geschrieben werden:

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_t \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}). \quad (4.14)$$

Die zweite Maxwell-Gleichung ist analog für das Magnetfeld, respektive die nicht vorhandene magnetische Ladung:

$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0. \quad (4.15)$$

Während die ersten beiden Gleichungen das elektrische, respektive das magnetische Feld mit der Ladungsverteilung verknüpfen, stellen die dritte und

vierte Maxwell Gleichung eine Beziehung zwischen der zeitlichen Ableitung des einen Feldes und dem anderen Feld her. Die dritte entspricht dem Induktionsgesetz:

$$\int_{dA} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (4.16)$$

Die vierte Gleichung entspricht dem erweiterten Durchflutungsgesetz:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{r} = I + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (4.17)$$

Hier bezieht sich A jeweils auf eine Fläche und dA auf den Rand dieser Fläche. Die Gleichungen weisen eine hohe Symmetrie auf: sie bleiben fast identisch wenn $H \leftrightarrow E$ und $B \leftrightarrow D$ ersetzt werden, außer

- dass das Vorzeichen bei der zeitlichen Ableitung wechselt
- die magnetische Ladungsdichte ρ_m identisch verschwindet und damit auch die magnetische Stromdichte.

Der von Maxwell eingeführte Beitrag des Verschiebungsstroms verschwindet für zeitlich konstante Felder. Bei der Diskussion von Wellen erhält er jedoch eine entscheidende Bedeutung.

Maxwell erkannte auch, dass nach diesen Gleichungen Wellen existieren müssten, d.h. sich räumlich ausbreitende zeitabhängige elektromagnetische Felder. Diese werden in Kapitel 6.5 diskutiert. 20 Jahre später gelang es Heinrich Hertz, diese Wellen experimentell nachzuweisen.

Weitere 20 Jahre später wurden elektromagnetische Wellen erstmals für die Übertragung von Informationen über große Distanzen verwendet. Marconi testete 1901 die erste transatlantische Funkverbindung (\rightarrow Abb. 4.194). Dies gilt allerdings heute nicht mehr als gesichert – vermutlich hatte er nur eine Störung als Signal interpretiert.

Neben den oben angegebenen Gleichungen benötigt man für die Beschreibung der Wellenausbreitung in



Abbildung 4.194: Marconi's Empfangsstation in Neufundland.

Materie noch die ebenfalls bereits bekannten Materialgleichungen

$$B = \mu_r \mu_0 H \quad \text{und} \quad D = \epsilon_r \epsilon_0 E.$$

4.11.5 Grenzflächen

Die Maxwell-Gleichungen liefern viele nützliche Resultate. Eine einfache aber sehr nützliche Beziehung erhält man aus den davon abgeleiteten Kontinuitätsbedingungen. Falls auf der Grenzfläche kein Strom fließt, liefert das 4. Maxwell'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \rightarrow H_{\parallel}^1 = H_{\parallel}^2,$$

d.h. die parallele Komponente des H -Feldes ist an der Grenzfläche kontinuierlich. Aus der 2. Maxwell'schen Gleichung erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow B_{\perp}^1 = B_{\perp}^2,$$

d.h. die senkrechte Komponente des B -Feldes ist kontinuierlich. Analog folgt aus der ersten und dritten Maxwell Gleichung

$$D_{\perp}^1 = D_{\perp}^2 \quad E_{\parallel}^1 = E_{\parallel}^2.$$