

## 2 Mechanik

### 2.1 Kinematik

#### 2.1.1 Grundbegriffe

Die Mechanik ist der “klassischste” Teil der Physik, sie umfasst diejenigen Aspekte die schon am längsten untersucht wurden.



Abbildung 2.1: Galileo Galilei (1564-1642)

Zu den wichtigsten Begründern gehört Galileo Galilei (→ Abb. 2.1), der wichtige Beiträge zur experimentellen Untersuchung von Naturgesetzen (Mechanik, Astronomie) lieferte und vor allem sehr geschickt war, deren Bedeutung und seine Beiträge dazu öffentlichkeitswirksam zu verbreiten. Zu den wichtigsten Beispielen gehören seine Fallversuche, mit denen er zeigte, dass die Fallgeschwindigkeit für alle Körper gleich ist.

Für die Verbreitung seiner Ideen verwendete er vor allem seine “Dialoge” (→ Abb. 2.2), in denen fiktive Personen seine theoretischen Konzepte mit älteren Vorstellungen verglichen.

Die eigentliche Formalisierung der Mechanik ist vor allem Isaac Newton (→ Abb. 2.3) zu verdanken, welcher mit Hilfe weniger Grundprinzipien (“Newtons Gesetzen”) den größten Teil des damaligen physikalischen und astronomischen Wissens herleiten konnte. Sein Hauptwerk sind die “Philosophiae na-



Abbildung 2.2: Titelseiten von Galileos Dialog über die Weltsysteme.

turalis principia mathematica”, also die mathematischen Grundlagen der Naturwissenschaft.

Die Mechanik kann aufgeteilt werden in die Gebiete

**Statik:** Zusammensetzung und Gleichgewicht von Kräften.

**Kinematik:** Die Kinematik beschreibt Bewegungsprozesse quantitativ. Dabei wird die Ursache der Bewegung nicht untersucht.

**Dynamik:** Effekt von Kräften auf die Bewegungsprozesse.

Außerdem unterscheidet man Teilgebiete danach, welche Objekte beschrieben werden. Im Folgenden werden die meisten Konzepte mit Hilfe eines stark idealisierten Modells diskutiert, dem Massenpunkt. Weitere Klassen von Objekten sind starre und deformierbare Körper.

#### 2.1.2 Eindimensionale Kinematik

Wir beginnen mit eindimensionaler Kinematik, d.h. mit einer Bewegung, welche mit einer einzigen Ortskoordinate beschrieben werden kann, welche die Po-

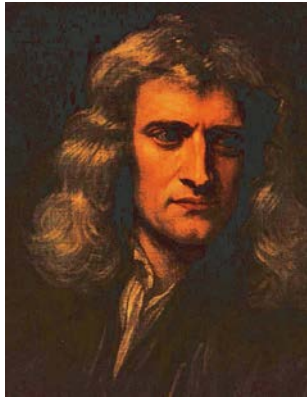


Abbildung 2.3: Isaac Newton (1642-1727).

sition des Körpers auf einer vorgegebenen Bahn beschreibt. Ein typisches Beispiel ist eine Eisenbahn auf einem einzelnen Gleis: dieses kann gebogen sein, aber die Position der Eisenbahn ist exakt bestimmt wenn man die Position bezüglich einem Koordinatennullpunkt angibt.

Ein Massenpunkt ist ein Modell für einen Körper, dessen Ausdehnung für die behandelte Fragestellung keine Rolle spielt. Die Bewegung des Massenpunktes ist vollständig beschrieben, wenn man die Position  $s$  als Funktion der Zeit  $t$  angibt. Dies erfolgt mathematisch durch eine Funktion  $s(t)$  oder graphisch durch ein Weg-Zeit Diagramm.

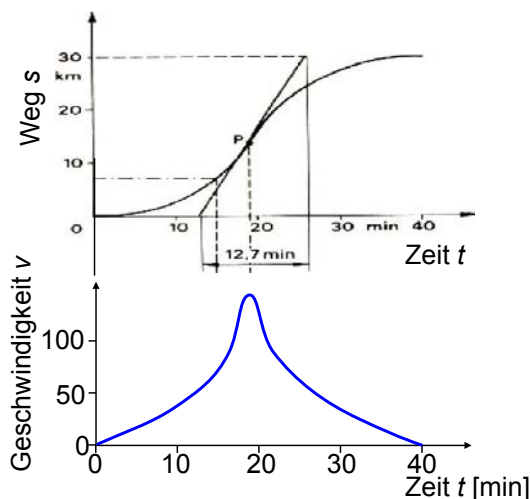


Abbildung 2.4: Weg-Zeit Diagramm.

Die Geschwindigkeit  $v$  des Massenpunktes kann aus

dem Weg-Zeit Diagramm ( $\rightarrow$  2.4) durch Ableitung bestimmt werden:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Graphisch ist die Geschwindigkeit durch die Steigung der Kurve im Weg-Zeit Diagramm bestimmt.

Anstelle der instantanen Geschwindigkeit  $v(t)$  interessiert manchmal auch die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Im Weg-Zeit Diagramm ist dies die Steigung der direkten Verbindung zwischen zwei Punkten.

Anstelle des Weges kann man auch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auftragen. Im Geschwindigkeit-Zeit Diagramm ist die zurückgelegte Wegstrecke als Integral (=Fläche unter der Kurve) gegeben:

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t') dt'.$$

Analog zur Definition der Geschwindigkeit als Änderung des Ortes pro Zeiteinheit wird die Beschleunigung als Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit definiert:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Im Geschwindigkeit-Zeit Diagramm erscheint die Beschleunigung als Steigung der Kurve, im Ort-Zeit Diagramm als Krümmung: Positive Krümmung (nach oben) bedeutet positive Beschleunigung, negative Krümmung Verzögerung (d.h. Abbremsung). Die Geschwindigkeit ist durch das Integral der Beschleunigung gegeben:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t') dt'.$$

Der Weg ist dementsprechend

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{a}{2}t^2.$$

### 2.1.3 Konstante Beschleunigung

Ein wichtiger Spezialfall ist die konstante Beschleunigung,  $a(t) = a$ . Dazu gehört u. a. der freie Fall. Für einen Körper, der sich zunächst in Ruhe ( $v_0 = 0$ ) am Punkt  $s(0) = 0$  befindet nimmt die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung proportional zur Zeit zu,  $v(t) = at$ . Der zurückgelegte Weg ist deshalb

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2. \quad (2.1)$$

Auf der Erdoberfläche wirkt auf alle Körper eine konstanten Beschleunigung nach unten mit  $a = -g = -9,81 \text{ ms}^{-2}$  für ein Koordinatensystem, das senkrecht nach oben zeigt.

Wir erwarten somit, dass der zurückgelegte Weg quadratisch mit der Zeit ansteigt. Im Ausdruck (2.1) ist die Masse nicht enthalten, es fallen also alle Objekte mit der gleichen Beschleunigung und mit der gleichen (zeitabhängigen) Geschwindigkeit.

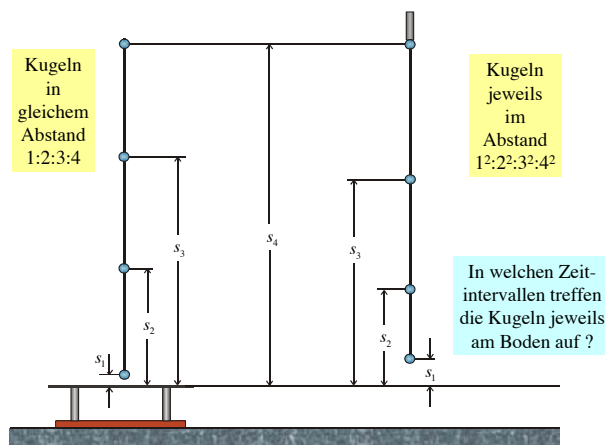


Abbildung 2.5: Experiment zum freien Fall: Es sind jeweils Gewichte in unterschiedlicher Höhe montiert. Sie werden gleichzeitig fallen gelassen.

Wir verifizieren die Vorhersage (2.1) anhand eines Experimentes. Jeweils vier Gewichte werden in unterschiedlicher Höhe über dem Boden aufgehängt und gleichzeitig losgelassen ( $\rightarrow$  Abb. 2.5). An der ersten Schnur sind die Gewichte im Abstand 0:1:2:3 (d.h. linear) angebracht:  $h_i = (0; 1,6; 3,2; 4,8)$  m. Werden diese gleichzeitig fallen gelassen, so erreichen

sie den Boden nach einer Zeit

$$t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{g}} = (0; 0,57; 0,81; 0,99),$$

also mit abnehmenden Abständen.

An der zweiten Schnur sind die Gewichte im Abstand 1:4:9:16 (also quadratisch. Konkret betragen die Höhen  $h_i = (0,3; 1,2; 2,7; 4,8)$  m. Die Zeit bis sie auf dem Boden auftreffen, sollte deshalb zu den Zeiten

$$t_i = \sqrt{\frac{2h_i}{g}} = (0,25; 0,49; 0,74; 0,99)$$

auf dem Boden auftreffen. Der Abstand zwischen 2 aufeinanderfolgenden Ereignissen ist somit  $t_{i+1} - t_i = 0,25$  s, für alle 3 Abstände. Dies lässt sich akustisch überprüfen: im zweiten Fall treffen die Gewichte etwa mit gleichen Abständen auf dem Boden (d.h. der Metallplatte) auf.

Im Normalfall unterscheidet sich die Fallgeschwindigkeit unterschiedlicher Objekte: eine Feder und ein Stein fallen nicht gleich schnell. Das liegt daran, dass in der Beschreibung der Luftwiderstand nicht berücksichtigt wurde. Im Vakuum fallen die Objekte aber wirklich mit gleicher Geschwindigkeit.

### 2.1.4 Senkrechter Wurf nach oben

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{a}{2}t^2$$

Beschleunigung

Anfangsort

Anfangsgeschwindigkeit

Abbildung 2.6: Das Superpositionsprinzip: Anfangsort, Anfangsgeschwindigkeit und Beschleunigung liefern unabhängige Beiträge.

Befindet sich der Körper zu Beginn nicht in Ruhe, so wird die Bewegung aufgrund der Anfangsgeschwindigkeit der Bewegung aufgrund der (gleichförmigen) Beschleunigung überlagert. Man bezeichnet dies als Superpositionsprinzip ( $\rightarrow$  Abb. 2.6): der

Anfangsort, die gleichförmige Bewegung und die gleichförmige Beschleunigung können unabhängig berechnet und die Resultate addiert werden.

Als Beispiel betrachten wir einen Körper, der von einem Turm (Höhe  $h_0 = 10$  m) mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v(0) = 5$  m/s senkrecht nach oben geworfen wird. Die Schwerkraft erzeugt eine zeitlich konstante Beschleunigung von  $a = -g = -9.81$  m/s<sup>2</sup> nach unten.

Die Geschwindigkeit wird somit

$$v(t) = v_0 + at = (5 - 9.81t) \text{ m/s} \quad [t] = \text{s}$$

Der erste Term beschreibt die Anfangsgeschwindigkeit und ist unabhängig von der Zeit; dazu wird das Produkt aus Beschleunigung und Zeit addiert.

Für den Ort (d.h. die Höhe  $h$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \\ &= (10 + 5t - 4.9t^2) \text{ m}. \quad [t] = \text{s}. \end{aligned}$$

Hier stellt der erste Term den Ausgangspunkt dar - er ist zeitunabhängig. Der zweite Term beschreibt den Effekt der Anfangsgeschwindigkeit, und der dritte Term ist auf die konstante Beschleunigung zurückzuführen.

Die maximale Höhe wird erreicht für  $v(t) = 0$ :

$$5 - 9.81 t_m = 0 \rightarrow t_m = 0.51 \text{ s},$$

zum Zeitpunkt  $t_m$ . Sie beträgt dann

$$h(0.51 \text{ s}) = (10 + 2.55 - 1.27) \text{ m} = 11.28 \text{ m}.$$

Die Kugel trifft auf den Boden ( $h = 0$ ) auf wenn

$$\begin{aligned} h(t_0) &= 0 = h_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 = \\ &= 10 + 5t_0 - 4.9t_0^2, \end{aligned}$$

d.h. bei

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 196}}{9.81} = \\ &= \frac{5 \pm 14.87}{9.81}. \end{aligned}$$

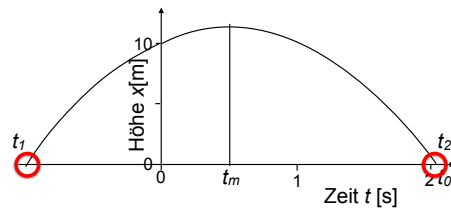


Abbildung 2.7: Höhe als Funktion der Zeit.

Wie in Abb. 2.7 gezeigt, hat diese Gleichung zwei Lösungen:

$$t_1 = 2.03 \quad \text{und} \quad t_2 = -1.01.$$

Wir müssen jetzt überprüfen weshalb wir zwei Lösungen erhalten. Die erste ( $t_1 > 0$ ) ist diejenige die wir suchen. Die zweite ( $t_2 < 0$ ) entspricht ebenfalls einer Durchquerung des Bodens durch den Körper - allerdings bevor er vom Turm nach oben geworfen wurde. Der Körper würde bei dieser Lösung bei  $t = 0$  an der Spitze des Turmes eintreffen und anschließend die gleiche Kurve verfolgen wie der Körper, der bei  $t = 0$  geworfen wurde. Man erhält häufig mathematisch mehr Resultate als physikalisch sinnvoll sind, wenn man die Randbedingungen nicht berücksichtigt: in diesem Fall betrachten wir nur Zeiten  $t > 0$ .

### 2.1.5 Kinematik in zwei und drei Dimensionen

In vielen Fällen findet Bewegung in mehr als einer Dimension statt. Physikalische Größen, die durch Betrag und Richtung beschrieben werden, nennt man Vektoren. In diesen Fällen wird die Position durch zwei oder mehr Koordinaten beschrieben, also z.B.  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Dafür muss ein Bezugssystem festgelegt werden. Dieses besteht aus einem Bezugspunkt  $O$  und gerichteten Orientierungslinien im Raum. Bezüglich dieses Koordinatensystems ist eine Position dann definiert durch einen Vektor  $\vec{r}$  vom Ursprung zum entsprechenden Punkt ( $\rightarrow$  Abb. 2.8).

Grundsätzlich ist man frei in der Wahl der Koordinaten, doch sind häufig kartesische Koordinatensysteme einfach zu handhaben. Dabei handelt es sich um rechtwinklige Koordinatensysteme mit gleichem

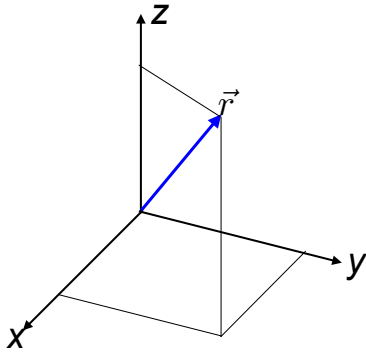


Abbildung 2.8: Vektor und Koordinatensystem.

Maßstab in allen Richtungen. Die Bewegung eines Massenpunktes in drei Dimensionen wird dann beschrieben durch einen Vektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend sind auch Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

Vektoren in (zwei oder) drei Dimensionen.

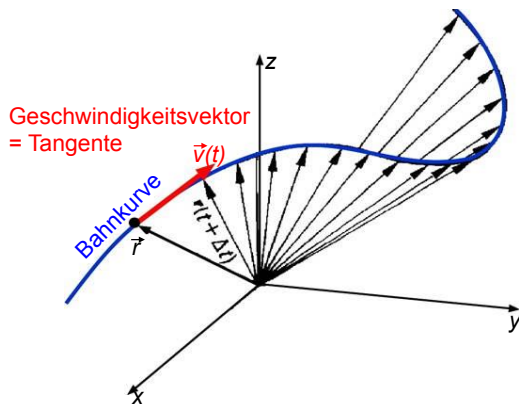


Abbildung 2.9: Bahnkurve in 3D.

Trägt man den Weg als Kurve auf, so ist die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  an einem beliebigen Punkt  $\vec{r}(t)$  entlang der Tangente gerichtet, wie in Abb. 2.9 gezeigt.

Ist die Beschleunigung eines Massenpunktes gegeben, so können Geschwindigkeit und Ort als Funktion der Zeit für die Komponenten einzeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt' = \\ &= \{v_x(0), v_y(0), v_z(0)\} + \\ &+ \left\{ \int_0^t a_x(t') dt', \int_0^t a_y(t') dt', \int_0^t a_z(t') dt' \right\}. \end{aligned}$$

Somit sind die drei Komponenten unabhängig voneinander.

Für den Fall konstanter Beschleunigung erhalten wir wiederum

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}t$$

und

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}}{2}t^2.$$

### 2.1.6 Wurfparabel



Abbildung 2.10: Schiefer Wurf.

Wir illustrieren dieses Verhalten anhand einer zweidimensionalen Bewegung im Schwerfeld der Erde, d.h. mit konstanter Beschleunigung nach unten. Abb. 2.10 zeigt ein Beispiel eines solchen Wurfs.

Wir wählen ein Koordinatensystem mit  $x$  in horizontaler und  $z$  in vertikaler Richtung (nach oben). Der Körper sei zum Zeitpunkt  $t = 0$  bei

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt

$$\vec{v}(0) = v_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

ist zeitlich konstant. Somit ist die Bewegung

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= v_0 t \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha, \\ v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir können diese Kurve auch als Gleichung schreiben. Die beiden Koordinaten ergeben 2 Gleichungen:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad z = v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2}.$$

Wir lösen die erste Gleichung nach der Zeit  $t$  auf:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

und setzen diesen Ausdruck in die zweite Gleichung ein:

$$z = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Kurven der Form  $z = ax + bx^2$  stellen Parabeln dar. In diesem speziellen Fall spricht man von der "Wurfparabel". Abb. 2.11 zeigt ein Beispiel.

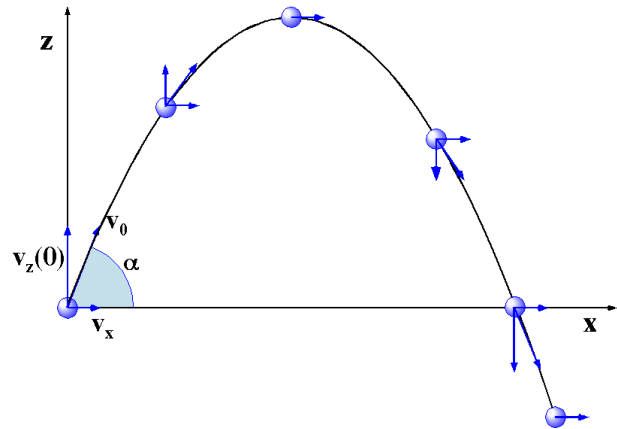


Abbildung 2.11: Bahnkurve des schiefen Wurfs. An einigen Punkten sind auch die Geschwindigkeitskomponenten dargestellt.

Man kann sie z.B. durch einen Wasserstrahl sichtbar machen, wie in Abb. 2.12 gezeigt. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall dass das Wasser horizontal austritt, d.h.  $\alpha = 0$ . Die Gleichung reduziert sich dann zu

$$z = -x^2 \frac{g}{2v_0^2},$$

d.h. eine nach unten offene Parabel. Im Experiment tritt der Wasserstrahl horizontal aus der Düse aus und fällt unter dem Einfluss der Gravitationsbeschleunigung. Die roten Kreise markieren eine Parabel durch die Werte  $(x/y) = (1/1), (2/4), (3/9), (4/16), (5/25) \dots$

Wird der Wasserstrahl gekippt, so wird  $\alpha \neq 0$  und das Wasser erhält eine Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung. Der Scheitelpunkt der Parabel verschiebt sich dadurch nach rechts oben.

### 2.1.7 Unabhängigkeitsprinzip

Nicht nur die Anfangswerte von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Position gehen linear in die Gleichung ein; wir haben auch gesehen, dass die einzelnen Koordinaten voneinander unabhängig sind.



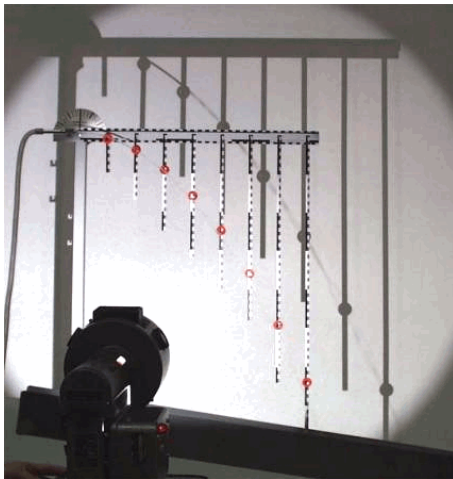


Abbildung 2.12: Wasserstrahlparabel.

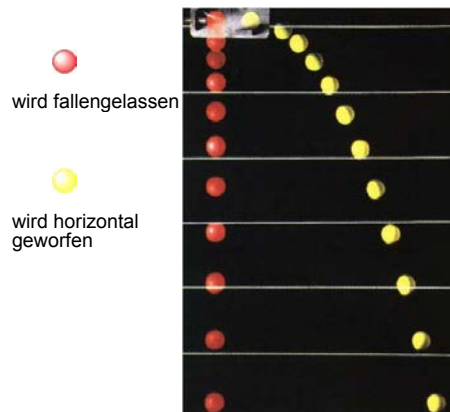


Abbildung 2.13: Unabhängigkeitsprinzip.

Die bedeutet z.B., dass eine Kugel, welche aus 1 m Höhe fallengelassen wird, den Boden nach  $t = \sqrt{2s/a} = 0.45\text{s}$  erreicht, unabhängig davon ob sie sich zu Beginn in Ruhe befindet oder eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit aufweist. Abb. 2.13 zeigt dies durch Vergleich der Trajektorien von 2 Kugeln.

Wir überprüfen dies, indem wir zwei Kugeln am gleichen Hebel befestigen ( $\rightarrow$  Abb. 2.14). Wird mit dem Hammer darauf geschlagen, so fällt die eine senkrecht hinunter, die andere in einer Parabel. Dass beide gleichzeitig auf dem Boden auftreffen lässt sich leicht akustisch verifizieren. Dies wird auch aus



Abbildung 2.14: Unabhängigkeitsprinzip: Eine Kugel wird fallen gelassen, die andere gleichzeitig horizontal geworfen. Beide treffen gleichzeitig am Boden auf.

der Vektorschreibweise der Bewegungsgleichung erkennbar:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x0}t + \frac{a_x}{2}t^2 \\ z_0 + v_{z0}t + \frac{a_z}{2}t^2 \end{pmatrix} :$$

es handelt sich um zwei unabhängige Gleichungen, ohne Kopplungsterm. Das Unabhängigkeitsprinzip besagt, dass sich die beiden Koordinaten unabhängig voneinander entwickeln. Dies gilt immer für gleichförmig beschleunigte Bewegungen.

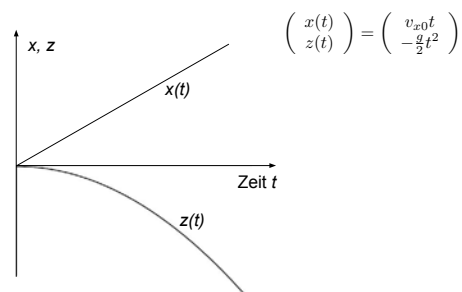


Abbildung 2.15: Unabhängige Zeitentwicklung für 2 Koordinaten im Schwerfeld.

Die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit ist konstant, die  $x$  Koordinate wächst deshalb linear (in beiden Fällen; für die rote Kugel ist  $v_x = 0$ ).

Ein weiteres Experiment dazu ist der “Affenschuss”: Wie in Abb. 2.16 gezeigt, schießt ein Jäger auf einen Affen. Dieser lässt sich fallen, wenn er den Mündungsblitz des Gewehrs sieht. Wohin muss der Jäger

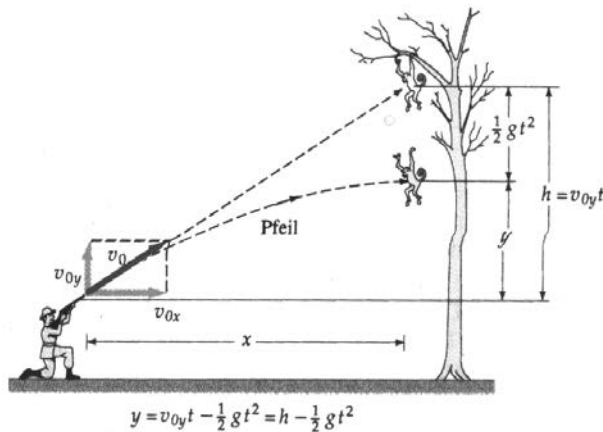


Abbildung 2.16: Der "Affenschuss".

zielen um den Affen (Höhe  $h$ , Distanz  $x_0$ ) zu treffen? Was ist der Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ ? Vernachlässigt man zunächst die Erdbeschleunigung, so muss der Jäger offenbar auf den Affen zielen um ihn zu treffen, d.h.  $\tan \alpha = h/x_0$ . Die Flugzeit der Kugel ist

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0 \cos \alpha}.$$

Der zusätzliche Einfluss der Erdbeschleunigung ist identisch für den Affen und die Kugel: Beide fallen um eine Strecke  $z = -gt_0^2/2$ . Die Kugel trifft somit unabhängig von der Mündungsgeschwindigkeit wenn der Jäger richtig zielt und der Affe sich sofort fallen lässt.

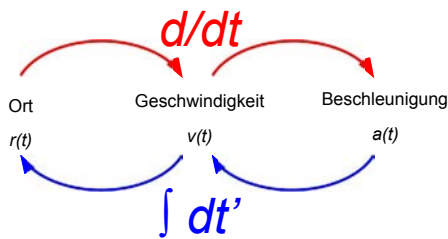


Abbildung 2.17: Zusammenfassung der Kinematik.

Im Sinne einer kurzen Zusammenfassung soll Abb. 2.17 nochmals daran erinnern, was das Thema der Kinematik ist: Es geht um die Beziehung zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung, welche aus einander durch Differenzieren, resp. Integrieren hergeleitet werden können. In vielen Fällen gilt dies

für die verschiedenen Raumdimensionen unabhängig voneinander.

## 2.2 Dynamik von Massenpunkten

Die Dynamik befasst sich mit der Bewegung, welche von Kräften erzeugt und geändert wird.

### 2.2.1 Definitionen

Die wichtigsten Grundbegriffe der Dynamik sind die Masse, der Impuls und die Kraft.

**Masse** ein Maß für den Widerstand eines Körpers gegen Bewegungsänderungen. Sie ist unabhängig vom Ort und vom Bewegungszustand. Damit ist sie auch ein geeignetes Maß für die Stoffmenge. Das übliche Symbol ist  $m$  und die SI-Einheit ist 1 kg. Man unterscheidet manchmal zwischen der trägen Masse (siehe oben) und der schweren Masse, welche ein Maß für die Schwerkraft ist. Experimentell findet man keinen Unterschied zwischen schwerer und träger Masse und die Relativitätstheorie zeigt, dass sie sich nicht unterscheiden.

**Impuls**  $\vec{p}$  ist ein Maß für die Bewegung. In der klassischen Mechanik ist er gegeben durch das Produkt aus Geschwindigkeit und Masse,  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Er ist somit eine vektorielle Größe parallel zur Geschwindigkeit. Seine Einheit ist  $\text{m kg s}^{-1}$ .

**Kraft**  $\vec{F}$  ist ein Maß für die Fähigkeit, eine Bewegungsänderung zu erzeugen. SI-Einheit:  $\text{N} = \text{m kg s}^{-2}$ .

Zwei Experimente sollen das Konzept der Masse veranschaulichen. Im ersten Experiment ist an einer Masse oben und unten jeweils eine gleich starke Schnur befestigt. Zieht man an der unteren Schnur langsam, so reisst die obere Schnur, da hier die Gewichtskraft des Masse zusätzlich zur Zugkraft wirkt. Zieht man schnell, so reisst die untere Schnur, da die Trägheit der Masse verhindert, dass die Zugkraft auf die obere Schnur übertragen wird.

Die Trägheit der Masse kann auch dazu führen, dass ein Gegenstand in Ruhe bleibt, wenn die Kraft dar-



auf nur für eine kurze Zeit wirkt. In diesem Experiment wird ein Besenstiel auf 2 Trinkgläsern gelagert. Schlägt man langsam auf den Stiel, so wird der Stoß auf die Gläser übertragen und sie zerspringen. Schlägt man jedoch schnell genug darauf, so zerbricht der Besenstiel, da er nicht genug Zeit hat, den Stoß auf die Gläser an den Enden zu übertragen.

### 2.2.2 Newton'sche Axiome

Die Grundlage für die hier behandelte Mechanik wurde im Wesentlichen von Newton<sup>1</sup> gelegt. Seine Publikation der mathematischen Grundlagen der Physik markierte den Übergang von der peripatetischen Dynamik, welche auf die griechischen Philosophen zurückgeht, zur Newton'schen Dynamik, welche heute als klassische Mechanik bezeichnet wird. Ihre Grundlage sind die drei Newton'schen Axiome:

**Trägheitsgesetz:** Ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, behält seine Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag bei. Mathematisch:  $\vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ .

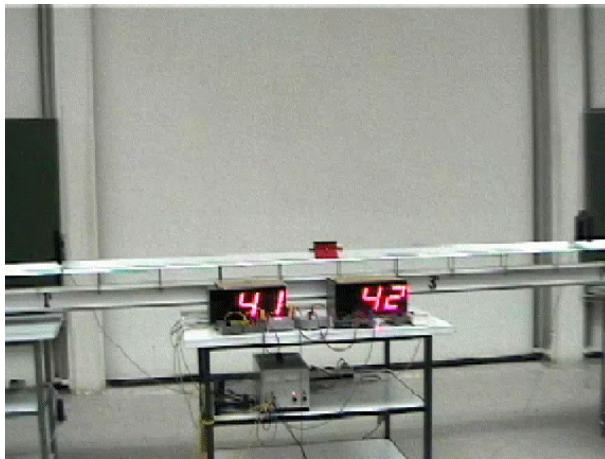


Abbildung 2.18: Experimentelle Verifikation von Newton's Axiomen: Bewegung auf einer Luftkissenschiene.

Die Bedingung, die in diesem Axiom enthalten ist, ist in der Praxis natürlich nur sehr schwer zu realisieren. Man kann sie in einem Demonstrationsexperiment näherungsweise verwirklichen, indem man

<sup>1</sup>Isaac Newton, 1642 – 1727

einen Körper auf einem Luftkissen laufen lässt und so Reibungskräfte sehr gering hält. An zwei Stellen dieser Schiene wird jeweils gemessen wie lange der Körper die Fotozelle verdunkelt, wie lange er also braucht um eine Strecke zurückzulegen, die seiner eigenen Länge entspricht. Wir erwarten eine Zeit  $t = \ell/v$ , wobei  $\ell$  die Länge des Körpers darstellt. Die gemessene Zeit ist somit indirekt proportional zur Geschwindigkeit, eine Änderung der Geschwindigkeit erscheint als eine Änderung der Zeit. Das Experiment zeigt, dass die gemessenen Zeiten in etwa konstant sind.

Das zweite Newton'sche Axiom ist das

**Aktionsgesetz** = Grundgesetz der Mechanik: Die zeitliche Änderung des Impulses  $p = mv$  ist gleich der resultierenden Kraft  $F$ :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Dieses Axiom kann auch als Definition einer Kraft betrachtet werden.

Im Experiment von Abb. 2.18 wirkt die Kraft die Körper am Umkehrpunkt; dies geschieht durch zwei Federn, welche am Wagen, resp. an der Schiene befestigt sind.

Das dritte Newton'sche Axiom ist das

**Wechselwirkungsgesetz** (actio = reactio): Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft  $F_{12}$  so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12},$$

d.h. mit gleichen Betrag und umgekehrter Richtung. Kräfte treten somit immer paarweise auf.

Dieses Prinzip kann in einem einfachen Experiment verifiziert werden. Dabei werden nicht direkt die Kräfte gemessen, sondern das Integral der Kräfte. Aus

$$F = \frac{dp}{dt}$$

folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \Delta p = p(t_2) - p(t_1),$$

d.h. die gesamte Wirkung der zeitabhängigen Kraft  $F$  ist eine Impulsänderung  $\Delta p$ . Sind die beiden Kräfte zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzt so sind auch die Impulsänderungen entgegengesetzt.

Dies kann sehr schön an Wagen auf einer Luftkissenschiene gezeigt werden, z. B. indem man die beiden Wagen zunächst in Ruhe starten, wobei eine Feder zwischen ihnen komprimiert ist, die eine abstoßende Kraft erzeugt. Dadurch werden sie in entgegengesetzte Richtungen beschleunigt. Sind beide gleich schwer so erhalten sie auch die gleiche (entgegengerichtete) Geschwindigkeit, wie die Messung durch die beiden Lichtschranken ergibt. Wird die Masse des einen Wagens verdoppelt, so bewegt sich dieser langsamer; seine Geschwindigkeit ist nur halb so groß wie diejenige des leichteren Wagens, und damit haben beide den gleichen Impuls,

$$m_2 v_2 = 2m_1 \frac{v_1}{2} = m_1 v_1.$$

### 2.2.3 Kraft und Beschleunigung

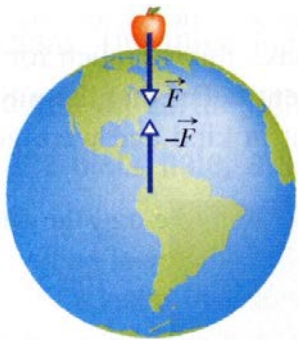


Abbildung 2.19: Newton's 3. Axiom: der Apfel erfährt die gleiche Kraft wie die Erde.

Gemäß dem 3. Newton'schen Axiom ist die Kraft, welche ein Apfel auf die Erde ausübt, gleich groß wie die Kraft, welche die Erde auf den Apfel ausübt ( $\rightarrow$  Abb. 2.19). Wenn der Apfel zur Erde fällt muss demnach auch die Erde in Richtung auf den Apfel fallen. Weil gemäß dem zweiten Axiom die Kraft eine Impulsänderung erzeugt,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

ist jedoch bei gegebener Kraft die Geschwindigkeitsänderung indirekt proportional zur Masse,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Wegen der Größe der Erdmasse ist deshalb die Beschleunigung sehr gering.

Ein analoges Beispiel ist das eines Läufers, der zu einem Spurt startet. Dafür beschleunigt er mit  $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ . Seine Masse sei  $m = 100 \text{ kg}$ . Er benötigt somit eine Kraft von  $F = am = 50 \text{ kg s}^{-2} = 50 \text{ N}$ . Die gleiche Kraft wirkt in entgegengesetzter Richtung auf die Erde. Diese wird deshalb ebenfalls beschleunigt, in entgegengesetzter Richtung, mit

$$a_{\text{Erde}} = \frac{50 \text{ N}}{m_{\text{Erde}}} = \frac{50 \text{ N}}{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}} = 8,3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Auf Grund der hohen Masse ist somit die Beschleunigung der Erde sehr gering.

### 2.2.4 Zusammenfassung und Gültigkeit

- **Trägheitsgesetz** :  $v = \text{const.}$   
ohne äußere Kraft
- **Aktionsgesetz** :  $dp/dt = F$
- **Actio = Reactio** :  $F_{12} = -F_{21}$

Voraussetzungen:

- Inertialsystem (d.h. nicht beschleunigt)
- Kleine Geschwindigkeiten,  $v \ll c$



Isaac Newton,  
1642 – 1727

Abbildung 2.20: Newton und seine Axiome.

Diese drei Grundgesetze, zusammengefasst in Abb. 2.20, sind die wichtigsten Grundlagen für die Dynamik. Ihre Einführung führte zu einer radikalen Vereinfachung der Physik und Astronomie.

Die Gültigkeit der Newton'schen Axiome definiert den Bereich der klassischen Mechanik:

- Die Zeit ist absolut und unveränderlich und hängt nicht von der Bewegung und dem Ort ab.
- Es gibt einen “absoluten Raum”, d.h. ein absolut ruhendes System, in dem alle Bewegungsabläufe stattfinden.
- Die Eigenschaft “Masse” eines Körpers geht nie verloren oder entsteht aus dem Nichts. “Masse” ist unabhängig vom Bewegungszustand und bleibt erhalten.

Der experimentelle Befund ist, dass diese drei Axiome gelten, sofern folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Bezugssystem ist nicht beschleunigt; Bezugssysteme, in denen die drei Axiome gelten, werden als Inertialsysteme bezeichnet.
- Die (relativen) Geschwindigkeiten der Körper sind klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit (Relativitätstheorie).

### 2.2.5 Masse

Das 2. Newton’sche Axiom kann auch als Definition der Masse betrachtet werden: Die träge Masse  $m_t$  stellt den Widerstand eines Körpers gegen eine Bewegungsänderung dar:

$$\vec{F} = m_t \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Die heute noch gültige Einheit der Masse ist gegeben durch das Ur-Kilogramm, einen Platin-Iridium Zylinder, welcher in Paris aufbewahrt wird. Kopien davon existieren in verschiedenen Ländern, unter anderem bei der PTB in Braunschweig.

Eines der Probleme mit dieser Definition des Kilogramms liegt darin, dass es nicht perfekt stabil ist. Abb. 2.21 zeigt, wie sich die Masse von unterschiedlichen Kopien des Urkilogramms als Funktion der Zeit ändert. Es ist davon auszugehen, dass das Urkilogramm selber ähnlichen Änderungen unterliegt.

Um solche Probleme zu vermeiden, hat man inzwischen die meisten Grundeinheiten so definiert, dass sie Funktionen von Naturkonstanten sind, welche

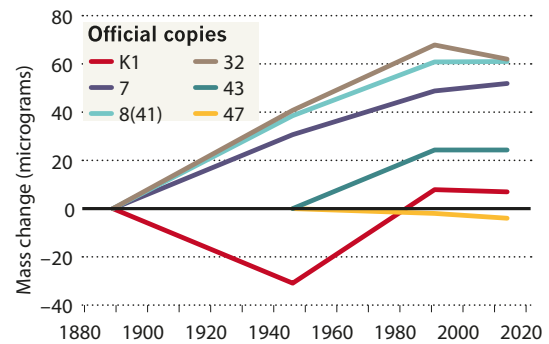


Abbildung 2.21: Variation der gemessenen Masse von unterschiedlichen Kopien des Ur-Kilogramms.

überall gemessen werden können. In nächster Zeit soll dies auch bei der Masseneinheit (dem kg) geschehen. Die vorgeschlagene Neudefinition der SI-Einheit lautet

Ein Kilogramm ist die Planck’sche Konstante, dividiert durch  $6,626070040 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

Mit dieser Definition kann überall ein Vergleich durchgeführt werden. Das dafür notwendige Instrument wird als Watt-Waage bezeichnet.

Die Masse spielt nicht nur beim 2. Newton’schen Axiom eine wichtige Rolle, sie ist auch die relevante Größe bei der Schwerkraft. Die Anziehung zwischen zwei Massen  $M$  und  $m_s$  beträgt

$$\vec{F} = -G \frac{M m_s}{r^3} \vec{r}, \quad (2.2)$$

mit der Gravitationskonstante

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}.$$

Wegen der geringen Stärke der Gravitationswechselwirkung ist eine entsprechende Messung sehr aufwändig und bedarf guter Planung um Fehler zu vermeiden. Die Masse  $m_s$  in Gleichung (2.2) wird als schwere Masse bezeichnet.

### 2.2.6 Schwere und träge Masse

In der klassischen Physik sind die schwere und die träge Masse zunächst voneinander unabhängige

| Experimentator       | Jahr | Methode                  | ( $10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ) |
|----------------------|------|--------------------------|---|
| Cavendish            | 1798 | Torsionswaage, Ablenkung | 6,754   |
| Poynting             | 1891 | Gewöhnliche Waage        | 6,698   |
| Boys                 | 1895 | Torsionswaage, Ablenkung | 6,658   |
| von Eötvös           | 1896 | Torsionswaage, Ablenkung | 6,65  |
| Heyl                 | 1930 | Torsionswaage, Periode   |   |
|                      |      | Gold                     | 6,678   |
|                      |      | Platin                   | 6,664   |
|                      |      | Glas                     | 6,674   |
| Zahradniček          | 1933 | Torsionswaage, Resonanz  | 6,659   |
| Heyl und Chrzanowski | 1942 | Torsionswaage, Periode   | 6,673   |
| Luther und Towler    | 1982 | Torsionswaage, Periode   | 6,6726  |

Abbildung 2.22: Gemessene Werte der Gravitationskonstanten  $G$ .

Größen. Fällt ein Körper im Schwerfeld der Erde, so lautet die Bewegungsgleichung

$$F_G = m_s g = \frac{dp}{dt} = m_t \frac{dv}{dt}.$$

Somit taucht die schwere Masse  $m_s$  wie auch die träge Masse  $m_t$  in der Gleichung auf. Berechnet man die Beschleunigung

$$a = \frac{dv}{dt} = g \frac{m_s}{m_t}, \quad (2.3)$$

so ist diese proportional zum Verhältnis von schwerer zu träger Masse. In den meisten Fällen gibt es keinen Grund, zwischen schwerer und träger Masse zu unterscheiden, man setzt deshalb  $m_s = m_t = m$ .

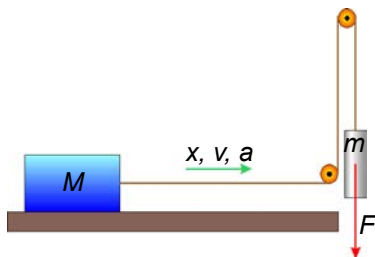


Abbildung 2.23: Atwood'sche Fallmaschine.

Es gibt aber auch Prozesse, bei denen die schwere und die träge Masse unabhängig verändert werden können. Ein Beispiel dafür ist die Atwood'sche Fallmaschine, welche 1784 von George Atwood entwickelt wurde, um die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu untersuchen. Mit ihr kann man mit einfachen Mitteln statt der Fallbeschleunigung eine beliebig verringerte Beschleunigung erhalten.

In der Version von Abb. 2.23 besteht sie aus einer Masse  $M$ , welche horizontal bewegt wird. Eine weitere Masse  $m$  wird vertikal bewegt. Diese hängt im Schwerfeld der Erde und unterliegt somit der Gravitation. Beschleunigt man das System, so muss die Gesamtmasse  $M + m$  beschleunigt werden; zur Gewichtskraft trägt jedoch nur die Masse  $m$  bei. Die Bewegungsgleichung ist deshalb

$$F = (M + m)a = (M + m)\frac{d^2x}{dt^2} = mg.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{M + m}g.$$

Die Beschleunigung ist somit um das Verhältnis aus schwerer zu träger Masse skaliert.

Integration liefert für  $x(0) = 0$ ,  $dx/dt(0) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m}{M + m}gt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{M + m}gt^2.$$

Im Experiment wird die Zeit gemessen, welche der Schlitten benötigt, um eine Distanz von  $x = 2 \text{ m}$  zurückzulegen. Theoretisch sollte dies

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2x}{g} \frac{M + m}{m}}$$

| M/g | m/g | (M+m)<br>g | a/m s <sup>-2</sup><br>berechnet | t/s<br>berechnet | t/s<br>gemessen |
|-----|-----|------------|----------------------------------|------------------|-----------------|
| 218 | 20  | 238        | 0,824                            | 2,203            | 2,24            |
|     | 40  | 258        | 1,521                            | 1,622            | 1,63            |
| 436 | 40  | 476        | 0,824                            | 2,203            | 2,21            |
|     | 50  | 516        | 1,521                            | 1,622            | 1,62            |

Tabelle 2.1: Resultate eines Experiments mit der Atwood'schen Fallmaschine.

Tabelle 2.1 zeigt die Resultate eines entsprechenden Experiments.

In diesem Experiment tragen zwei Körper zur trägen Masse  $m_t$  bei, aber nur einer zur schweren Masse  $m_s$ . Betrachtet man jedoch einzelne Körper, so findet man experimentell, dass seine schwere und träge Masse immer proportional zueinander sind,  $m_s \propto m_t$ .

Es ist deshalb praktisch, die beiden Massen gleich zu setzen,  $m_s = m_t = m$ . In Gleichung (2.3) kann die Masse deshalb eliminiert werden. Dieses sogenannte Äquivalenzprinzip wird im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu einem Axiom.

## 2.3 Kräfte in der Dynamik

### 2.3.1 Kräfte und Felder

Kräfte sind aus der Statik bekannt, welche im Wesentlichen auf dem Gleichgewicht der Kräfte beruht. In der Dynamik sind die Kräfte die Ursache für Bewegungsänderungen. Gemäß dem Newton'schen Axiom können Kräfte über die von ihnen erzeugte Impulsänderung beschrieben werden:

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Damit ist die entsprechende Einheit

$$[F] = \frac{\text{mkg}}{\text{s}^2} = \text{N} = \text{Newton}.$$

Die Schwerkraft, die z.B. im Schwerfeld der Erde auf einen Körper wirkt, ist gemäß (2.2) proportional zur Masse des Körpers. Die resultierende Beschleunigung ist

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{1}{m} mg = g.$$

Hier ist  $g$  die Erdbeschleunigung

$$g = \frac{Gm_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2}.$$

Damit ist die induzierte Impulsänderung proportional zur Masse, während die Beschleunigung unabhängig von der Masse ist. Dieser Effekt wird im Allgemeinen davon überdeckt, dass unterschiedliche Luftreibung vorliegt, kann aber im Vakuum gezeigt werden. In Abb. 2.24 werden ein Apfel und eine Feder im Vakuum fallen gelassen. Die einzelnen Aufnahmen zu unterschiedlichen Zeiten zeigen, dass sie gleich schnell fallen.



Abbildung 2.24: Freier Fall eines Apfels und einer Feder im Vakuum.

In der Gravitation wirkt offenbar eine Kraft zwischen zwei räumlich getrennten Objekten. Dies wurde lange als unplausibel betrachtet, so z.B. Newton in einem Brief an Bentley 1692. Man versuchte dies durch das Konzept des Feldes zu überbrücken. Dieses Feld wird von einer Quelle erzeugt und wirkt auf alle Körper, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen und sich in dem Feld aufhalten. Beispiele sind elektrische Felder, welche von elektrischen Ladungen erzeugt werden und auf elektrische Ladungen wirken, oder Gravitationsfelder, welche von Masse-behafteten Körpern erzeugt werden und auf massive Körper wirken. Beispiel: Die Gleichung (2.2) kann man so interpretieren, dass die Masse  $M$  ein Gravitationsfeld

$$\vec{E}_G = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

erzeugt. Das Feld ist somit unabhängig von der Masse, auf die es wirkt und stellt eine Verallgemeinerung der Kraft dar. Bringt man die Masse  $m$  in dieses Feld, so wirkt darauf eine Kraft

$$\vec{F}_G = \vec{E}_G m = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}.$$



### 2.3.2 Elementare und phänomenologische Kräfte

Man unterscheidet zwischen elementaren Kräften, welche durch eine kleine Zahl von physikalischen Grundgesetzen beschrieben werden, und phänomenologischen Kräften, welche zu Vereinfachung von komplizierten Zusammenhängen eingeführt werden.

| Wechselwirkung     | Trägerteilchen | Beispiel  |
|--------------------|----------------|---|
| elektromagnetische | Photon         |  |
| starke             | Gluon          |  |
| schwache           | W, Z           |  |
| Gravitation        | Graviton       |  |

Abbildung 2.25: Die vier fundamentalen Wechselwirkungen.

In der Natur kommen 4 elementare Wechselwirkungen vor: die elektromagnetische (wobei im Rahmen dieser Vorlesung hier elektrische und magnetische Kräfte meist getrennt behandelt werden), die starke, die schwache Kernkraft und die Gravitations-Wechselwirkung ( $\rightarrow$  Abb. 2.25). Für den Alltag sind nur die elektrischen und magnetischen Kräfte, sowie die Schwerkraft relevant. Elektrizität und Magnetismus werden im Kapitel 4 behandelt.

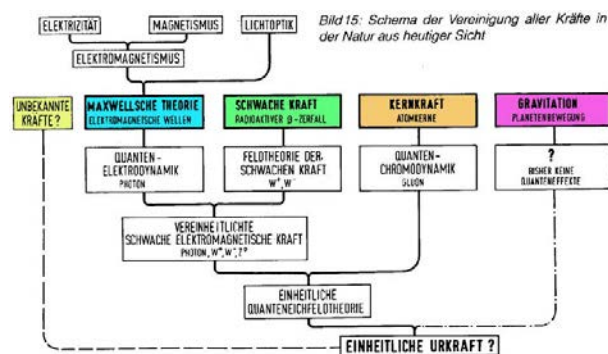


Abbildung 2.26: Vereinheitlichte Beschreibungen der fundamentalen Wechselwirkungen.

Zu den größten Erfolgen der physikalischen Forschung des letzten Jahrhunderts gehört die erfolgreiche Vereinheitlichung der Beschreibung dieser Wechselwirkungen. Abb. 2.26 fasst die entsprechenden Stufen zusammen.

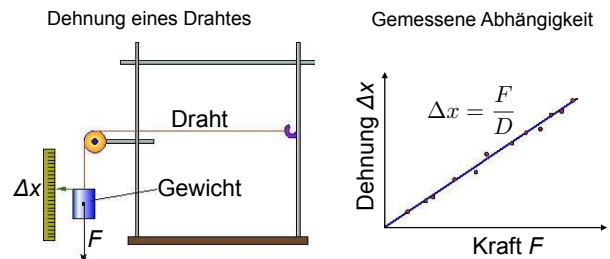


Abbildung 2.27: Phänomenologische Kraft einer Feder.

Darüber hinaus verwendet man jedoch auch sogenannte phänomenologische Wechselwirkungen, wie z.B. die Kraft einer Feder, welche grundsätzlich auf die fundamentalen Wechselwirkungen zurückgeführt werden kann. Häufig ist diese Rückführung jedoch sehr kompliziert und aufwändig, so dass man sich mit einer phänomenologischen Beschreibung begnügt. Dazu gehören z.B. elastische Kräfte, wie bei einer Feder. Wie in Abb. 2.27 gezeigt, findet man über einen gewissen Bereich oft eine lineare Beziehung,

$$\Delta x = \frac{F}{D},$$

mit der Federkonstanten  $D$ .

### 2.3.3 Reibungskräfte

Eine weitere Gruppe von phänomenologischen Kräften sind Reibungskräfte. Diese findet man immer dann, wenn Körper sich berühren und sich relativ zueinander parallel zur Kontaktfläche bewegen. Die Kräfte wirken entgegen der Bewegungsrichtung, d.h. sie hemmen die Bewegung. Reibung kann auf unterschiedliche Weise reduziert werden, z.B. durch die Verwendung einer Luftkissenschiene.

Man unterscheidet zwischen Gleitreibung und Haftreibung. Haftreibung führt dazu, dass ein Körper sich nicht bewegt, wenn die daran angreifende Kraft

geringer ist als die Haftreibung. Gleitreibung entsteht, wenn ein Körper sich gegenüber einer Unterlage oder einem Medium bewegt. Sie ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und hängt von der relativen Geschwindigkeit zwischen Körper und Umgebung ab. Man unterscheidet

**Äußere Reibung/Festkörperreibung.** Bei Festkörpern, die sich auf einer festen Unterlage bewegen. Hier ist die Reibungskraft  $F_R$  (in gewisser Näherung) proportional zur Normalkraft  $F_N$ , mit der der Körper auf die Unterlage drückt:

$$F_R = \mu F_N.$$

Die Proportionalitätskonstante  $\mu$  wird als Reibungszahl bezeichnet; sie ist unabhängig von der (makroskopischen) Kontaktfläche und von der Geometrie. Man unterscheidet zwischen Gleitreibung und Haftreibung, wobei die erstere sich auf bewegte Körper bezieht, die zweite auf ruhende. Typische Reibungskoeffizienten liegen im Bereich von 0.1 bis 0.5, wobei Extremwerte deutlich kleiner, aber auch größer als 1 werden können.

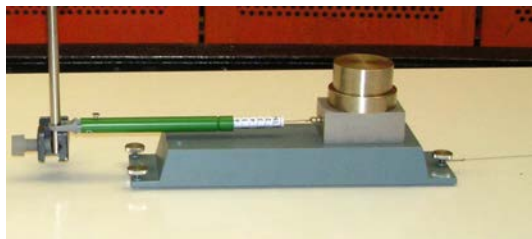


Abbildung 2.28: Messung des Reibungswiderstandes mit Hilfe eines Federkraftmessers.

Abb. 2.28 zeigt ein Experiment, bei dem man die Stärke der Reibung über eine Federwaage misst. Man findet, dass die Haftreibung größer ist als die Gleitreibung und dass die Gleitreibung mit dem Gewicht des Körpers zunimmt.

Die Haftreibung kann man messen, indem man einen Körper auf eine geeignete Unterlage stellt, deren Neigung variiert werden kann ( $\rightarrow$  Abb. 2.29). Bei der Neigung  $\theta$ , bei der der Körper zu rutschen beginnt, halten sich die Reibungskraft  $F_R = \mu_s N$  mit dem Reibungskoeffizienten  $\mu_s$  und der Normalkraft

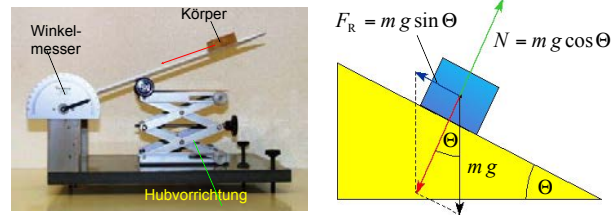


Abbildung 2.29: Haftreibung auf einer schiefen Ebene.

$N = mg \cos \theta$  die Waage. Somit ist

$$\mu_s = \frac{F_R}{N} = \frac{mg \sin \theta}{mg \cos \theta} = \tan \theta.$$

Somit kann der Reibungskoeffizient als Tangens des Neigungswinkels bestimmt werden.

Gleitreibung    Haftreibung

| Flächen                              | $\mu_G$   | $\mu_s$               |
|--------------------------------------|-----------|-----------------------|
| Glas auf Glas                        | 0.4       | 0.9 – 1               |
| Glas auf Metall                      | 0.2-0.3   | 0.5 – 0.7             |
| Metall auf Metall                    |           | 0.3 – 1               |
| Stahl auf Stahl                      | 0.6       | 0.7                   |
| Stahl auf Stahl<br>Mit Öl dazwischen | 0.03-0.11 | 0.05-0.13             |
| Teflon auf Metall                    | 0.04      | 0.04                  |
| Gelenk mit Gelenk-<br>flüssigkeit    |           | 0.003<br>sehr klein ! |
| Gummi auf Beton<br>(naß)             | 0.25      | 0.3                   |
| Gummi auf Beton<br>(trocken)         | 0.8       | 1 – 4<br>z.B. Reifen  |

Tabelle 2.2: Heft- und Gleitreibungskoeffizienten für unterschiedliche Materialien.

Tabelle 2.2 zeigt Haft- und Gleitreibungskoeffizienten für unterschiedliche Paare von Materialien.

### 2.3.4 Dynamik mit Reibung

Gleitet ein Körper auf einer schiefen Ebene mit Neigung  $\alpha$  ( $\rightarrow$  Abb. 2.31), so hat die Schwerkraft eine Komponente

$$F = mg \sin \alpha$$

entlang der Bewegungsrichtung, welche den Körper beschleunigt. Ohne Berücksichtigung der Reibung

bewegt sich ein zunächst ruhender Körper mit der Geschwindigkeit

$$v = at = g \sin \alpha t. \quad (2.4)$$

Den zurückgelegten Weg erhält man durch Integration:

$$s = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

Berücksichtigt man auch die Reibung, so wirkt zusätzlich eine bremsende Kraft  $F_r$ , welche in bestimmten Fällen näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit ist,

$$F_r = -bv.$$

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung ein,

$$a = g \sin \alpha - \frac{b}{m} v$$

und integriert, dann erhält man für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{mg \sin \alpha}{b} \left( 1 - e^{-bt/m} \right).$$

Für kurze Zeiten,  $t \ll m/b$ , entspricht das dem reibungsfreien Fall (2.4). Für lange Zeiten nähert sich die Geschwindigkeit dem Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_\infty = \frac{mg \sin \alpha}{b}.$$

Dieser Grenzwert hängt offenbar von der Masse des Körpers ab.

Neben dieser äußeren Reibung ist auch die "innere Reibung" in Flüssigkeiten und Gasen wichtig. Diese wird in Kap. 2.11.6 diskutiert.

### 2.3.5 Kräfte als Vektoren

Kräfte sind Vektoren und können vektoriell addiert werden:

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

oder allgemein

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i.$$

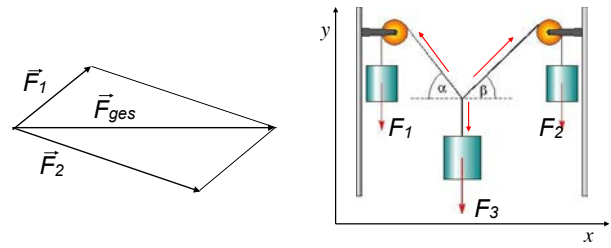


Abbildung 2.30: Vektorielle Addition von Kräften.

Im Gleichgewicht verschwindet die resultierende Kraft,  $\vec{F}_{ges} = 0$ .

Im Beispiel von Abb. 2.30 rechts sind die Kräfte, welche am Knoten in der Mitte angreifen, in Komponentenschreibweise

$$\vec{F}_1 = F_1 \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = F_2 \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im Fall von Abb. 2.30 rechts können aus der Gleichgewichtsbedingung die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  berechnet werden. Für die horizontale und die vertikale Komponente muss jeweils die Summe der Kräfte verschwinden:

$$\begin{aligned} F_1 \cos \alpha &= F_2 \cos \beta \\ F_3 &= F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Aus diesen 2 Gleichungen können  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt werden.

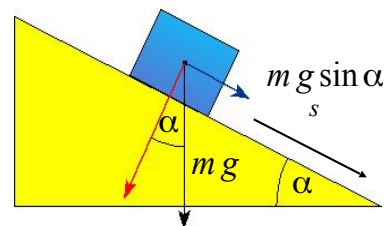


Abbildung 2.31: Gleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene.

Umgekehrt können Kräfte in Komponenten zerlegt werden. Für den Fall eines Wagens auf einer schiefen Ebene ( $\rightarrow$  Abb. 2.31) kann die Gewichtskraft

$\vec{F}_g = m\vec{g}$  zerlegt werden in die Normalkraft  $\vec{F}_1$ , welche den Wagen auf die Fahrbahn drückt, und die Hang-Abtriebskraft  $\vec{F}_2$ , welche die Dynamik bewirkt. Ihre Beträge sind

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= mg \cos \alpha \\ |\vec{F}_2| &= mg \sin \alpha. \end{aligned}$$

### 2.3.6 Raketen



Abbildung 2.32: Rakete beim Start.

Raketen ( $\rightarrow$  Abb. 2.32) bewegen sich im Weltraum und können beschleunigen, ohne dass äußere Kräfte auf sie wirken. Wie ist dies mit dem Impulssatz vereinbar?

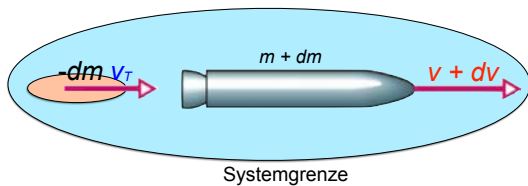


Abbildung 2.33: Modell einer Rakete.

Raketen erzeugen Schub indem sie einen Treibstoff mit möglichst hoher Geschwindigkeit nach hinten ausstoßen. Die Impulserhaltung gilt für das Gesamtsystem Rakete plus Treibstoff (Vorrat in der Rakete plus ausgestoßener Teil). Der Treibstoff wird nach hinten beschleunigt, mit einer Kraft, welche gemäß dem dritten Newton'schen Axiom gleich stark die Rakete nach vorn beschleunigt. Dadurch ändert sich sowohl die Masse wie auch die Geschwindigkeit der

Rakete: im Zeitintervall  $dt$  ändert sich die Masse  $m$  der Rakete um  $dm$  (mit  $dm < 0$ ) und die Geschwindigkeit  $v$  um  $dv$  ( $> 0$ ).

Man betrachtet ein Gesamtsystems, bestehend aus Rakete plus ausgestoßener Treibstoff ( $\rightarrow$  Abb. 2.33) und vernachlässigt zunächst die Gravitation. Dann gilt für dieses System Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \\ &= [(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) - dm\vec{v}_T] - m\vec{v} \\ &= md\vec{v} - dm(\vec{v}_T - (\vec{v}+d\vec{v})) = 0. \end{aligned}$$

Hier stellt  $\vec{v}_T$  die Geschwindigkeit des Treibstoffes dar. Man definiert die Geschwindigkeit  $\vec{v}_{rel}$  des Treibstoffes relativ zur Rakete als

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_T - (\vec{v} + d\vec{v})$$

und erhalten damit die Raketengleichung

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - dm \vec{v}_{rel} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet für Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$ , konstante Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffes und konstante Rate des Treibstoffausstoßes

$$\vec{v}_{end} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rel} \ln \frac{m_0}{m_{end}},$$

wobei  $m_0$  die Anfangsmasse bezeichnet und  $m_{end}$  die verbleibende Masse bei Brennschluss.

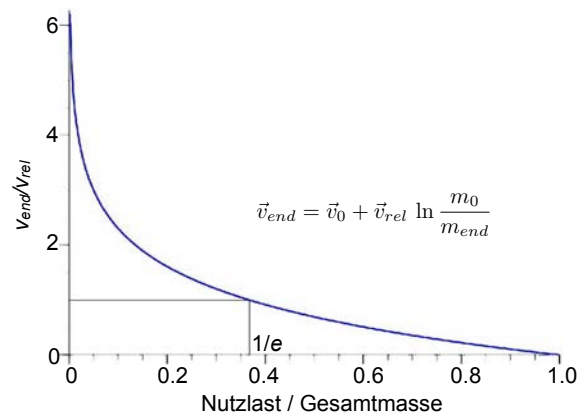


Abbildung 2.34: Endgeschwindigkeit der Rakete als Funktion der Nutzlast.

Man kann somit beliebig hohe Geschwindigkeiten erreichen: Allerdings nimmt das verbleibende Gewicht (d.h. die Nutzlast) exponentiell mit der Geschwindigkeit ab, wie in Abb. 2.34 gezeigt.

In der theoretischen Analyse wurde die Schwerkraft nicht berücksichtigt. Startet die Rakete von der Erde, so muss noch die Schwerebeschleunigung abgezogen werden. Damit wird die resultierende Beschleunigung und Geschwindigkeit deutlich niedriger.



Abbildung 2.35: Modellrakete.

### 2.3.7 Beispiele

Als Beispiel betrachten wir die erste Stufe der Saturn V Rakete des Apollo Programms. Ihre Ausstoßgeschwindigkeit  $v_{rel}$  betrug 2220 m/s, die Startmasse  $m_0 = 2,95 \cdot 10^6$  kg, die Nutzlast 27% davon, und die Brenndauer 130 s. Bei konstantem Massestrom betrug dieser

$$\frac{dm}{dt} = 2,95 \cdot 10^6 \text{ kg} \frac{0,73}{130 \text{ s}} = 16565 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Dies entspricht einem Schub

$$\frac{dm}{dt} v_{rel} = 16565 \cdot 2220 \text{ N} = 36,8 \text{ MN}.$$

Damit war die Anfangsbeschleunigung am Boden

$$\frac{dv}{dt} = -g + \left| \frac{dm}{dt} \right| \frac{v_{rel}}{m_0} = 2,66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Am Ende der Brenndauer ist die Beschleunigung

$$\frac{dv}{dt} = -g + \left| \frac{dm}{dt} \right| \frac{v_{rel}}{m_{end}} = 36,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Endgeschwindigkeit beträgt

$$\begin{aligned} v_{end} &= -gt_B + v_{rel} \ln \frac{m_0}{m_{end}} = -1275 + 2906 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 1,63 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Ein einfaches Modell einer Rakete, wie in Abb. 2.35, zeigt bereits die wichtigsten Merkmale. Diese Modellrakete kann mit Luft oder Wasser als Treibstoff verwendet werden, wobei die Relativgeschwindigkeit in beiden Fällen durch Aufpumpen mit Druckluft erzeugt wird. Nach Öffnen des Ventils wird der

Treibstoff mit der Geschwindigkeit  $v_0$  aus der Rakete gepresst, was den gewünschten Rückstoß erzeugt. Während die Endgeschwindigkeit bei Luft als Treibstoff relativ bescheiden ist, findet man bei Wasser als Treibstoff eine wesentlich höhere Endgeschwindigkeit. Die relative Austrittsgeschwindigkeit ist im Falle von Luft höher, das Massenverhältnis  $m_0/m_{end}$  ist jedoch bei Wasser als Treibstoff erheblich günstiger.

## 2.4 Arbeit, Leistung und Energie

### 2.4.1 Motivation und Definition

Prinzipiell kann man mit den Newton'schen Axiomen die Bewegung von Massenpunkten wie auch Systemen von Massenpunkten beschreiben. In vielen Fällen ist es aber sehr aufwendig, die Bewegungsgleichungen exakt zu lösen. Es ist dann nützlich, andere Methoden zur Verfügung zu haben, um relevante Aussagen machen zu können. Ein wichtiges und sehr leistungsfähiges Hilfsmittel ist das Konzept der Energie.

Als Beispiel betrachten wir eine Eisenbahn, die mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h auf ebener Strecke fährt ( $\rightarrow$  Abb. 2.36). Die Zugkraft der Lokomotive reicht genau um die Reibungskraft zu überwinden. Sie fährt auf einen Hügelkamm zu, der 200 m über der Ebene liegt. Gelingt es der Eisenbahn, diesen Hügel mit konstanter Zugkraft zu überqueren? Die Frage kann mit Hilfe der Newton'schen Axiome diskutiert werden, aber nur wenn der gesamte Streckenverlauf (genauer: die Steigung als





Abbildung 2.36: Ein fahrender Zug besitzt kinetische Energie.

Funktion des Ortes) bekannt ist. Am Ende des Kapitels werden wir zeigen, dass dies nicht nötig ist.

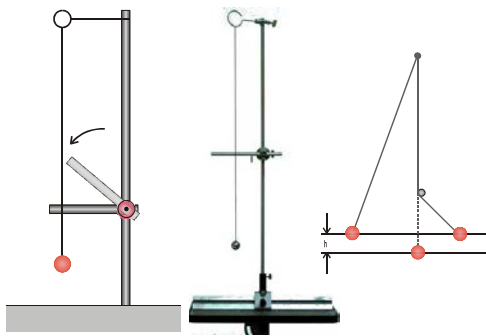


Abbildung 2.37: Das Hemmpendel.

Ein zweites Beispiel kann etwas einfacher im Experiment gezeigt werden: Wir betrachten ein schwingendes Pendel, bei dem wir jeweils einmal pro halbe Periode eine Umlenkung einführen, so dass die Pendellänge verkürzt wird (siehe Abb. 2.37). Frage: wie sieht die Bahn des Pendels jetzt aus?

## 2.4.2 Arbeit

Wir beginnen mit der Definition der Arbeit. Die Arbeit, die an einem System geleistet wird, ist definiert als das Integral der Kraft  $F$ , welche von außen auf das System ausgeübt wird ( $\rightarrow$  Abb. 2.38), über den

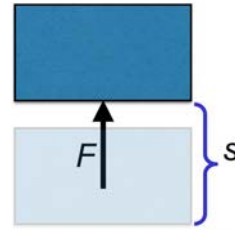


Abbildung 2.38: Definition der Arbeit.

Weg,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \rightarrow W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Die Einheit der Arbeit beträgt demnach <sup>2</sup>

$$[W] = \text{Nm} = \text{J} = \text{Joule} = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}.$$

Wie aus der Definition hervorgeht, trägt nur diejenige Komponente der Kraft zur Arbeit bei, welche parallel zum zurückgelegten Weg wirkt, resp. nur diejenige Komponente des Weges, die parallel zur angelegten Kraft zurückgelegt wird.

Die Kraft, welche hier eingesetzt werden muss, ist die von außen angelegte Kraft. Somit ist die Arbeit positiv definiert wenn gegen den Widerstand des Systems Arbeit verrichtet wird, z.B. wenn ein Körper angehoben wird. Im Falle eines Motors, wo der explodierende Treibstoff eine Kraft erzeugt, wird dem Motor Arbeit entzogen, d.h. die am Motor geleistete Arbeit ist negativ. Dies kann man natürlich auch so betrachten, dass der Motor an seiner Umwelt Arbeit leistet.

Ist die Kraft unabhängig vom Ort, so muss lediglich die Projektion des Weges auf die Kraft integriert werden. Beispiele dafür sind die Schwerkraft (in der Nähe der Erdoberfläche), die Beschleunigungskraft für eine konstante Masse, oder die Arbeit gegen eine Reibungskraft.

Ein typischer Fall ist die Hebung eines Körpers gegen die Gewichtskraft, wie in Abb. 2.39 gezeigt. Hier ist die erforderliche Kraft  $\vec{F} = -\vec{F}_G = mg$ , unabhängig vom Ort. Da Kraft und Wegelement paral-

<sup>2</sup>James Prescott Joule (1818 - 1889).

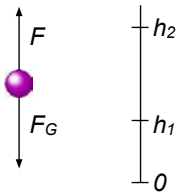


Abbildung 2.39: Hebung eines Körpers gegen die Schwerkraft  $F_G$ .

l sind, reduziert sich das Integral auf

$$W = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg \int_{h_1}^{h_2} ds = mg(h_2 - h_1).$$

Mit der Notation  $h = h_2 - h_1$  für die Höhendifferenz erhält man somit für die zu leistende Arbeit

$$W = mgh. \quad (2.5)$$

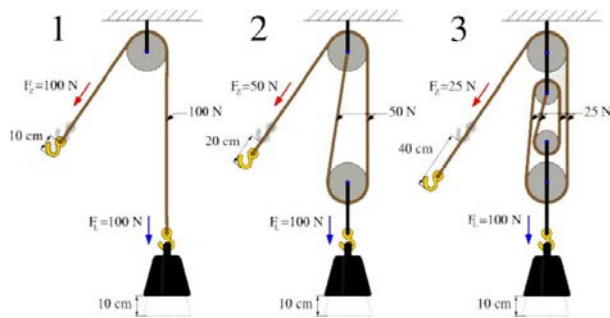


Abbildung 2.40: Unterschiedliche Flaschenzüge.

Die insgesamt geleistete Arbeit hängt somit nur von der Höhendifferenz  $h$  ab. Es ist jedoch möglich, die notwendige Kraft oder den zurückgelegten Weg zu reduzieren, jeweils auf Kosten des anderen Faktors. Abb. 2.40 zeigt unterschiedliche Flaschenzüge, welche jeweils ein Gewicht um 10 cm anheben. Je nach Flaschenzug sind die nötigen Zugkräfte 100, 50 oder 25 N, die zurückgelegten Wege 10, 20 oder 40 cm. Die Arbeit beträgt somit in allen Fällen 10 J.

### 2.4.3 Beispiele mit konstanter Kraft

Ein einfaches Beispiel ist ein Körper, der auf einer schiefen Ebene mit Steigung  $\alpha$  reibungsfrei nach

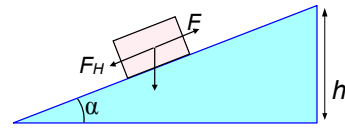


Abbildung 2.41: Schiefe Ebene.

oben geschoben wird (siehe Abb. 2.41). Die Hangabtriebskraft beträgt  $F_H = -mg \sin \alpha$ . Somit ist eine gleich starke Kraft in Bewegungsrichtung notwendig, um den Körper zu transportieren. Für eine gesamte Höhendifferenz  $h$  beträgt die zurückgelegte Wegstrecke  $h/\sin \alpha$ . Somit ist insgesamt eine Arbeit  $W = mgh$  notwendig. Offenbar ist dies unabhängig von der Neigung der Ebene.

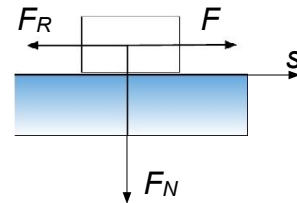


Abbildung 2.42: Verschiebung in der Ebene.

Als nächsten Fall betrachten wir die Arbeit, die benötigt wird, um einen Körper auf einer horizontalen Fläche gegen die Reibungskraft zu bewegen ( $\rightarrow$  Abb. 2.42). Die Reibungskraft beträgt

$$F_R = \mu F_N = \mu gm.$$

Um den Körper über eine Distanz  $s$  zu transportieren beträgt die Arbeit somit  $W = \mu gms$ , sofern der Reibungskoeffizient  $\mu$  konstant ist.

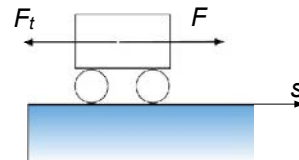


Abbildung 2.43: Reibungsfreie Bewegung.

Das nächste Beispiel, dargestellt in Abb. 2.43, ist ein Körper, der sich reibungsfrei auf ebener Strecke bewegt. Eine äußere Kraft (die gegen die Trägheitskraft wirkt) bewirkt in diesem Fall eine Beschleunigung.

gung. Die Kraft ist  $F = ma$ . Beträgt die Geschwindigkeit des Körpers zu Beginn  $v_0$  und wird er gleichmäßig beschleunigt, so legt er während einer Zeit  $\Delta t$  eine Distanz

$$s = v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 \quad (2.6)$$

zurück, wobei die Geschwindigkeit auf

$$v = v_0 + a \Delta t$$

erhöht wird. Diese Gleichung kann aufgelöst werden nach der Zeit

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Einsetzen in (2.6) ergibt für den Weg

$$\begin{aligned} s &= v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \Delta t^2 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a} = \\ &= \frac{2v_0v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{2a} = + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \end{aligned}$$

Die Arbeit, welche dafür geleistet werden muss, beträgt somit

$$W = Fs = mas = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2). \quad (2.7)$$

Die entspricht gerade der Änderung der kinetischen Energie des Körpers: Zu Beginn beträgt diese

$$\mathcal{E}_{kin,0} = \frac{m}{2} v_0^2$$

und am Ende

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} v^2.$$

#### 2.4.4 Variable Kraft

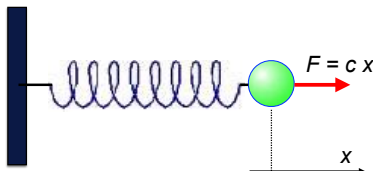


Abbildung 2.44: Federkraft.

Die Kraft kann auch mit dem Weg variieren; in diesem Fall muss die Integration explizit durchgeführt werden. Der einfachste Fall ist wohl das Federgesetz ( $\rightarrow$  Abb. 2.44), wo die Kraft proportional zur Auslenkung  $x$  ist,  $F_f = -cx$ . Dies wird als Hooke'sches Gesetz bezeichnet. Die Kraft, welche von außen angelegt werden muss, ist deshalb  $F = cx$  und die Arbeit beträgt

$$W_{ab} = \int_a^b F dx = c \int_a^b x dx = \frac{c}{2} (b^2 - a^2).$$

In diesem Fall wird die an der Feder geleistete Arbeit in potenzielle Energie der Feder überführt. Die potenzielle Energie einer Feder ist deshalb

$$\mathcal{E}_{pot,F} = \frac{c}{2} x^2. \quad (2.8)$$

In dieser Form wird z.B. in einer mechanischen Uhr Energie gespeichert.

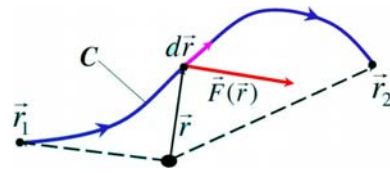


Abbildung 2.45: Arbeit als Wegintegral.

In mehreren Dimensionen sind die Kraft wie auch der Weg vektorielle Größen, wie z.B. in Abb. 2.45. In diesem Fall muss über das Skalarprodukt integriert werden:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Dies bedeutet, dass nur diejenige Komponente der Kraft  $\vec{F}$ , welche in Bewegungsrichtung  $d\vec{r}$  wirkt, zur Arbeit beiträgt. Typische Beispiele sind in Abb. 2.42 und 2.43 gezeigt: nur die Zugkraft trägt bei zur Arbeit, nicht die Gewichtskraft, welche senkrecht dazu wirkt.

#### 2.4.5 Energie

In den meisten hier diskutierten Fällen ist die Arbeit, die am Körper geleistet wurde, unabhängig vom

Weg, den man vom Anfangs- zum Endpunkt genommen hat, also z.B. von der Geschwindigkeit 0 zur Geschwindigkeit  $v$ . Durch die Arbeit, die am Körper geleistet wurde, ist er in eine höhere Lage oder zu einer höheren Geschwindigkeit gebracht worden. Dadurch ist er selbst in die Lage gebracht worden, an anderen Körpern Arbeit zu leisten. Die Größe, welche diese Fähigkeit quantifiziert, ist die mechanische Energie (potenzielle oder kinetische):

Die Energie des Körpers (oder Systems) bezeichnet sein Potenzial, Arbeit zu leisten.

Sie ist eine Größe, die rein durch den Zustand bestimmt ist, unabhängig vom Weg, auf dem der Zustand erreicht wurde.

In der Mechanik unterscheidet man zwei Arten von Energie, die kinetische und die potenzielle Energie:

$$\mathcal{E}_{mech} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{pot}.$$

Die kinetische Energie ist eine Funktion von Geschwindigkeit oder Impuls und Masse des Körpers, die potenzielle Energie ist abhängig vom Ort und von den Kräften, die auf das System wirken. Es können sowohl äußere Kräfte wie auch innere Kräfte beitragen.

Die kinetische Energie entspricht der Arbeit, welche geleistet werden muss, um einen Körper von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit  $v$  zu beschleunigen. Diese beträgt nach Gl. (2.7)

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{m}{2} v^2.$$

Die potenzielle Energie ist z.B. durch die Lage im Gravitationsfeld gegeben. Nach Gl. (2.5) beträgt diese

$$\mathcal{E}_{pot,g} = mgh. \quad (2.9)$$

Für andere Kraftfelder, wie z.B. das elektrische Feld, existieren entsprechende potenzielle Energien, wie z.B. das elektrische Potenzial.

Die Änderung der mechanischen Energie eines Systems ist gleich der am System geleisteten Arbeit,

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = W_{12}.$$

Wenn wir noch einen Nullpunkt für die Energie definieren, können wir somit direkt die Ausdrücke übernehmen, die wir für die Arbeit hergeleitet haben. Die Wahl dieses Nullpunkts ist grundsätzlich willkürlich, aber in vielen Fällen existiert eine “natürliche” Wahl, wie z.B. bei der kinetischen Energie.

Nicht jede Art von Arbeit führt zu einer Änderung der mechanischen Energie des Systems. Das Beispiel aus Abb. 2.42 der Arbeit gegen eine Reibungskraft ist ein typisches Beispiel wo die mechanische Energie nicht geändert wird: der Körper ist immer auf der gleichen Höhe, bei der gleichen Geschwindigkeit. Die aufgewendete Arbeit wird stattdessen in Reibungswärme umgewandelt. Ob eine Kraft, gegen die Arbeit geleistet wird, zu einer entsprechenden Änderung der Energie des Systems führt, wird in Kapitel 2.4.8 diskutiert.

## 2.4.6 Leistung

Eng verwandt mit der Energie ist die Leistung, welche sich durch Differenzierung nach der Zeit ergibt,

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} = \text{Watt}.$$

Die Einheit ist benannt nach James Watt (1736-1819). Handelt es sich um eine mechanische Leistung (Arbeit pro Zeit) und ist die Kraft konstant, so kann die Leistung auch als Kraft mal Geschwindigkeit definiert werden:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Umgekehrt erhält man die geleistete Arbeit aus der Leistung durch Integration über die Zeit:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

Typische Leistungen von Menschen liegen bei länger andauernden Belastungen im Bereich von 100 W, bei trainierten Sportlern bei etwa 300 W. Über kürzere Zeiten können auch Leistungen bis etwa 1 kW abgerufen werden ( $\rightarrow$  Abb. 8.6). Die Einheit “Pferdestärke” (PS) ist als die Dauerleistung eines Pferdes definiert; sie liegt bei 735 W.

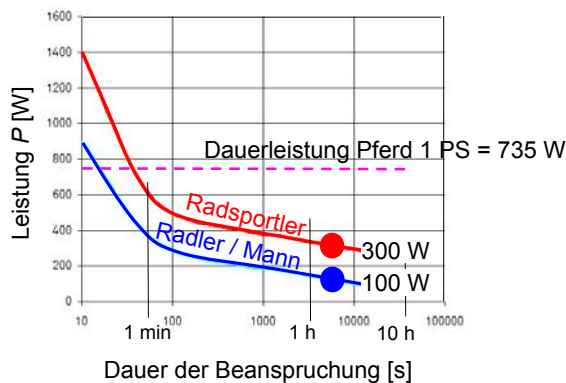


Abbildung 2.46: Leistung als Funktion der Dauer der Beanspruchung.

### 2.4.7 Potenzielle Energie

Potenzielle Energie ist immer mit einer konservativen Kraft verbunden. Nach Gl. (2.8) ist die Arbeit, welche geleistet werden musste, um eine Feder zu spannen, proportional zum Quadrat der Auslenkung. Eine andere Form von potenzieller Energie ist die Lageenergie im Schwerfeld. Nach Gl. (2.9) ist die entsprechende potenzielle Energie proportional zur Höhe,  $\mathcal{E}_{\text{lage}} = mgh$ . Bei potenzieller Energie, die mit einer distanzabhängigen Kraft verbunden ist, wie z.B. der Gravitationsenergie oder der Coulomb-Energie, wählt man den Nullpunkt meist für unendlich getrennte Körper. Die Kraft ist in beiden Fällen proportional zu  $\frac{1}{r^2}$  und die potenzielle Energie, welche durch das Integral über die Kraft gegeben ist, proportional zu  $-\frac{1}{r}$ .

Ein Molekül als eine deformierbare Ansammlung von Atomen besitzt es eine potenzielle Energie als Funktion der Geometrie. In allen Fällen hängt die Energie von räumlichen Koordinaten ab. Trägt man die potenzielle Energie als Funktion des Ortes auf so erhält man eine Kurve, aus der man leicht qualitative (und auch quantitative) Aussagen machen kann über die Bewegung, welche das System durchführen wird. Abb. 2.47 zeigt als Beispiel die potenzielle Energie von zweiatomigen Molekülen als Funktion des Abstandes zwischen den Atomen. In einem eindimensionalen System bewegt sich das System (falls es zu Beginn in Ruhe ist) auf der Potenzialkurve nach unten, wobei potenzielle Energie in ki-

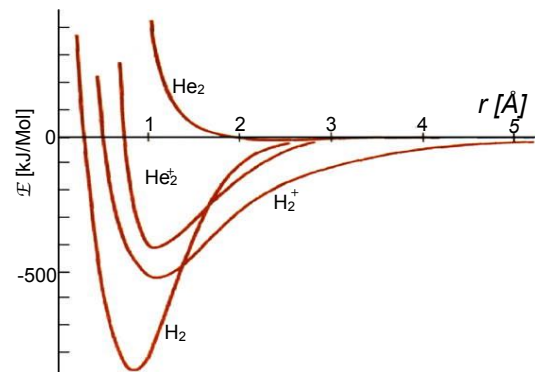


Abbildung 2.47: Potenzielle Energie einfacher 2-atomiger Moleküle als Funktion des atomaren Abstandes.

netische Energie umgewandelt wird, d.h. das System beschleunigt. Indem die dadurch erzeugte kinetische Energie wieder in potenzielle Energie umgewandelt wird kann das System sich auch auf der Potenzialkurve aufwärts bewegen. Das Minimum der Kurve entspricht dem Gleichgewichtsabstand: Hier wirken keine Kräfte auf die Atome.

Wichtig ist bei solchen Betrachtungen, dass man die gesamte Energie des Systems berücksichtigt. Dies soll anhand eines scheinbar paradoxen Experiments gezeigt werden.

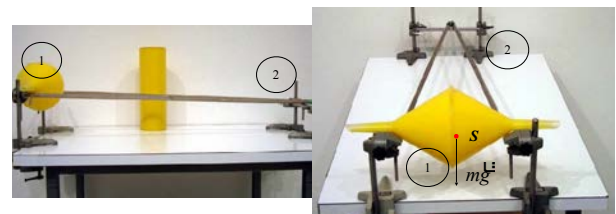


Abbildung 2.48: Bahn für Hohlzylinder und Doppelkegel.

Legt man einen Hohlzylinder auf die in Abb. 2.48 gezeigten Schienen, so rollt er von der höheren zur niedrigeren Seite (1  $\rightarrow$  2). Legt man dagegen einen Doppelkegel auf die Schienen, so rollt er in entgegengesetzter Richtung, scheinbar also aufwärts. Dies liegt an der Anordnung der beiden Schienen: Sie laufen auseinander. Dadurch sinkt der Doppelkegel, sein Schwerpunkt sinkt und das System kann Energie gewinnen.



### 2.4.8 Konservative Kräfte

Die potenzielle Energie wird dem System zugeführt, indem daran Arbeit verrichtet wird. Daraus lässt sich umgekehrt ableiten wie groß die Kraft ist, welche überwunden werden muss, um dem System die entsprechende potenzielle Energie zuzuführen. Die Kraft, welche von außen aufgebracht werden muss beträgt in einer Dimension

$$F = \frac{dW}{ds} = \frac{d\mathcal{E}_{pot}}{ds}.$$

Diese ist im Gleichgewicht entgegengesetzt gleich der Kraft, welche das System auf seine Umgebung ausübt. Wird keine äußere Kraft auf das System angewendet, so bewegt es sich nur unter dem Einfluss der potenziellen Energie. Es wird dann beschleunigt durch eine entgegen-gerichtete Kraft

$$F_P = -\frac{d\mathcal{E}_{pot}}{ds}.$$

Die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, kann somit aus der Ortsabhängigkeit der potenziellen Energie bestimmt werden. In drei Dimensionen gilt entsprechend

$$\vec{F}_P = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_{pot} = -\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)\mathcal{E}_{pot},$$

d.h. die resultierende Kraft zeigt in Richtung des steilsten Abfalls.

Abb. 2.49 zeigt als Beispiel eine Karte mit Höhenkurven und darauf für einige Orte die Richtung des steilsten Gefälles, also die Richtung der resultierenden Kraft. Ein typisches Beispiel für eine konservative Kraft ist die Gravitationskraft

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

für eine Masse  $m$  im Potenzial eines punktförmigen Körpers der Masse  $M$ .  $\vec{r}$  ist der Ortsvektor von  $m$  relativ zu  $M$ . Die entsprechende potenzielle Energie ist

$$U_g(r) = -G\frac{Mm}{r}.$$

Kräfte, die von einem Potenzial abgeleitet werden können, werden als konservative Kräfte bezeichnet.

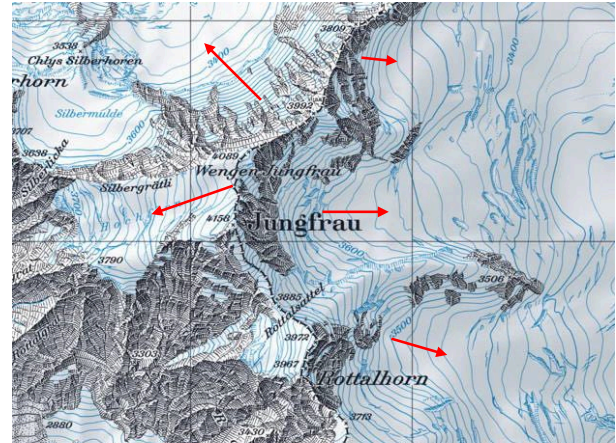


Abbildung 2.49: Richtung des steilsten Abfalls auf einer Landkarte.

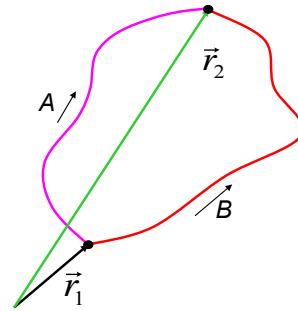


Abbildung 2.50: Zwei unterschiedliche Wege in einem Kraftfeld.

Sie haben die Eigenschaft, dass die Arbeit, welche geleistet werden muss, um von einem Ausgangspunkt  $\vec{r}_1$  zu einem Ziel  $\vec{r}_2$  zu gelangen, nicht davon abhängt, welcher Weg dabei benutzt wird ( $\rightarrow$  Abb. 2.50). Es gilt somit

$$W_a = \int_{\vec{r}_{1,A}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = W_b = \int_{\vec{r}_{1,B}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Somit gilt auch, dass die Arbeit für geschlossene Wege verschwindet,

$$W = \oint \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = 0.$$

Diese Beziehung bietet auch die Möglichkeit aus der Struktur eines Kraftfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  zu erkennen, ob dieses konservativ ist: Man bestimmt die Rotation des Kraftfeldes,  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$ . Verschwindet diese überall, so ist das Kraftfeld konservativ.

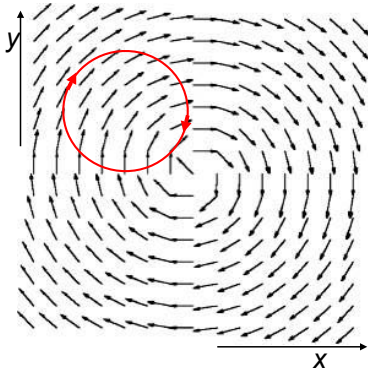


Abbildung 2.51: Kraftfeld mit Wirbel.

Ein typisches Beispiel ist eine Bergtour: kommt man am Ende des Tages an den Ausgangspunkt zurück, so ist die potenzielle Energie die gleiche wie zu Beginn. Die geleistete Arbeit ist demnach nicht in potenzielle Energie umgewandelt worden, sondern in Wärme. Abb. 2.51 zeigt ein Kraftfeld mit einem Wirbel. Eine Fahrradtour (roter Kreis) kann hier in einer Richtung meist Rückenwind nutzen, in der entgegengesetzte Richtung muss man deutlich mehr Kraft einsetzen, um den Luftwiderstand zu überwinden.

### 2.4.9 Gleichgewicht

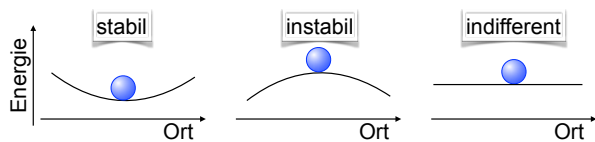


Abbildung 2.52: Unterschiedliche Arten von Gleichgewicht.

Offenbar gibt es auch Situationen, in denen keine Kraft auf den Körper wirkt. Abb. 2.52 zeigt drei unterschiedliche Fälle, bei denen der Gleichgewichts-ort einem Minimum, einem Maximum oder einem ebenen Teil der Potenzialkurve entspricht. Man bezeichnet diese Punkte als stabiles, instabiles oder neutrales (indifferentes) Gleichgewicht. Bei einem instabilen Gleichgewicht führt eine geringe Auslenkung dazu, dass eine Kraft wirkt und das System immer stärker beschleunigt. Ein Beispiel dafür ist ein Bleistift, der auf seiner Spitze steht. Im Fall des sta-

bilen Gleichgewichts führt eine Auslenkung zu einer Kraft, welche das System zurück zum Gleichgewicht treibt (z.B. Pendel), während in einem neutralen Gleichgewicht verschiedene Positionen mit identischer Energie vorhanden sind und eine Auslenkung keine Kraft erzeugt. Typische Beispiele dafür sind Gegenstände auf einem Tisch.

### 2.4.10 Austausch von Energie

Unterschiedliche Energieformen können ineinander umgewandelt werden. Dies geschieht z.B. wenn man einen Körper fallen lässt: dabei wird potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt.

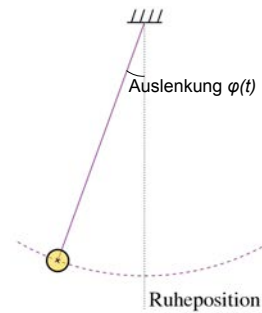


Abbildung 2.53: Fadenpendel.

In einem Pendel wird ebenfalls Energie von potenzieller in kinetische umgewandelt (und umgekehrt). Abb. 2.53 zeigt als Beispiel ein Fadenpendel, welches für kleine Auslenkungen einem mathematischen Pendel entspricht. Wie in Kapitel 5.2 gezeigt wird, verhält sich die Auslenkung eines mathematischen Pendels als Funktion der Zeit ist wie

$$\varphi(t) = A \sin \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

wobei  $\varphi$  den Winkel der Auslenkung darstellt,  $\ell$  die Länge des Pendels und  $A$  die Amplitude der Schwingung. Die potenzielle Energie ist gegeben durch die Höhe,

$$\mathcal{E}_{pot} = mgh = mg\ell \frac{\varphi^2}{2} = \frac{mg\ell}{2} (A \sin \omega t)^2,$$

wobei - wie immer beim mathematischen Pendel - die Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$  verwendet

wurde. Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{kin} &= \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 = \frac{m}{2}\ell^2\omega^2(A \cos \omega t)^2 \\ &= \frac{mg\ell}{2}(A \cos \omega t)^2.\end{aligned}$$

Die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie ist somit

$$\mathcal{E} = mg\frac{\ell}{2}A^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = mg\frac{\ell}{2}A^2,$$

also zeitunabhängig. Es findet lediglich ein Austausch zwischen den beiden Energieformen statt.

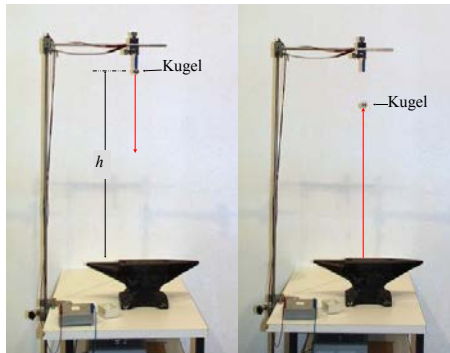


Abbildung 2.54: Kugel springt auf einem Amboss.

Die Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie kann man auch beim Fallenlassen eines Körpers beobachten, wie im Beispiel von Abb. 2.54. Beim Auftreffen auf dem Boden wird die kinetische Energie kurzfristig in elastische Energie umgewandelt, dann wieder in kinetische und schließlich wieder in potenzielle. Die Umwandlungsprozesse sind nie 100% effizient, sondern ein Teil der Energie wird jeweils in Wärme umgewandelt. Deshalb erreicht die Kugel nicht mehr ganz die Ausgangshöhe.

Für kräftefreie Systeme ist die kinetische Energie auch eine Erhaltungsgröße; dies ergibt sich aus den Newton'schen Axiomen: Für  $m = \text{const.}$  kann das erste Newton'sche Axiom mit der Geschwindigkeit multipliziert werden:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{x} &= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = 0.\end{aligned}$$

### 2.4.11 Energieerhaltung

Die obigen Beispiele illustrieren ein allgemeines Prinzip: Energie ist eine Erhaltungsgröße; sie kann weder erzeugt noch vernichtet werden.

In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie  $\mathcal{E}$  erhalten, d.h. die Summe aller beteiligten Energieformen ist eine Konstante.

Wird die Energie eines Systems erhöht, indem daran Arbeit geleistet wird, so muss dazu die Energie eines anderen Systems erniedrigt werden. Sie kann aus einer Form in eine andere überführt werden oder von einem Ort zu einem anderen Ort transportiert werden, die gesamte Energie eines abgeschlossenen Systems bleibt jedoch konstant. Im Rahmen der Mechanik ist die Energie auf potenzielle und kinetische Energie beschränkt, so dass gilt

$$\mathcal{E}_{mech} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{pot} = \text{konst.}$$

Nicht in allen Fällen wird die Arbeit, die am System geleistet wurde, auch in mechanische Energie umgewandelt. Erfolgt die Arbeit gegen eine Reibungskraft, wie z.B. beim Transport eines Körpers auf einer horizontalen Ebene mit konstanter Geschwindigkeit, so bleibt die mechanische Energie des Körpers konstant. In diesem Fall wird die geleistete Arbeit in Wärme umgewandelt.

Es ist nicht möglich, zu "beweisen", dass die Energie eines beliebigen Systems konstant ist. Der Energieerhaltungssatz ist jedoch mit allen bisher gemachten Erfahrungen vereinbar. Er kann außerdem bewiesen werden für den Fall, dass die Naturgesetze zeitlich invariant sind. Dies ist wiederum ein nicht beweisbarer Glaubenssatz, welcher mit allen bisher gemachten Erfahrungen übereinstimmt. Im Falle der oben erwähnten nichtkonservativen Kräfte (z.B. Reibung), bei denen die gesamte Arbeit über einen geschlossenen Pfad nicht verschwindet, wird die geleistete Arbeit in Wärmeenergie umgewandelt. Außerdem sind Energie und Materie äquivalent, d.h. sie können ineinander umgewandelt werden.

Wenn in den Medien von einem "Energieproblem" die Rede ist (siehe z.B. Abb. 2.55), oder sogar von einem "Energemangel" so kann sich dies offenbar



Abbildung 2.55: Gibt es ein "Energieproblem"?

nicht auf die gesamte zur Verfügung stehende Energie beziehen, sondern offenbar nur auf bestimmte Formen von Energie. Da es nicht möglich ist, Energie zu erzeugen, kann das "Energieproblem" auch nicht "gelöst" werden, indem man mehr Energie erzeugt.

Es gibt jedoch unter den unterschiedlichen Formen der Energie solche die nützlicher sind als andere. So können die mechanischen Formen der Energie theoretisch zu 100% in andere Energieformen umgewandelt werden. Bewegt man sich von A (z. B. Uni Dortmund) nach B (z. B. nach Hause) und wieder nach A, so ist offenbar die mechanische Energie des Körpers, welcher dabei bewegt wurde, konstant geblieben. Die Energie, welche dabei "verbraucht" wurde, wurde somit nicht in mechanische Energie des transportierten Körpers umgesetzt, sondern typischerweise in Wärme umgewandelt. Die minimal für einen solchen Transport notwendige Energie ist damit Null. Ein Verkehrssystem kann als umso intelligenter bezeichnet werden, je näher es diesem Grenzwert kommt.

### 2.4.12 Anwendungen

Die Verwendung des Prinzips der Energieerhaltung kann Rechnungen häufig stark vereinfachen. Als Beispiel berechnen wir die Geschwindigkeit eines Pendels am tiefsten Punkt. Man verwendet dazu die Tatsache, dass die kinetische Energie am niedrigsten Punkt gerade gleich der potenziellen Energie am

höchsten Punkt ist,

$$\mathcal{E}_{kin}(\varphi = 0) = \mathcal{E}_{pot}(\varphi_{max}) = \frac{m}{2}v^2 = mgh.$$

Somit ist die Geschwindigkeit am niedrigsten Punkt

$$v = \sqrt{2gh},$$

d.h. gleich groß wie wenn ein Körper fallengelassen wird, außer, dass in diesem Fall die Geschwindigkeit horizontal ist. Der Faden übt zwar eine Kraft aus auf die Pendelmasse, da die Länge konstant ist, ist diese Kraft senkrecht zur Bewegung und er leistet keine Arbeit.

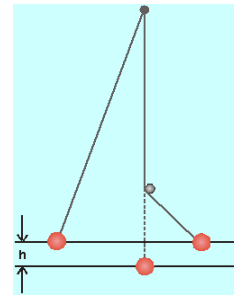


Abbildung 2.56: Bahn des Hemmpendels.

Damit können wir auch die Frage beantworten was für eine Bahn das Hemmpendels ( $\rightarrow$  Abb. 2.56) beschreibt: auf der gestreckten Seite wird die gesamte potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Auf der gehemmten Seite wird die kinetische Energie wieder in potenzielle Energie umgewandelt, d.h. der Pendelkörper erreicht die gleiche Höhe wie auf der gestreckten Seite.

Hier die Lösung der Eisenbahnfrage aus Abschnitt 2.4.1: Da die Lokomotive die Reibungskraft kompensiert, ist das System äquivalent zu einem reibungsfreien Zug ohne Lokomotive. Er kann den Hügel überqueren, wenn die kinetische Energie in der Ebene höher ist als die potenzielle Energie auf dem Hügel. Die beiden Energien betragen, jeweils durch die Masse dividiert

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{kin}}{m} &= \frac{1}{2}v^2 = 2411 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 2411 \frac{\text{J}}{\text{kg}}. \\ \frac{\mathcal{E}_{pot}}{m} &= gh = 1962 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1962 \frac{\text{J}}{\text{kg}}. \end{aligned}$$



Die Energie reicht somit aus. Es bleiben sogar 449 m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup> übrig, d.h. die Eisenbahn hat noch eine Geschwindigkeit von 21 m/s = 76 km/h.

Eine sportliche Anwendung der Energieerhaltung ist der Stabhochsprung. Hierbei wird im Wesentlichen kinetische Energie (Sprint vor dem Absprung) in potenzielle Energie (Höhe der Messlatte) umgewandelt. Die maximale Sprintgeschwindigkeit beträgt etwa 40 km/h = 11 m/s. Daraus ergibt sich eine Höhe

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{121}{20} \text{ m} \approx 6,05 \text{ m},$$

was in der Nähe des aktuellen Weltrekords von 6,16 m liegt (Renaud Lavillenie 2014).

## 2.5 Stoßprozesse

### 2.5.1 Definition und Motivation

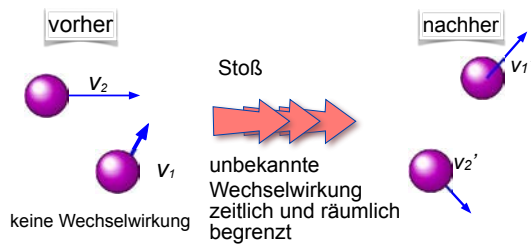


Abbildung 2.57: Stoßprozess.

Unter einem Stoß (→Abb. 2.57) versteht man eine zeitlich begrenzte Wechselwirkung zwischen zwei oder mehr Systemen, wobei man sich für die Einzelheiten der Wechselwirkung entweder nicht interessiert oder keine Möglichkeit hat, sie zu untersuchen oder zu beeinflussen. Man betrachtet einerseits die Körper bevor die Wechselwirkung stattfindet und andererseits dann, wenn die Wechselwirkung praktisch nicht mehr vorhanden ist. Dazwischen liegt die eigentliche Wechselwirkungszone. Interessant ist eine solche Betrachtung vor allem dann, wenn die Wechselwirkung mit dem Abstand zwischen den beiden Körpern rasch abnimmt, so dass die beteiligten Körper sich meist frei und unabhängig bewegen.

Für den gesamten Prozess geht man davon aus, dass keine äußeren Kräfte auf das System wirken,  $\vec{F}_{ext} =$

0. Aus dem 2. Newton'schen Axiom folgt somit, dass der Gesamtimpuls  $\vec{p}_{ges}$  des Systems, also die Summe der Einzelimpulse  $\vec{p}_i$  konstant bleibt:

$$\vec{p}_{ges} = \sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Es existieren jedoch Kräfte zwischen den Partnern. Gemäß dem dritten Axiom treten diese jedoch immer paarweise auf,  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$  und somit sind auch die dadurch erzeugten Impulsänderungen gegengleich,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik} = -\frac{d\vec{p}_k}{dt},$$

so dass diese sich in der Summe aufheben,

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0.$$

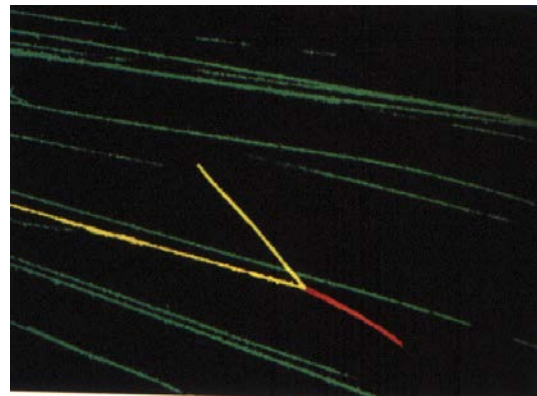


Abbildung 2.58: Stoßprozess eines  $\alpha$ -Teilchens mit einem Stickstoffatom.

Ein typischer Fall sind Kollisionen in der Kern- und Elementarteilchenphysik (→ Abb. 2.58), wo die Wechselwirkungen häufig gar nicht analytisch beschrieben werden können. In der Molekülphysik oder bei chemischen Reaktionen zwischen Molekülen ist die Situation sehr ähnlich: man kennt die Details der Wechselwirkung nicht, man kann höchstens die Ausgangszustände bestimmen und die Produkte analysieren.

In vielen Fällen kann man einen Teil oder sogar die gesamte Kinematik nach dem Stoß (d.h. ab dem Zeitpunkt, wo die Wechselwirkungen vernachlässigbar klein geworden sind) vorhersagen ohne die Details der Wechselwirkung zu kennen. Wir werden



für geeignete Beispiele die Geschwindigkeiten nach dem Stoß berechnen ohne die Art der Wechselwirkung überhaupt zu diskutieren. Dies bedeutet, dass die folgenden Überlegungen für die Gravitationswechselwirkung zwischen Galaxien genau so zutrifft wie für Billardkugeln oder sub-atomare Teilchen in einem Beschleuniger.

Stoßprozesse zwischen Atomen und Molekülen in Gasen spielen eine wichtige Rolle. Kollisionen zwischen Atomen und Molekülen sind die Grundlage für die kinetische Gastheorie.



Abbildung 2.60: Beispiel für einen unelastischen Stoß: Meteorkrater in Arizona.

### 2.5.2 Klassifikation von Stoßprozessen

Man unterscheidet verschiedene Arten von Stoßprozessen. Zum einen können wir sie anhand der Zahl der Stoßpartner klassifizieren. Im Rahmen dieser Vorlesung beschränken wir uns auf zwei Stoßpartner.

Ein typisches Beispiel eines unelastischen Stoßes ist der Aufprall eines Meteoriten auf die Erde (→ Abb. 2.60): hier wurde die gesamte kinetische Energie des Meteoriten in Wärme umgewandelt.

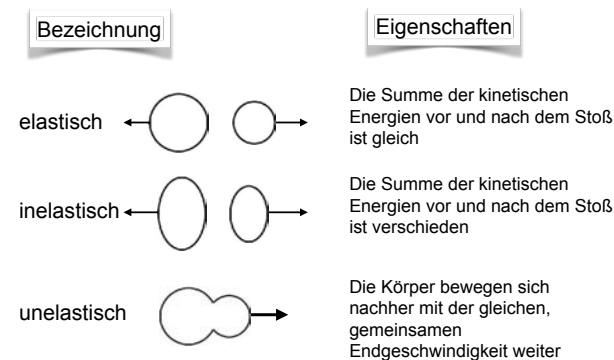


Abbildung 2.59: Klassifizierung von Stoßprozessen zwischen 2 Körpern.

Ein weiteres wichtiges Kriterium ist, ob beim Stoß kinetische Energie der Körper in Deformations-Energie umgewandelt wird. Je nachdem wird der Stoß als elastisch, inelastisch, oder unelastisch bezeichnet, wie in Abb. 2.59 zusammengefasst.

Da keine äußeren Kräfte auf das System wirken ist die gesamte Energie des Systems immer konstant. Bei elastischen Stößen ist auch die mechanische Energie konstant, bei inelastischen und unelastischen Stößen wird ein Teil in Wärme umgewandelt.

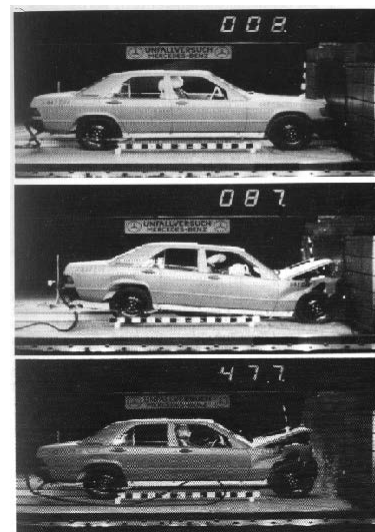


Abbildung 2.61: Unelastischer Stoß eines Automobils.

Ein weiteres typisches Beispiel für inelastische oder unelastische Stöße sind Zusammenstöße zwischen Automobilen oder Autos mit stationären Objekten (→ Abb. 2.61). Die Deformations-Energie wird hier sehr leicht sichtbar.

### 2.5.3 Kraftstoß

In vielen Fällen ist es auch nützlich, die Änderung des Impulses eines Teilchens während einer begrenzten Zeit zu betrachten.

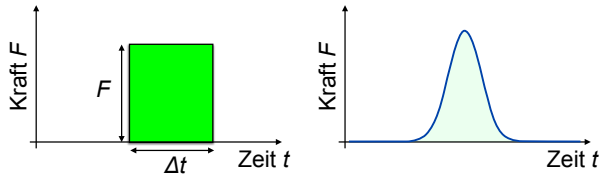


Abbildung 2.62: Zeitlich begrenzte Kraft.

Wie in Abb. 2.62 gezeigt, kann das eine zeitliche begrenzte konstante Kraft sein (links) oder eine kontinuierlich als Funktion der Zeit variable Kraft. Die relevante Größe ist die gesamte Impulsänderung des Körpers, auf den diese Kraft wirkt. Gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom ist die Impulsänderung

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

Diese wird als Kraftstoß bezeichnet. Die Einheit des Kraftstoßes ist  $[\Delta \vec{p}] = \text{mkg/s} = \text{Ns}$ . Im einfachen Fall (Abb. 2.61 links) ist er gegeben durch das Produkt aus Kraft und Dauer,  $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$ . Damit lassen sich also z.B. die Kräfte abschätzen, die bei einem Meteoriteneinschlag wirken.

### 2.5.4 Elastischer 2-Körperstoß

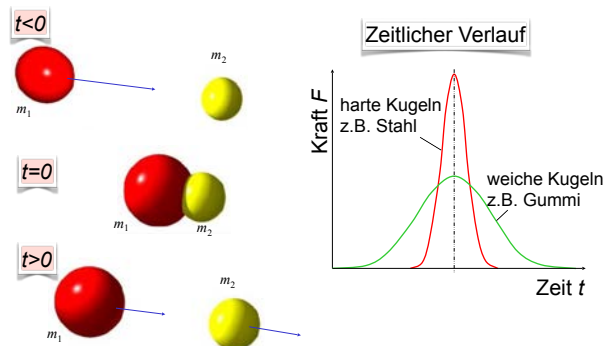


Abbildung 2.63: Zentraler elastischer Stoß.

Wir betrachten zwei Körper mit Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Wir diskutieren hier nur den Fall wo die Schwerpunkte der beiden Körper sich zu jeder Zeit auf der gleichen Linie bewegen - man spricht dann von einem zentralen Stoß ( $\rightarrow$  Abb. 2.63). In diesem Fall spielt der Vektor-Charakter der Geschwindigkeit keine Rolle, die Geschwindigkeiten können als Skalare beschrieben werden. Die Geschwindigkeiten vor dem Stoß seien  $v_{1,2}$ . Man würde erwarten, dass je nach der Art der Wechselwirkung während des Stoßes die beiden Körper sich nach dem Stoß sehr unterschiedlich verhalten.

Um die Geschwindigkeiten  $v'_{1,2}$  nach dem Stoß zu berechnen benötigen wir lediglich die Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Der Impuls bleibt nach den allgemeinen Voraussetzungen für Stoßprozesse immer erhalten, die mechanische Energie für den Fall elastischer Stöße. Die Erhaltungssätze lauten

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = p'_1 + p'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$2\mathcal{E}_{kin} = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2.$$

Die beiden Erhaltungssätze können als Bestimmungsgleichungen für die beiden Ausgangsgeschwindigkeiten verwendet werden. Auflösung nach  $v'_{1,2}$  ergibt:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ v'_2 &= \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hier sind offenbar die absoluten Massen nicht relevant, sondern allein das Massenverhältnis  $\alpha = m_2/m_1$ . Als Funktion dieser Größe erhält man

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{2\alpha v_2 + v_1(1 - \alpha)}{1 + \alpha} \\ v'_2 &= \frac{2v_1 + v_2(\alpha - 1)}{1 + \alpha}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wir betrachten zunächst als einfachen Spezialfall die Situation wo beide Massen identisch sind,  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\alpha = 1$ . Dann vereinfachen sich die Ausdrücke zu

$$v'_1 = v_2; \quad v'_2 = v_1,$$

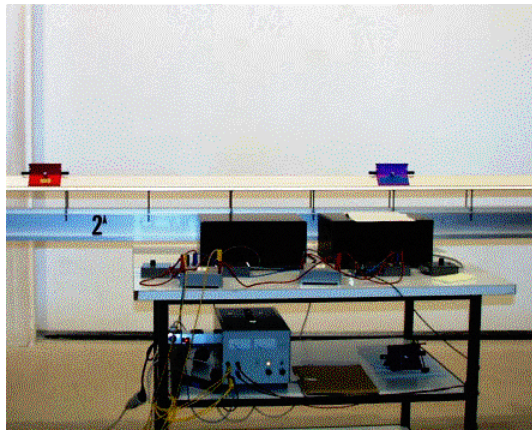


Abbildung 2.64: Elastischer Stoß auf Schiene.

d.h. die beiden Körper tauschen Geschwindigkeit (und damit Impuls). Damit verbunden ist auch ein Übertrag von Energie vom einen auf den anderen Körper.

Als nächstes Beispiel betrachten wir den Fall von beliebigen Massen, aber  $v_2 = 0$ . Wie viel Energie wird von  $m_1$  auf  $m_2$  übertragen? Lösung:

$$\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_1 \frac{4(m_1/m_2)}{(1 + m_1/m_2)^2} = \mathcal{E}_1 \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}.$$

Der Energieübertrag wird somit maximal (100 %) für  $m_1 = m_2$  oder  $\alpha = 1$  und verschwindet für  $\alpha \rightarrow 0$  und  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Als dritten Spezialfall betrachten wir  $\alpha = 1/2$ , d.h.  $m_2 = m_1/2$ ,  $v_2 = 0$ . Hier bewegen sich beide Schlitten nach dem Stoß in die gleiche Richtung, mit dem Geschwindigkeitsverhältnis 4:1:

$$v'_1 = \frac{v_1}{3}, \quad v'_2 = \frac{4v_1}{3}.$$

Die leichtere Masse bewegt sich somit nach dem Stoß schneller als die schwere vor dem Stoß!

Für zwei weitere Spezialfälle verwenden wir Schlitten mit einem Massenverhältnis von 2:1, von denen der eine jeweils auf den ruhenden zweiten auftrifft. Ist der massivere Schlitten in Ruhe, d.h.  $m_2 = 2m_1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $v_2 = 0$ . Einsetzen in die allgemeine Formel (2.10) ergibt

$$v'_1 = -\frac{v_1}{3}, \quad v'_2 = \frac{2v_1}{3},$$

d.h. die leichtere Masse bewegt sich nach dem Stoß rückwärts, die schwerere mit reduzierter Geschwindigkeit vorwärts. Im Extremfall von einem großen Massenverhältnis ( $m_2 \gg m_1$ ) wird die leichtere Masse exakt reflektiert.

## 2.5.5 Fallende Gummibälle



Abbildung 2.65: Zwei Gummibälle werden fallen gelassen.

Man lässt zwei Bälle ( $\rightarrow$  Abb. 2.65) aus einer Höhe  $h_0$  auf den Erdboden fallen. Beide Bälle erreichen den Boden mit der Geschwindigkeit  $v$ . Der leichtere Ball steigt auf eine Höhe  $h$ , die bis zu  $9h_0$  betragen kann.

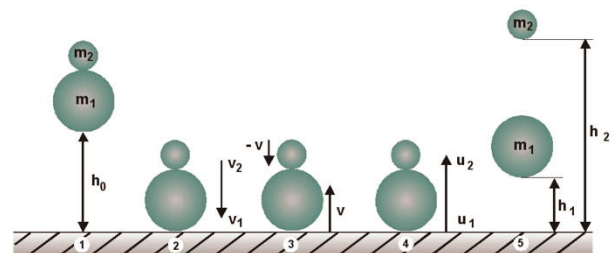


Abbildung 2.66: Bezeichnung der relevanten Geschwindigkeiten.

Abb. 2.66 definiert die Geschwindigkeiten der beiden Bälle, welche bei der Berechnung berücksichtigt werden müssen. Beim Auftreffen auf dem Boden haben beide Bälle eine Geschwindigkeit von

$$v = \sqrt{2gh_0}.$$

Die Geschwindigkeit des unteren, schwereren Balls wird zuerst invertiert. Dadurch treffen die beiden

Bälle mit betragsmäßig gleichen Geschwindigkeiten aufeinander. Für  $v_1 = v$  und  $v_2 = -v$  folgt aus Gl. 2.11 für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$v_1' = v \frac{1 - 3\alpha}{1 + \alpha} \quad v_2' = v \frac{3 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

Für  $\alpha \rightarrow 0$  wird  $v_1' = v$  und  $v_2' = 3v$ . Damit ist die kinetische Energie des kleineren Balls  $3^2 = 9$  mal so hoch wie die ursprüngliche potenzielle Energie und der Ball steigt bis zu 9 mal so hoch auf. Für  $m_2 = m_1/3$  wird  $v_2' = 2v$  und er steigt noch vier mal so hoch.

### 2.5.6 Stoß an Kugelreihe



Abbildung 2.67: Stoß an einer Kugelreihe.

Die Übertragung von Impuls von einem Körper auf einen anderen kann auch sehr schön mit Hilfe von aufgehängten Kugeln gezeigt werden ( $\rightarrow$  Abb. 2.67). Lässt man eine Kugel in auf eine zweite Kugel fallen, welche in Ruhe ist, so realisiert man den oben diskutierten Fall. Zwar ist die Bewegung der Kugel nicht auf einer Geraden, aber unmittelbar beim Stoß ist die Bewegung horizontal; unmittelbar danach beginnt ein Austausch von kinetischer und potenzieller Energie, der aber während des Stoßes vernachlässigt werden kann. Durch Zufügen weiterer Kugeln erhält man verschiedene Fälle die auch analog berechnet werden können. Dabei beobachtet man, dass immer gleich viele Kugeln wegfliegen, wie auf die Reihe auftreffen. Mit der Impulserhaltung wäre auch vereinbar, dass beim Auftreffen einer Kugel mit Geschwindigkeit  $v$  auf der anderen Seite zwei Kugeln mit halber Geschwindigkeit wegfliegen. Übung: Warum geschieht das nicht?

Wenn alle Kugeln die gleiche Masse haben sind nach dem Stoß immer gleich viele Kugeln in Bewegung wie vor dem Stoß. Dies ändert sich, wenn Kugeln mit unterschiedlicher Masse stoßen - in exakter Analogie zum Stoß auf der Schiene. So schiebt eine schwere Kugel eine leichtere vor sich her und gibt nur einen Teil seines Impulses ab. Trifft jedoch eine leichte Kugel auf eine schwere, so wird sie reflektiert, während die schwere nur entsprechend langsamer zurückweicht.

### 2.5.7 Unelastischer 2-Körperstoß

Von einem unelastischen Stoß zweier Körper spricht man dann, wenn sich die beiden Körper nach dem Stoß gemeinsam weiterbewegen, also "verschmelzen". In diesem Fall ist die mechanische Energie des Systems nicht erhalten, da ein Teil davon in Deformations- und Wärmeenergie umgewandelt wird. Es gilt jedoch weiterhin die Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v',$$

wobei  $v'$  die Geschwindigkeit des kombinierten Körpers nach dem Stoß darstellt. Sie beträgt somit

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.12)$$

entspricht also massengewichtete Mittel der Anfangsgeschwindigkeiten.

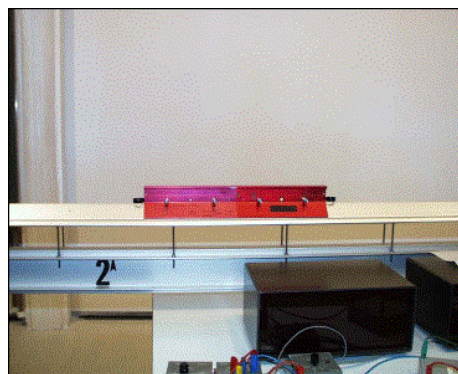


Abbildung 2.68: Unelastischer Stoß.



Abb. 2.68 zeigt ein entsprechendes Experiment. Hier wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_1$  auf einen ruhenden Körper der gleichen Masse auftrifft,  $m_1 = m_2 = m$ . Die beiden kleben aneinander und bewegen sich gemeinsam weiter. Für die aktuellen Parameter wird aus Gl. (2.12)

$$v' = \frac{mv_1}{m+m} = \frac{v_1}{2}.$$

Somit ist die resultierende Geschwindigkeit gleich der halben Geschwindigkeit des bewegten Körpers. Die Geschwindigkeit wird im Experiment gemessen, indem für den ersten Körper zweimal die Verdunklungszeit gemessen wird, für den kombinierten, doppelt so langen, nur einmal; die zweite Zeit ist in guter Näherung doppelt so lang wie die erste.

### 2.5.8 Elastischer Stoß in zwei Dimensionen

Im Allgemeinen finden Stöße nicht in einer Dimension statt. Wir diskutieren hier den zweidimensionalen Fall, der in Abb. 2.69 dargestellt ist. Der Erhaltungssatz für die Energie bleibt unverändert, während der Erhaltungssatz für den Impuls jetzt für beide Dimensionen unabhängig gilt. Wir betrachten einen elastischen Stoß zwischen zwei Körpern

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2.$$

Damit hat man drei Gleichungen und (im Allgemeinen) vier Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß. Es ist somit nicht möglich, die Bewegung der Körper nach dem Stoß vorauszusagen.

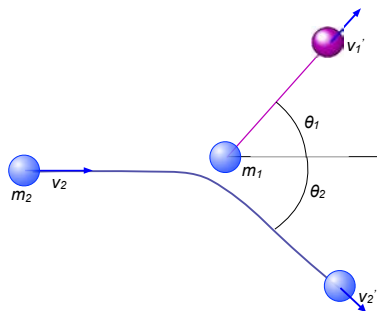


Abbildung 2.69: Elastischer Stoß in 2 Dimensionen.

Dass man trotzdem zu nützlichen Aussagen kommen kann, zeigt z.B. der Spezialfall, dass die beiden Körper gleiche Masse haben und der eine Körper zu Beginn in Ruhe ist. Dann vereinfachen sich die Erhaltungsgleichungen zu

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Behandlung vereinfachen, indem wir die  $x$ -Achse des Koordinatensystems in Richtung der Anfangsbewegung  $\vec{v}_2$  legen. Dann folgt aus der Impulserhaltung für die  $y$ -Komponente, dass die beiden  $y$ -Komponenten nach dem Stoß entgegengesetzt sind,

$$v'_{1y} = -v'_{2y} = v_y.$$

Wie bereits erwähnt, kann man die Bahnen der beiden Körper nicht bestimmen; sie hängen u.a. davon ab, wie stark die beiden Körper gegeneinander versetzt sind. Aus der obigen Beziehung zwischen einlaufenden und auslaufenden Geschwindigkeiten erhält man aber eine Bedingung für die auslaufenden Geschwindigkeitsvektoren, welche für alle Stöße dieser Art erfüllt sein muss, unabhängig von der Art der Wechselwirkung: Der Winkel  $\theta_1 + \theta_2$  zwischen den beiden auslaufenden Bahnen ist immer  $90^\circ$ .

## 2.6 Drehbewegungen

### 2.6.1 Kreisbewegung

Genau so wie ein Körper sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so behält er seine Orientierung gegenüber einem Inertialsystem bei, sofern er sich zu Beginn in Ruhe befindet, resp. behält eine vorhandene Drehbewegung bei.

Dies kann man anhand eines Kreisels im Hörsaal zeigen. Es gibt außerdem eine lange Liste von physikalisch relevanten Phänomenen, bei denen dies eine Rolle spielt.

Dies beginnt auf sehr kleinen Skalen mit dem Spin, d.h. dem Eigendrehimpuls von Elementarteilchen, und es setzt sich über viele Größenordnungen fort,



Eigendrehimpuls von Elementarteilchen



Abbildung 2.70: Eigendrehimpuls findet man bei Elementarteilchen wie auch bei Galaxien.

z.B. zur Rotation von Planeten, ihrer Bahnbewegung um die Sonne, oder der Rotationsbewegung von Galaxien.

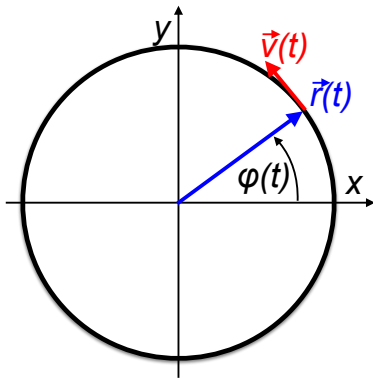


Abbildung 2.71: Kreisbewegung.

Die Basis für die folgende Diskussion ist die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn ( $\rightarrow$  Abb. 2.71). Benutzt man Polarkoordinaten, so bleibt dabei der Radius  $r$  fest, es ändert sich nur der Winkel  $\varphi$ . Im Fall der gleichförmigen Kreisbewegung ist  $\varphi = \omega_0 t$ . Ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

zeitabhängig, so kann man die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  bestimmen:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}.$$

Die Bahngeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit

auf der Bahn, beträgt

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad |\vec{v}| = \omega r.$$



Abbildung 2.72: Funken zeigen den Geschwindigkeitsvektor.

Der Geschwindigkeitsvektor bildet überall eine Tangente an den Kreis, wie man z.B. aus der Flugbahn von Funken erkennen kann, die an einem Rad erzeugt werden ( $\rightarrow$  Abb. 2.72).

Die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

wird sinnvollerweise in eine Komponente  $a_{||}$  parallel zum Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  und eine Komponente  $a_{\perp}$  senkrecht dazu aufteilt. Die parallele Komponente entspricht der Änderung des Betrags der Geschwindigkeit  $|\dot{v}(t)|$ , während die Komponente senkrecht dazu die Richtungsänderung beschreibt:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{e}_{||}(t) + \frac{v^2(t)}{r} \vec{e}_{\perp}(t).$$

Hier stellt

$$\vec{e}_{||}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$$

den Einheitsvektor entlang der instantanen Bewegungsrichtung dar und  $\vec{e}_{\perp}(t)$  denjenigen senkrecht dazu.

Für den Fall einer Kreisbewegung mit verschwindender Winkelbeschleunigung,  $\alpha = 0$ , ist der Betrag der Geschwindigkeit  $|\vec{v}|$  konstant und die Komponenten der Beschleunigung parallel und senkrecht dazu sind

$$\begin{aligned} a_{||} &= 0 \\ a_{\perp} &= \omega^2 r = \frac{v^2}{r}. \end{aligned}$$

### 2.6.2 Drehimpuls eines Massenpunkts

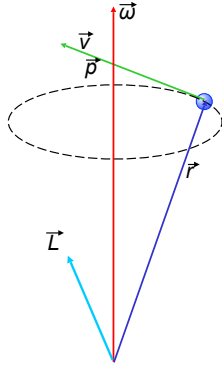


Abbildung 2.73: Definition des Drehimpulses  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .

Offenbar existiert hier ebenfalls ein Erhaltungssatz. Die entsprechende Größe ist der Drehimpuls. Für einen Massenpunkt ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad [L] = \text{m}^2 \text{kg s}^{-1} = \text{Nms} = \text{Js},$$

also als Vektorprodukt aus Ort und Impuls. Der Drehimpuls ist somit immer in Bezug auf ein Koordinatensystem definiert. Im Beispiel von Abb. 2.73 zeigt er nicht in Richtung der Drehachse.

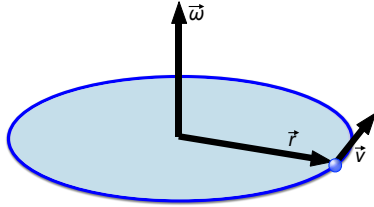


Abbildung 2.74: Kreisbewegung. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Zentrum des Kreises.

Abb. 2.74 zeigt die relevanten Größen für den Fall einer Kreisbewegung. In drei Dimensionen kann die Geschwindigkeit eines Massenpunktes als Vektorprodukt aus Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und Abstand  $\vec{r}$  von der Rotationsachse geschrieben werden:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Der Winkelgeschwindigkeitsvektor steht parallel zur Rotationsachse und sein Betrag ist die Rotationsfre-

quenz  $\omega$ . Der Drehimpuls wird somit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.13)$$

Im Fall der Kreisbewegung ist es sinnvoll, ein symmetriangepasstes Koordinatensystem zu wählen, dessen Ursprung im Zentrum des Kreises liegt. Dann sind die Vektoren  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{\omega}$  jeweils senkrecht zueinander und der Ausdruck (2.13) für den Drehimpuls vereinfacht sich zu

$$\vec{L} = mr^2 \vec{\omega}.$$

Offenbar ist hier der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit.

### 2.6.3 Trägheitsmoment

Wie am Beispiel eines Massenpunktes explizit gezeigt, ist der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante wird allgemein als Trägheitsmoment  $I$  bezeichnet:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

Für die Kreisbewegung eines Massenpunktes gilt offenbar  $I = mr^2$ .

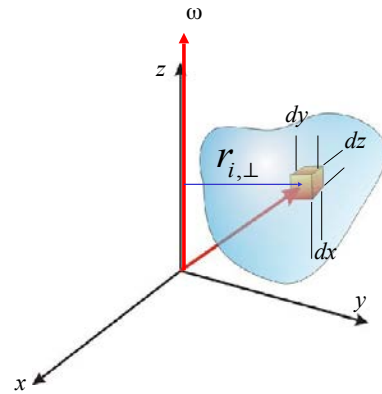


Abbildung 2.75: Berechnung von Trägheitsmomenten beliebiger Körper durch Integration.

Für einen allgemeinen Körper wird das Trägheitsmoment  $I$  berechnet als Integral über die Beiträge einzelner infinitesimaler Massenelemente  $dm$ . Wie in Abb. 2.75 gezeigt, kann es berechnet werden als

$$I = \iiint r_{\perp}^2 dm = \iiint r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV,$$

wobei das Integral über den gesamten Körper läuft,  $r_{\perp}$  den Abstand von der Rotationsachse darstellt und  $\rho$  die Dichte des Volumenelements  $dV$ . Das Trägheitsmoment ist deshalb im Allgemeinen abhängig von der Orientierung der Rotationsachse. Man spricht deshalb von einem Trägheitstensor. Für einen asymmetrischen Trägheitstensor ist der Drehimpuls  $\vec{L}$  nicht mehr parallel zur Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ .

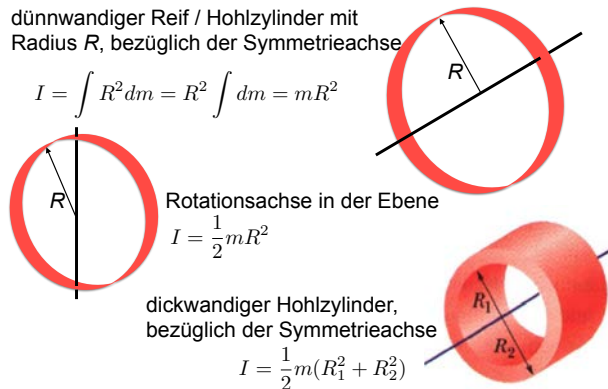


Abbildung 2.76: Trägheitsmomente von Hohlzylindern.

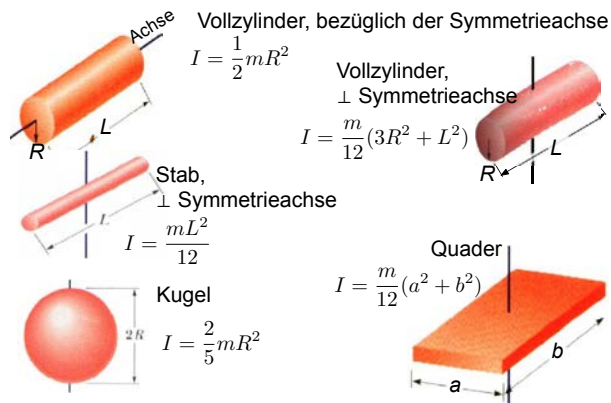


Abbildung 2.77: Weitere Trägheitsmomente.

Abb. 2.76 und 2.77 zeigen die Trägheitsmomente für einige einfach geformte Körper, bezüglich symmetriangepasster Achsen.

Auch ein Körper, der sich auf einer Geraden bewegt, besitzt einen Drehimpuls; dieser wird als Bahndrehimpuls bezeichnet. Im Gegensatz dazu unterscheidet man den Eigendrehimpuls, bei dem man sich auf eine Achse durch den Schwerpunkt bezieht.

|                 | Translation | Rotation       |                       |
|-----------------|-------------|----------------|-----------------------|
| Impuls          | $\vec{p}$   | $\vec{L}$      | Drehimpuls            |
| Masse           | $m$         | $I$            | Trägheitsmoment       |
| Geschwindigkeit | $\vec{v}$   | $\vec{\omega}$ | Winkelgeschwindigkeit |

Tabelle 2.3: Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegung.

Offenbar bestehen eine Reihe von Analogien zwischen Drehimpuls und linearem Impuls. Einige davon sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt.

In Analogie zum Erhaltungssatz für den linearen Impuls gilt ein Erhaltungssatz für den Drehimpuls:

So lange keine äußeren Kräfte wirken, bleibt der Drehimpuls eines Systems erhalten.

Die Erhaltung des Drehimpulses spielt eine große Rolle in vielen Teilen der Physik, vom Mikrokosmos (z.B. Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen, Absorption von Licht) bis zum Makrokosmos (Planetenbewegung, Stabilität von Galaxien).

## 2.6.4 Kinetische Energie

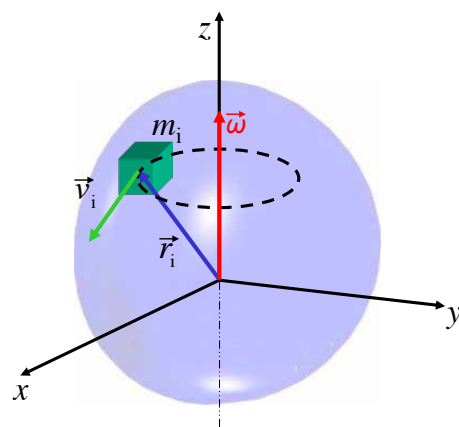


Abbildung 2.78: Beitrag eines Volumenelements zur kinetischen Energie.

Mit Hilfe des Trägheitsmoments lässt sich auch die

kinetische Energie berechnen. Aus dem Ausdruck für die kinetische Energie von Massenpunkten folgt

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{p}_i.$$

Ist die Rotation durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\omega}$  bestimmt, so gilt

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

und

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \iiint r^2 dm,$$

mit  $\omega$  als Betrag der Winkelgeschwindigkeit und  $r_i$  resp.  $r$  dem Abstand von der Drehachse. Mit Hilfe des Trägheitstensors  $\vec{I}$  lässt sich die Summe, respektive das Integral schreiben als

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L},$$

Fällt die Rotationsachse mit einer Symmetrieachse zusammen, so kann der Trägheitstensor durch das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ersetzt werden:

$$\mathcal{E}_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

### 2.6.5 Energieerhaltung

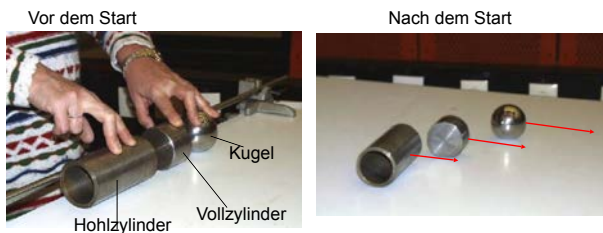


Abbildung 2.79: Rotationssymmetrische Körper auf einer schiefen Ebene.

Die unterschiedlichen Trägheitsmomente haben z.B. einen Einfluss darauf, wie schnell entsprechende Körper eine schiefe Ebene hinunterrollen ( $\rightarrow$  Abb. 2.79). Bei diesem Experiment wird potenzielle Energie  $\mathcal{E}_{pot} = mgh$  in kinetische Energie umgewandelt.

Diese besteht aus zwei Beiträgen, der translatorischen und der rotatorischen:

$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2.$$

Die beiden Terme sind jedoch über  $v = \omega R$  aneinander gekoppelt, wobei  $R$  den Radius bezüglich der Rotationsachse darstellt und dieser für alle Körper gleich ist. Daraus folgt auch

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\omega}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{2v}{R^2} a.$$

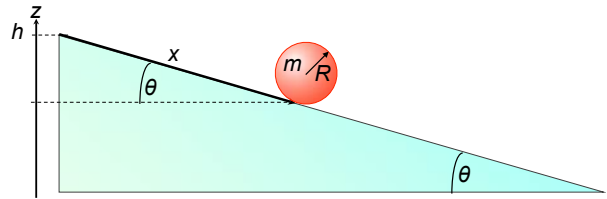


Abbildung 2.80: Rotation über schiefe Ebene.

Die Erhaltung der Gesamtenergie kann geschrieben werden als

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{tot} = mva + \frac{I}{R^2} va + mg \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.14)$$

$z$  stellt hier die Höhe dar,  $v = dx/dt$  die Geschwindigkeit und  $x$  die zurückgelegte Distanz. Mit  $h$  als Starthöhe ist

$$z = h - x \sin \theta, \quad \frac{dz}{dt} = -v \sin \theta.$$

Einsetzen in (2.14) ergibt

$$mva + \frac{I}{R^2} va - mgv \sin \theta = 0.$$

Diese Gleichung kann aufgelöst werden nach der Beschleunigung

$$a = g \sin \theta \frac{mR^2}{mR^2 + I} = g \sin \theta \left( 1 - \frac{I}{mR^2 + I} \right).$$

Der Vorfaktor  $g \sin \theta$  beschreibt die Beschleunigung für einen reibungsfreien Massenpunkt, während der Ausdruck in Klammern die Modifikation durch die Rotation berücksichtigt und immer kleiner als 1 ist. Die Beschleunigung ist somit am größten für den

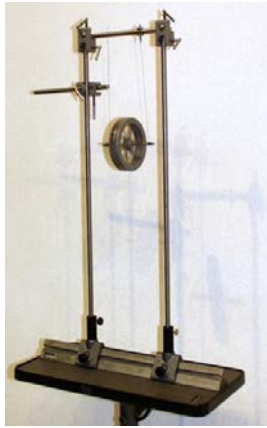


Abbildung 2.81: Maxwell-Rad.

Körper mit dem kleinsten Trägheitsmoment  $I$ . Dies erklärt, weshalb beim Experiment der Körper mit dem geringsten Trägheitsmoment zuerst das untere Ende erreicht.

Einen sehr ähnlichen Effekt beobachtet man beim in Abb. 2.81 gezeigten Maxwell-Rad: auch dieses demonstriert den Austausch von Energie zwischen unterschiedlichen Formen mechanischer Energie. Das Rad hängt an zwei Fäden, die um die Achse gewickelt sind. Nach dem Loslassen wickeln sich die Fäden ab und bringen das Rad in Rotation. Es findet ein ständiger Austausch zwischen potenzieller Energie, der kinetischen Energie des Schwerpunktes und der Rotationsenergie des Rades statt. Die Gesamtenergie ist

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{rot} + \mathcal{E}_{pot} = \frac{m}{2} v_S^2 + \frac{I}{2} \omega^2 + mgz_S.$$

Hier stellt  $z_S$  die Höhe des Schwerpunktes dar, welcher auf der Achse liegt, und  $v_S = dz_S/dt$  seine Geschwindigkeit. Die lineare und die Rotationsgeschwindigkeit sind aneinander gekoppelt, über  $v = \omega r$ , mit  $r$  dem Radius der Achse. Da die Achse relativ dünn ist und die Masse des Rades sich relativ weit von der Achse befindet, wird die potentielle Energie zum größten Teil in rotatorische kinetische Energie umgewandelt und die Translationsgeschwindigkeit des Rades bleibt relativ gering - es fällt deutlich langsamer als ein frei fallendes Rad.

## 2.6.6 Drehmoment

Der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße wenn keine äußere Kraft angreift. Wie beim linearen Impuls kann aber eine äußere Kraft den Drehimpuls verändern. Allerdings spielt nicht nur der Betrag der Kraft eine Rolle, sondern auch die Richtung und der Angriffspunkt.

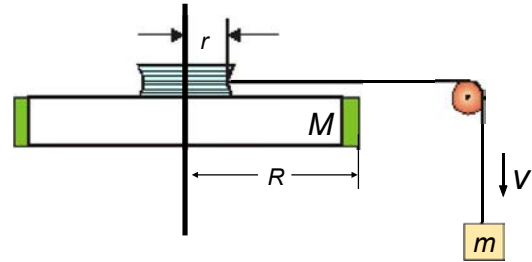


Abbildung 2.82: Experimentelle Bestimmung des Drehmoments.

Abb. 2.82 zeigt ein Experiment, bei dem eine Kraft in Form der Gewichtskraft eines Massenpunkts tangential an einem Rad angreift, das um seine Achse rotiert. Eine Änderung des Drehimpulses kann für einen Massenpunkt geschrieben werden als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Die beiden Vektoren des ersten Terms ( $\vec{v}$  und  $\vec{p}$ ) sind parallel, so dass das Vektorprodukt verschwindet. Bei einer Drehbewegung ohne äußere Kräfte ( $\vec{\omega}$  konstant) ist außerdem  $\frac{d\vec{p}}{dt} \parallel \vec{r}$ , so dass auch der zweite Term verschwindet: der Drehimpuls ist konstant.

Wenn jedoch eine geeignete Kraft angreift, welche eine Komponente parallel zu  $\vec{p}$  aufweist, so ändert sich die Geschwindigkeit der Drehbewegung entsprechend  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\parallel}$  und damit auch der Drehimpuls:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Dies ist offenbar das Äquivalent zum zweiten Newton'schen Axiom. Man bezeichnet die Größe auf der rechten Seite als Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [M] = \text{Nm}.$$



Damit kann man das Grundgesetz der Rotation schreiben als

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Das Drehmoment liegt im rechten Winkel zur Kraft und erzeugt damit einen Drehimpuls senkrecht zur Kraft. Da das Drehmoment aus dem Vektorprodukt  $\vec{r} \times \vec{F}$  besteht, verschwindet es, wenn die Kraft parallel zum Ortsvektor (d.h. radial) angreift; in diesem Fall würde eine Änderung des linearen Impulses erzeugt, falls keine Gegenkraft wirkt (z.B. durch die Lager eines Rades).

### 2.6.7 Rotationsachse

Wie beim Drehimpuls ist auch beim Drehmoment die Definition immer auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen; Drehimpuls und Drehmoment ändern sich wenn man den Ursprung des Koordinatensystems verschiebt.

Im Experiment von Abb. 2.82 wird die Kraft durch ein Gewicht der Masse  $m$  erzeugt, welches an einem Seil im Schwerfeld der Erde zieht. Indem das Gewicht über eine Höhe  $h$  fällt, wird eine Energie  $\Delta\mathcal{E}_{pot} = mgh$  auf das Rad übertragen und in kinetische Energie der Rotation  $\mathcal{E}_{rot}$  umgewandelt. Diese beträgt

$$\mathcal{E}_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh.$$

Somit lässt sich aus diesem Experiment das Trägheitsmoment bestimmen:

$$I = \frac{2mgh}{\omega^2},$$

indem man die resultierende Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  des Rades misst.

Die Tatsache, dass sich das Drehmoment auf ein bestimmtes Koordinatensystem, respektive eine Drehachse bezieht, lässt sich anhand des in Abb. 2.83 gezeigten Experimentes demonstrieren. Wenn man mit Hilfe eines Bandes an einer Rolle eine Kraft ausübt, so erzeugt dies ein Drehmoment, welches bezüglich der Symmetrieachse immer in die gleiche

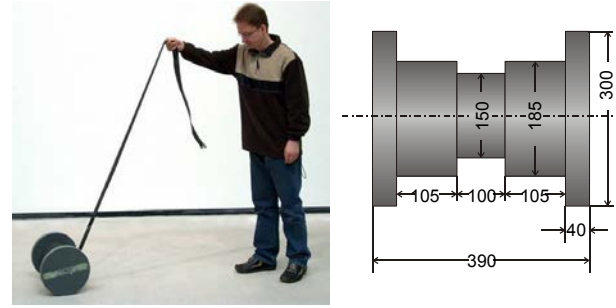


Abbildung 2.83: Folgsame Rolle.

Richtung zeigt. Allerdings steht die Rolle in Kontakt mit dem Boden und dadurch erfolgt die Rotation um den Auflagepunkt, nicht um die Achse. Bezüglich dieses Punkts kann das Drehmoment positiv oder negativ sein. Dementsprechend ist es möglich, die Rolle in Richtung auf den Experimentator oder von ihm weg zu bewegen.

### 2.6.8 Kräftegleichgewicht

Drehmomente spielen vor allem bei ausgedehnten Körpern eine Rolle. Dies werden meist als starre Körper behandelt, man vernachlässigt also Deformationen.

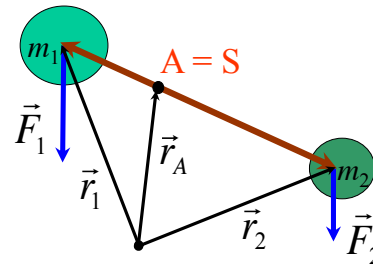


Abbildung 2.84: Gleichgewicht eines starren Körpers.

Abb. 2.84 zeigt einen einfachen starren Körper, bestehend aus 2 Massenpunkten, welche starr miteinander verbunden sind. Damit dieser im Gleichgewicht ist, also seinen Bewegungszustand nicht ändert, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Zum ersten muss die Summe der von außen auf den Körper

wirkenden Kräfte verschwinden,

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Im vorliegenden Fall muss die Summe der Schwerkraften auf die beiden Massen durch eine Stützkraft  $\vec{F}_s$  ausgeglichen werden,

$$\vec{F}_{tot} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{F}_s = 0.$$

Für die Translationsbewegung spielt es keine Rolle, wo die Kräfte angreifen.

Dies wird jedoch relevant, wenn es um eine Rotationsbewegung geht. Damit der Körper auch bezüglich einer Drehung im Gleichgewicht ist, muss zusätzlich die Summe der Drehmomente verschwinden. Dafür verwenden wir ein Koordinatensystem, bei dem die Stützkraft  $\vec{F}_s$  am Punkt  $\vec{r}_s$  angreift. Damit verschwindet ihr Beitrag zum Drehmoment. Der Beitrag der Gewichtskräfte ist

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_s) \times \vec{g} + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_s) \times \vec{g} = 0. \quad (2.15)$$

Daraus folgt die Bedingung für die Lage  $\vec{r}_s$  des Massenschwerpunkts:

$$m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_s) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_s) = 0.$$

Auflösen nach  $\vec{r}_s$  ergibt

$$\vec{r}_s = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

also den mit den Massen gewichteten Mittelwert der beiden Ortsvektoren. Dieser Punkt wird deshalb auch als Schwerpunkt bezeichnet. Die Rechnung lässt sich leicht auf eine beliebige Zahl von Massenpunkten oder Massenelementen erweitern:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung (2.15) ist auch bekannt als Hebelgesetz, welches besagt, dass die Summe der Produkte aus Kraft und Distanz vom Schwerpunkt verschwinden muss,

$$\sum_i F_i x_i = 0.$$

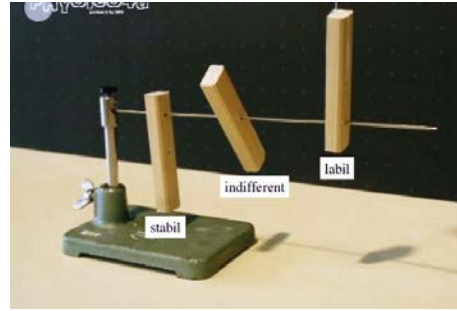


Abbildung 2.85: Stabiles, indifferentes und labiles Gleichgewicht, abhängig vom Aufhängepunkt.

Hierbei geht man üblicherweise davon aus, dass die Kräfte senkrecht zum Hebel angreifen.

Mit Hilfe des Schwerpunkts kann man untersuchen, ob ein Körper stabil aufgestellt oder aufgehängt ist: Wenn sich der Schwerpunkt eines Körpers über oder unter seiner Auflagefläche befindet, dann fällt er nicht um. Ob das Gleichgewicht stabil, instabil oder indifferent ist, hängt wiederum davon ab, ob die mögliche Drehachse des Körpers ober-, unter- oder auf der Höhe des Schwerpunkts ist. Abb. 2.85 illustriert dies für einen Holzstab. Daraus ergibt sich auch eine Möglichkeit, den Schwerpunkt eines Körpers zu bestimmen: Man hängt ihn an verschiedenen Punkten auf und markiert die Richtung nach Unten. Die entsprechenden Geraden schneiden sich im Schwerpunkt.

## 2.6.9 Pirouette



Abbildung 2.86: Pirouette.

Eine bekannte Anwendung der Drehimpulserhaltung ist die Pirouette von Eiskunstläufern ( $\rightarrow$  Abb. 2.86).

Hier reduziert der Artist das Trägheitsmoment indem er die Arme anzieht und erhöht dadurch die Winkelgeschwindigkeit: Da der Drehimpuls konstant bleibt, muss gelten

$$L_1 = L_2 = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Daraus folgt

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{I_1}{I_2}.$$

Als Beispiel nehmen wir an, dass er sich zunächst mit einer Drehfrequenz von  $\nu_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  bewegt und, dass sein Trägheitsmoment zunächst  $I_0 = 6 \text{ kg m}^2$  beträgt. Durch Anziehen der Arme reduziert er dieses auf  $I_1 = 1,5 \text{ kg m}^2$ . Sind Reibungsverluste vernachlässigbar, muss der Drehimpuls dabei erhalten bleiben und damit die Drehfrequenz zunehmen auf

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{I_0}{I_1} = 4 \text{ s}^{-1}.$$

Die kinetische Energie bleibt dabei nicht erhalten; diese wird dem System über eine Arbeitsleistung zugeführt, indem die Arme gegen die Zentrifugalkraft angezogen werden müssen. Die entsprechende Arbeit beträgt

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 - I_0 \omega_0^2) \\ &= \frac{1}{2} (1,5 \cdot 631 - 6 \cdot 39,5) \text{ J} = 592 \text{ J}. \end{aligned}$$

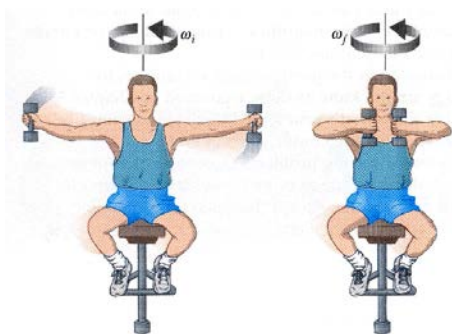


Abbildung 2.87: Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit durch Reduktion des Trägheitsmoments.

Das Experiment kann auch im Hörsaal durchgeführt werden, wobei der Effekt durch Gewichte in den

Händen verstärkt wird ( $\rightarrow$  Abb. 2.87). Beim Anziehen der Arme wird das Trägheitsmoment reduziert und die Erhaltung des Drehimpulses führt zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit.

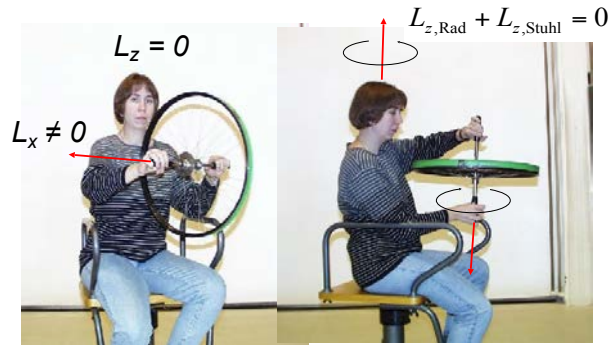


Abbildung 2.88: Erhaltung des Gesamt-Drehimpuls-Vektors.

Der Drehimpuls ist eine vektorielle Größe, die sich aus mehreren Komponenten zusammensetzen kann. Im Beispiel von Abb. 2.88 bleibt jedoch nur die vertikale Komponente erhalten, da der Drehstuhl um diese Achse frei beweglich ist. Die Achse des Rades wird zunächst in horizontaler Richtung gehalten. Dreht man das Rad, so dass der Drehimpuls nach oben zeigt, muss sich der Drehstuhl in entgegengesetzter Richtung bewegen, um den Gesamt-Drehimpuls bezüglich der vertikalen Achse zu erhalten. Dreht man die Achse des Rades nach unten, rotiert der Drehstuhl in die entgegengesetzte Richtung.

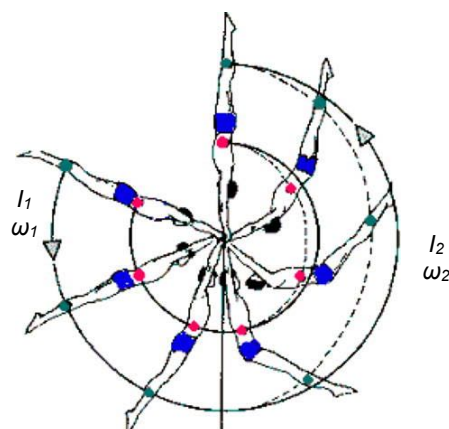


Abbildung 2.89: Turner an einem Reck.

Auf ähnliche Weise kann ein Turner an einem Reck

seine Winkelgeschwindigkeit vergrößern. Wie in Abb. 2.89 gezeigt, ändert er durch seine Körperhaltung sein Trägheitsmoment und damit auch seine Winkelgeschwindigkeit. Indem er dies synchronisiert mit dem Drehwinkel durchführt, leistet er auch Arbeit gegen die Schwerkraft und erhöht damit seine kinetische Energie und seinen Drehimpuls.



Abbildung 2.90: Feuertornado.

Drehimpulserhaltung spielt auch bei der Dynamik von Gasen eine Rolle. Abb. 2.90 zeigt einen sogenannten Feuertornado, welcher durch Drehen eines Tellers mit einer brennenden Flüssigkeit erzeugt wird. Die Flamme wird von einem Drahtkäfig umschlossen, der sich ebenfalls dreht. Durch die Flamme steigen im Drahtkäfig heiße Luft und Verbrennungsgase auf und saugen dadurch von außen frische Luft in den Zylinder hinein. Beim Einströmen sinkt der Abstand von der Drehachse. Wie bei der Pirouette wird dadurch die Rotationsgeschwindigkeit größer. Entsprechend dreht sich die Feuersäule viel schneller als der Käfig. Gleichzeitig wird durch die Drehbewegung die radiale Strömungsgeschwindigkeit reduziert. Dementsprechend dauert es länger, bis genügend Sauerstoff die Flamme erreicht und die Gase können weiter aufsteigen - die Flamme steigt höher. Auf ähnliche Weise kommt die Rotation von Winden um Hoch- und Tiefdruckgebiete zustanden,

wie auch bei Hurrikanen, Taifunen oder Tornados.

### 2.6.10 Kreisel

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der um eine Achse rotiert. In diesem Fall gelten Erhaltungsgesetze für alle drei Komponenten des Drehimpulses. Für praktische Anwendungen sollte die Rotationsachse mit einer Symmetrieachse des Körpers zusammenfallen, in diesem Fall kann die Rotation sehr stabil sein.

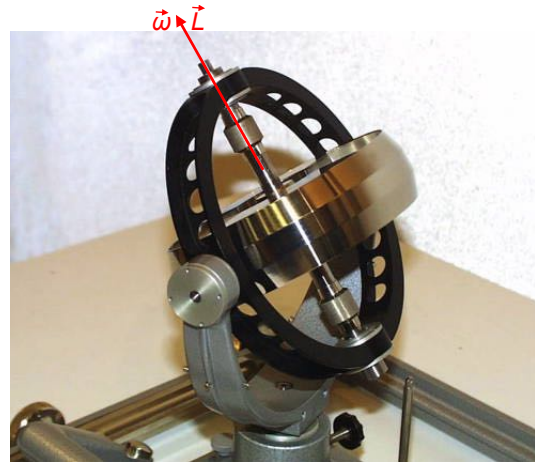


Abbildung 2.91: Kardanis aufgehängter Kreisel.

Lagert man den Kreisel so, dass keine Drehmomente  $\vec{M}$  auf ihn wirken ( $\rightarrow$  Abb. 2.91), so bleibt wegen

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0$$

der Drehimpuls  $L$  und auch die Drehachse konstant. Je größer der Drehimpuls, desto schwieriger wird es, seine Richtung zu ändern. Deshalb sind Kreisel bei hohen Drehzahlen sehr stabil.

#### Kurskreisel

Ein solcher kräftefreier Kreisel behält seine einmal vorgegebene Orientierung auch dann bei, wenn man ihn mit dem Aufbau als Ganzes beliebig durch den Raum trägt. Ein Kreisel kann so im Prinzip als Kurskreisel zur Richtungsbestimmung in der Navigation eingesetzt werden. Allerdings ergeben Reibungseffekte und Drehmomente Abweichungen.



## Backstein

Eine freie Rotation ist stabil bei Rotation um die Achse mit dem kleinsten oder dem größten Trägheitsmoment.

## Nutation

Rotiert der kräftefreie Kreisel nicht um eine Symmetrieachse, so bleibt zwar die Richtung des Drehimpulses konstant, nicht aber die Richtung der Rotationsachse. Der allgemeine Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit ist

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}.$$

Hier stellt  $\hat{I}$  den Trägheitstensor dar, welcher den Vektor  $\vec{\omega}$  rotiert und multipliziert. Drehachse und Symmetrieachse des Kreisels ändern mit der Zeit ihre Richtung und bewegen sich auf Kegelmänteln um die Drehimpuls-Achse  $\vec{L}$ .

## Präzession

Wirkt eine Kraft auf einen Kreisel, z.B. die Schwerkraft, so erzeugt diese i.A. auch ein Drehmoment und damit eine Änderung des Drehimpulses:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_G.$$

Da die Änderung des Drehimpulses senkrecht zur Richtung der Gewichtskraft liegt, fällt der Kreisel nicht um, sondern er präzediert um die Richtung der Gewichtskraft, also um die Vertikale.

Das Experiment zeigt ein einfaches Beispiel, in dem die Drehimpulserhaltung ein selbständig navigierendes System ergibt. Man benutzt dazu einen Kreisel, der in ein Kunststoffrohr eingebaut ist. Der Kreisel rollt auf einem gebogenen Draht eine schiefe Ebene hinunter und folgt den Kurven eines dünnen Metallrohrs ( $\rightarrow$  Abb. 2.92). Dies wird durch die Drehimpulserhaltung möglich. Man kann den Effekt qualitativ so erklären:

- Der Kreisel läuft rechts oder links von der Bahn. Sein Schwerpunkt  $S$  liegt jetzt nicht mehr direkt über der Schiene.

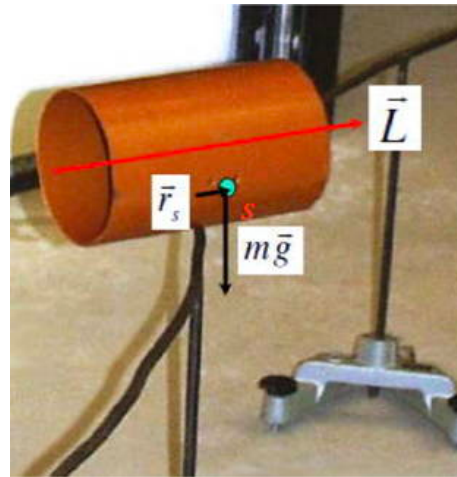


Abbildung 2.92: Ein Zylinder wird durch einen Kreisel stabilisiert und kann so einem dünnen Metallrohr folgen.

- Es wirkt ein Drehmoment  $\vec{M} = \vec{r}_S \times m\vec{g}$ .
- Das Drehmoment erzeugt eine Präzession des Kreisels um die Achse senkrecht zu  $\vec{L}$ .
- Dadurch ändert sich die Richtung der Rotationsachse des Zylinders und damit die Richtung der Schwerpunktsbewegung.
- Bei korrektem Drehsinn des Kreisels bewegt sich der Zylinder so, dass der Schwerpunkt wieder über dem Draht liegt.

## 2.7 Astronomische Anwendungen

### 2.7.1 Drehimpuls und Planetenbahnen

Die Erhaltung des Drehimpulses ist auch verantwortlich für die Rotation von Planeten im Sonnensystem, von Satelliten (Monden, Ringen) um Planeten, und der Sonnensysteme in der Galaxis: diese bildeten sich aus Wolken von Gas und Staub durch Kontraktion unter dem Einfluss der Schwerkraft. Die Erhaltung des Drehimpulses bei der Kontraktion führte zu einer Erhöhung der anfangs geringen Rotationsgeschwindigkeit und verhindert eine vollständige Kontraktion: ohne Drehimpulserhaltung würden die Planeten unter dem Einfluss der Schwerkraft in die



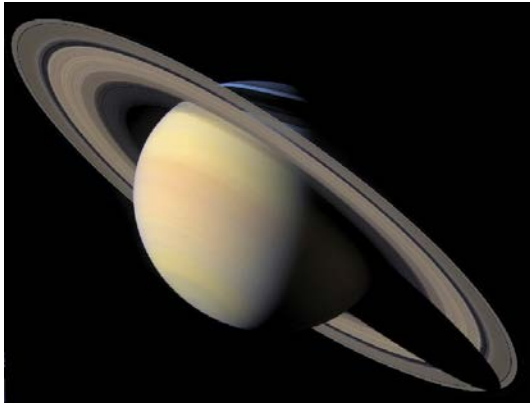


Abbildung 2.93: Ringe des Saturns.

Sonne fallen. Ähnliche Effekte führen zur Form der Galaxien.



Abbildung 2.94: Das Ptolemäische Weltbild.

Die Planetenbahnen haben die Menschen seit Langem fasziniert. Ptolemäus fasste im 2. Jh. nach Christus den damaligen Wissenstand zusammen und erstellte ein Weltbild (→ Abb. 2.94), welches mehr als tausend Jahre Bestand hatte. In seinem System war die Erde im Zentrum des Universums und der Mond, Merkur, Sonne, Mars, Jupiter und Saturn bewegten sich in Kreisen um die Erde. Dies war allerdings nicht mit allen Beobachtungen kompatibel; so bewegen sich die Planeten von der Erde aus betrachtet nicht immer in die gleiche Richtung, sondern folgen manchmal einer Art von Schleife. Man versuchte das Ptolemäische Modell deshalb durch sogenannte Epizyklen zu korrigieren: Die Planeten liefen nicht direkt auf Kreisen, sondern auf Kreisen, deren Mittelpunkte wiederum auf Kreisen um die Erde liefen. Noch genauere Messungen zeigten, dass

mehrere Generationen von Epizyklen notwendig waren, um die Beobachtungen erklären zu können.

Die wichtigste Neuerung wurde von Kopernikus (1473-1543) initiiert, welcher anstelle der Erde die Sonne ins Zentrum stellte. Dies konnte einige der Beobachtungen qualitativ erklären, aber eine quantitative Übereinstimmung wurde nicht erreicht, weil die Planeten in seinem Modell sich immer noch auf Kreisbahnen bewegten. Der dänische Hofastro- nom Tycho Brahe (1546-1601) stellte umfangreiche Beobachtungen an, welche insgesamt weder mit dem kopernikanischen noch mit dem ptolemäischen Weltbild wirklich vereinbar waren.

### 2.7.2 Die Kepler'schen Gesetze

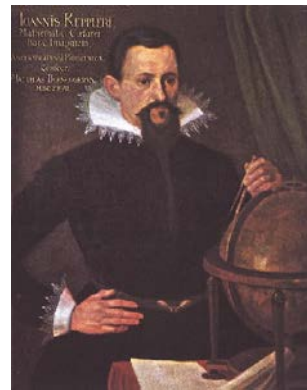


Abbildung 2.95: Johannes Kepler (1571-1630).

Die erste Theorie, welche die Beobachtungen anhand einiger weniger Gesetze erklären konnte stammt von Johannes Kepler (1571-1630; → Abb. 2.95). Er formulierte die ersten zwei seiner Gesetze 1609, das dritte 1619. Sie wurden für Planeten formuliert, gelten aber analog z.B. für die Umlaufbahnen von Monden. Zu Kepler's Zeit waren dies neue Grundgesetze, welche nur der Beschreibung der astronomischen Daten dienten. Erst gegen Ende des 17. Jahrhunderts lieferte Newton die theoretischen Grundlagen, mit denen diese Gesetze aus grundlegenden Gesetzen hergeleitet werden konnten.

1. **Kepler'sches Gesetz:** Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen. Die Sonne steht jeweils in ei-

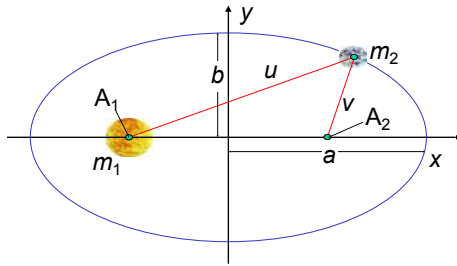


Abbildung 2.96: 1. Kepler'sches Gesetz: Die Planetenbahnen sind Ellipsen; die Sonne steht in einem der Brennpunkte.

nem der Brennpunkte. Ellipsen sind geschlossene Kurven, welche z.B. durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben werden können.  $a$  und  $b$  stellen die Halbachsen der Ellipse dar ( $\rightarrow$  Abb. 2.96). Für  $a = b$  geht die Ellipse in einen Kreis über. Ellipsen können u.a. konstruiert werden, indem man zwischen den beiden Brennpunkten einen Faden spannt und mit einem Bleistift bei gespanntem Faden die Kurve zieht. Dabei nutzt man aus, dass die Strecke  $u + v$  konstant ist.

Das Gesetz beinhaltet verschiedene Näherungen, z.B. dass die Sonne unendlich schwer ist. Dies ist eine gute Näherung: Die Masse der Sonne beträgt etwa  $2 \cdot 10^{30}$  kg, diejenige der Erde etwa  $6 \cdot 10^{24}$  kg. Berücksichtigt man die endliche Masse, so bewegen sich Sonne und Planet um den gemeinsamen Schwerpunkt, dieser liegt in einem Brennpunkt der Ellipse. Außerdem stören andere Planeten die Bahn.

### 2.7.3 2. Kepler'sches Gesetz

Das 2. Kepler'sche Gesetz beschreibt die Geschwindigkeit auf der Bahn.

Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor  $\vec{r}$  überstreicht in gleichen Zeiten  $\Delta t$  konstante Flächen  $\Delta A$ :  $\Delta A / \Delta t = \text{konstant}$  ( $\rightarrow$  Abb. 2.97). Dieses Gesetz lässt sich beweisen, wenn man die Fläche  $dA$  berechnet, welche in der (infinitesimalen) Zeit  $dt$  überstrichen wird:

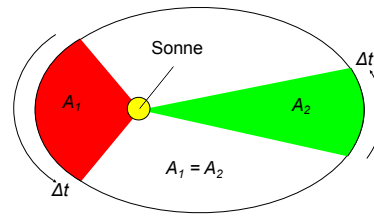


Abbildung 2.97: 2. Kepler'sches Gesetz: Die Flächen  $A_1$  und  $A_2$  sind gleich.

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m d\vec{r}| \\ &= \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times m \vec{v}| dt. \end{aligned}$$

Da  $\vec{r} \times m \vec{v} = \vec{L}$  den Drehimpuls darstellt, ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}| = \text{const.}$$

konstant, wenn der Drehimpuls sich nicht ändert. Dies gilt für endliche Zeiten genau so,

$$A(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1}{2m} |\vec{L}| \Delta t.$$

Das zweite Kepler'sche Gesetz ist also eine direkte Manifestation der Erhaltung des Drehimpulses.

### 2.7.4 3. Kepler'sches Gesetz

Das dritte Kepler'sche Gesetz betrifft das Verhältnis zwischen Abstand und Umlaufzeit der Planeten. Kepler fand es erst etwa 10 Jahre nach den ersten beiden Gesetzen; es wurde 1619 publiziert, im Werk *Harmonices mundi*.

Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T_1, T_2$  zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen  $a_1, a_2$  ( $\rightarrow$  Abb. 2.98):

$$\left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2 = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^3.$$

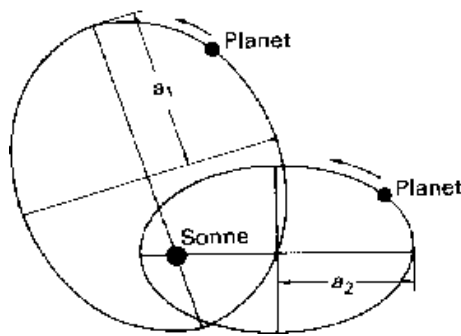


Abbildung 2.98: 3. Kepler'sches Gesetz.

Diese Beobachtung kann für eine Kreisbewegung leicht erklärt werden: In diesem Fall wirkt die Gravitation

$$F_G = G \frac{Mm}{R^2}$$

als Zentripetalkraft. Diese muss der Zentrifugalkraft

$$F_Z = m\omega^2 R$$

entsprechen. Die Kreisfrequenz  $\omega$  ist invers proportional zur Periode,  $\omega = 2\pi/T$ . Somit ist

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 R.$$

Umstellen ergibt das 3. Kepler'sche Gesetz:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const.}$$

Solche Potenzgesetze kann man am besten überprüfen indem man die vorhandenen Daten logarithmiert: Bildet man auf beiden Seiten den Logarithmus dann findet man

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^2 &= 2(\log T_1 - \log T_2) \\ &= \log \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^3 = 3(\log a_1 - \log a_2) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\log a_1 - \log a_2}{\log T_1 - \log T_2} = \frac{2}{3}.$$

Trägt man  $\log a$  gegen  $\log T$  auf, so erhält man somit eine Gerade mit Steigung  $2/3$ . Wie in Abb. 2.99 gezeigt, passen die experimentellen Daten sehr gut zu dieser Voraussage.

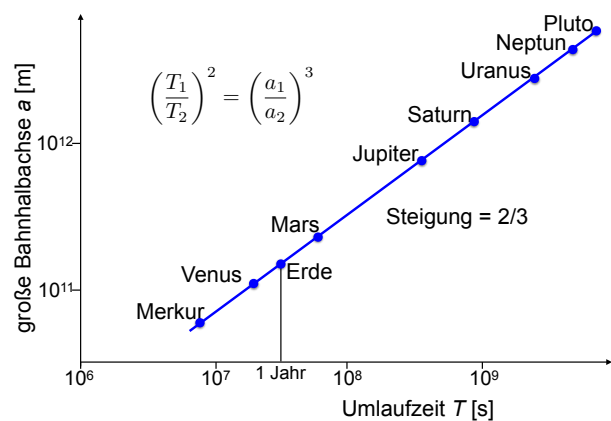


Abbildung 2.99: Vergleich des 3. Kepler'schen Gesetzes mit Daten der Planetenbahnen.

### 2.7.5 Theorie der Gravitation

Die Kepler'schen Gesetze lieferten hervorragende Vorhersagen welche innerhalb der Messgenauigkeit die Beobachtungen erklären konnten. Sie liefern aber keine Erklärung für die beobachteten Phänomene. Kepler versuchte auch, eine Erklärung zu liefern, aber es gelang ihm nicht. Diese lieferte jedoch Newton mit seinen Gesetzen der Mechanik ( $\rightarrow$  Abschnitt 2.2.2) und mit seiner Theorie der Gravitation ( $\rightarrow$  2.2.5). Diese besagt, dass die unterschiedliche Massen sich anziehen, mit einer Kraft

$$|F_G| = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Die Gravitationskonstante  $G$  war zu Newton's Zeit noch nicht bekannt. Der heute anerkannte Wert beträgt

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}^2 \text{s}^2}.$$

Nachdem die Gravitationskonstante bestimmt ist, kann man eine Messung der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche dazu verwenden, die Erdmasse zu bestimmen. Mit dem mittleren Erdradius  $r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$  erhält man  $m_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Analog kann man aus dem Radius einer Planetenbahn und seiner Umlaufzeit die Masse der Sonne bestimmen: Aus dem Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft

und Gravitationskraft der Sonne

$$F_{ZP} = m_P r_P \omega_P^2 = F_G = G \frac{m_P m_S}{r_P^2}.$$

Die Sonnenmasse erhält man daraus als

$$m_S = r_P^3 \omega_P^2 / G \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Dies beinhaltet gleichzeitig das dritte Kepler'sche Gesetz (für den Grenzfall eines Kreises, d.h. verschwindender Elliptizität).

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts erkannte Einstein, dass die Newton'sche Theorie als eine Näherungsform betrachtet werden muss. In dieser Theorie erfolgt die Wechselwirkung zwischen unterschiedlichen schweren Körpern nicht mehr über Kräfte, sondern indem jeder Massenpunkt den Raum in seiner Umgebung verzerrt. Die Theorie behandelt somit nicht Kräfte, sondern die Geometrie des vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuums.

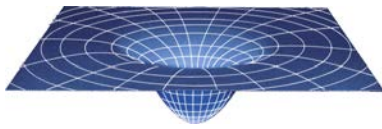


Abbildung 2.100: Krümmung des Raum-Zeit Kontinuums durch eine Masse.

Abb. 2.100 zeigt diese Krümmung schematisch, anhand einer Projektion in den zweidimensionalen Raum, respektive die dreidimensionale Raum-Zeit. Jede Masse erzeugt eine Krümmung in ihrer Umgebung.

Sie gibt in vielen Fällen die gleichen Voraussagen zu experimentell beobachtbaren Größen wie die Newton'sche Theorie. In einigen wenigen Spezialfällen findet man Unterschiede. So kann sie z.B. die Präzessionsbewegung bei der Merkurbahn erklären, oder die Ablenkung von Sternenlicht beim Passieren der Sonne. Eine wichtige Bestätigung der allgemeinen Relativitätstheorie erfolgte 2016, als zum ersten Mal Gravitationswellen gemessen wurden. Gravitationswellen sind Verzerrungen des Raums, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Alle bewegten Körper erzeugen Gravitationswellen, aber die entsprechenden Verzerrungen sind meistens zu klein, um sie messen zu können. Lediglich wenn sich

sehr große Massen sehr schnell bewegen, sind die Amplituden der Wellen groß genug um messbar zu sein. Die bisher gemessenen Signale wurden Paaren von schwarzen Löchern und Neutronensternen zugeschrieben, die sich verschmolzen haben. Einige der beteiligten Forscher erhielten 2017 den Nobelpreis für Physik.

## 2.8 Mechanik in bewegten Bezugssystemen

### 2.8.1 Galilei'sche Relativität

Die Beschreibung einer Bewegung hängt ab vom verwendeten Bezugssystem: Wenn jemand in einem Eisenbahnwagen einen Ball aufwirft, so hängt die Form der Bahnkurve davon ab, ob der Betrachter ebenfalls in der Eisenbahn sitzt oder auf dem Bahnsteig steht.

Man ist grundsätzlich frei in der Wahl des Bezugssystems, d.h. man kann auswählen welches Bezugssystem man verwendet, um die beobachteten Phänomene zu beschreiben. Im oben genannten Beispiel unterscheiden sich die beiden Bezugssysteme lediglich um die Anfangsgeschwindigkeit in der Bewegungsrichtung der Eisenbahn. Es gibt meist ein Bezugssystem, welches eine besonders einfache Beschreibung ermöglicht. Vor allem aber ist nicht garantiert, dass in jedem Bezugssystem die Newton'schen Axiome erfüllt sind. Ist dies der Fall, so bezeichnet man das System als Inertialsystem. Es gibt beliebig viele unterschiedliche Inertialsysteme.

Jedes ortsfeste Inertialsystem kann man in ein anderes transformieren, wenn man eine Translation oder Rotation vornimmt. Außerdem kann man das Bezugssystem immer mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem verschieben und erhält ein weiteres Inertialsystem. Die Tatsache, dass alle diese Systeme gleichwertige Möglichkeiten für die Beschreibung der beobachteten Phänomene darstellen, bedeutet, dass absolute Geschwindigkeit keine Bedeutung hat. Ähnlich bedeutet die Tatsache, dass der Ursprung des Koordinatensystems frei wählbar ist, dass absolute Position keine Bedeutung hat. Aus der (experimentell verifizierten) Tatsache, dass die physikalischen Gesetze gültig bleiben bei einer beliebigen (konstanten) Bewegung des Bezugssystems kann man u. a. die Erhaltung des linearen Impulses herleiten.

Wir betrachten zunächst die beiden Bezugssysteme von Abb. 2.101, welche gegeneinander in Ruhe sind, aber einen unterschiedlichen Ursprung besitzen. Ist der Ursprung des Systems  $B$  im System  $A$  am Ort

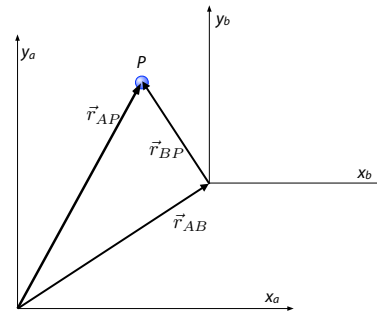


Abbildung 2.101: Ortsvektor  $\vec{r}$  eines Punktes  $P$  in 2 unterschiedlichen Bezugssystemen  $A, B$ .

$\vec{r}_{AB}$ , und der Ortsvektor des Punktes  $P$  im System  $B$   $\vec{r}_{BP}$ , so ist offenbar der Ortsvektor  $\vec{r}_{AP}$  im System  $A$

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP}.$$

### 2.8.2 Relativgeschwindigkeit

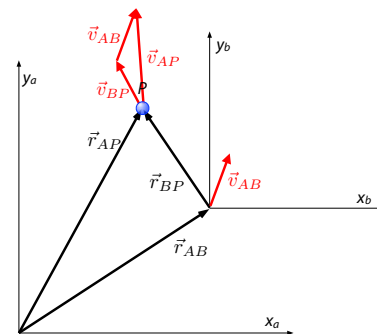


Abbildung 2.102: Bewegte Bezugssysteme.

Man verwendet nicht immer ruhende Bezugssysteme. Abb. 2.102 zeigt einen Fall, bei dem sich das System  $B$  gegenüber dem System  $A$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v}_{AB}$  bewegt. Ist die Position des Bezugssystems  $B$  relativ zu  $A$  zum Zeitpunkt  $t = 0$   $\vec{r}_{AB}(0)$ , so gilt offenbar zur Zeit  $t$

$$\vec{r}_{AB}(t) = \vec{r}_{AB}(0) + \vec{v}_{AB}t.$$

Für einen Punkt  $P$ , der sich gegenüber dem System  $B$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v}_{BP}$  bewegt,

$$\vec{r}_{BP}(t) = \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{BP}t$$



gilt somit

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AP}(t) &= \vec{r}_{AB}(t) + \vec{r}_{BP}(t) = \\ &= \vec{r}_{AB}(0) + \vec{r}_{BP}(0) + \vec{v}_{AB}t + \vec{v}_{BP}t \\ &= \vec{r}_{AP}(0) + \vec{v}_{AP}t,\end{aligned}$$

wobei die Geschwindigkeit  $\vec{v}_{AP}$  des Punktes  $P$  gegenüber dem System  $A$  durch die Vektorsumme

$$\vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP}$$

gegeben ist. Die Geschwindigkeit im Bezugssystem  $A$  ist somit gegeben durch die Summe aus der Geschwindigkeit im Bezugssystem  $B$  und der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme.

### 2.8.3 Gleichförmig beschleunigte Bezugssysteme

Die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Bezugssystemen ist nicht immer konstant. Typische Beispiele sind Aufzüge oder Eisenbahnen beim Anfahren oder Abbremsen oder Flugzeuge beim Start. Hier sollen nur gleichförmige Beschleunigungen diskutiert werden, d.h.  $a = \text{konstant}$ . Deren Behandlung ist zunächst analog zur Behandlung von Bezugssystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen. Wir betrachten hier nur den einfachen Fall, dass die beiden Systeme zum Zeitpunkt  $t = 0$  identisch sind, das System  $B$  gegenüber dem System  $A$  jedoch gleichförmig beschleunigt wird mit  $\vec{a}_{AB}$ . In beiden Systemen gilt die übliche Kinematik. Für den Punkt  $P$ , der gegenüber System  $B$  mit  $\vec{a}_{BP}$  beschleunigt wird, findet man im System  $A$  in Analogie zur obigen Herleitung für die Geschwindigkeiten die Beschleunigung

$$\vec{a}_{AP} = \vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}.$$

Für Geschwindigkeit und Ort gilt für  $\vec{r}_{AB}(0) = 0$ ,  $\vec{v}_{AB}(0) = 0$

$$\begin{aligned}\vec{v}_{AP} &= \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BP} = \vec{a}_{AB}t + \vec{v}_{BP}, \\ \vec{r}_{AP} &= \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} = \vec{a}_{AB}\frac{t^2}{2} + \vec{r}_{BP}.\end{aligned}$$

Anders sieht es aus bei der Dynamik. Da die Beschleunigung in den beiden Bezugssystemen unterschiedlich ist, können Newton's Axiome nicht in beiden Systemen gelten. Gelten sie z.B. im System  $A$  und ist die resultierende Kraft auf den Körper

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_{AP}}{dt} = m\vec{a}_{AP} = m(\vec{a}_{AB} + \vec{a}_{BP}),$$

so können wir im Bezugssystem  $B$  schreiben

$$m\vec{a}_{BP} = m(\vec{a}_{AP} - \vec{a}_{AB}) = \vec{F} - m\vec{a}_{AB}.$$

Der zusätzliche Term  $-m\vec{a}_{AB}$  in der Bewegungsgleichung kann als scheinbare Kraft, als Trägheitskraft interpretiert werden. Wir spüren sie z.B. beim Anfahren eines Aufzugs: beschleunigt der Aufzug nach oben, so drückt uns eine Kraft nach unten, welche proportional zur Beschleunigung und zu unserer Masse ist. In einem Bezugssystem, welches mit der Erdbeschleunigung  $g$  nach unten beschleunigt wird, verschwindet scheinbar die Schwerkraft.

### 2.8.4 Schwerelosigkeit



Abbildung 2.103: Links: Fallturm in Bremen. Rechts: Kapsel im Fallturm.

Dies wird z.B. im Fallturm Bremen ausgenutzt. Wie in Abb. 2.103 gezeigt, werden dort Experimente in der Schwerelosigkeit durchgeführt, die sonst nur im Weltraum möglich sind. So können für Kurzzeitexperimente die hohen Kosten einer Weltraumexpedition eingespart werden. In dem 110 m hohen Rohr des Turms wird eine Fallkapsel hochgezogen und losgelassen.

Während des freien Falls von knapp fünf Sekunden herrscht in der Kapsel Schwerelosigkeit. Das Fallrohr wird luftleer gepumpt, um Störungen durch Luftreibung zu vermeiden.

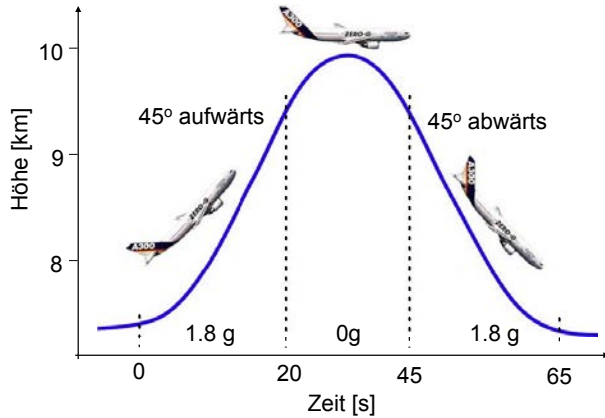


Abbildung 2.104: Prinzip des Parabelfluges.

Längere Zeiten von Schwerelosigkeit kann man in Spezialflugzeugen von NASA und ESA erleben, oder bei der Firma "Go Zero g". Wie in Abb. 2.104 gezeigt, fliegen diese Flugzeuge steil nach oben und folgen dann für ca. 25 s einer Parabel. Dieser Teil der Flugbahn entspricht einer Wurfparabel, d.h. das Flugzeug fliegt mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit und einer vertikalen Beschleunigung nach unten von  $9,81 \text{ ms}^{-2}$ . Während dieser Zeit sind Passagiere und Ausrüstung praktisch schwerelos, wie in Abb. 2.105 gezeigt.



Abbildung 2.105: Schwerelosigkeit beim Parabelflug.

Während Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft von der Wahl des Bezugssystems abhän-

gen, gilt dies nicht für Abstände oder Geschwindigkeitsdifferenzen: diese sind im Rahmen der klassischen Mechanik nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängig.

## 2.8.5 Kreisbewegung

Ein Spezialfall der Bewegung in zwei (oder drei) Dimensionen ist die Kreisbewegung ( $\rightarrow$  Kap. 2.6.1).

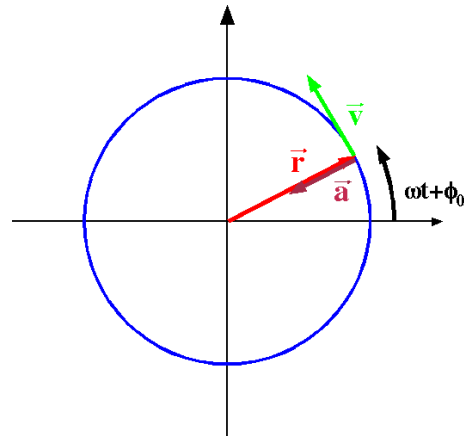


Abbildung 2.106: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung für einen Massenpunkt bei einer Kreisbewegung.

Häufig genügt es, wenn man die Kreisbewegung mit einer einzigen Koordinate beschreibt, dem Winkel  $\phi$  bezüglich der  $x$ -Achse, gemessen vom Zentrum des Kreises ( $\rightarrow$  Abb. 2.106). Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit  $\omega = d\phi/dt$  entspricht dann ebenfalls einer skalaren Größe. In drei Dimensionen wird sie als Vektor dargestellt, der senkrecht auf dem Kreis steht und mit der Drehbewegung zusammen eine Rechtsschraube bildet.

In 2 Dimensionen kann der Ortsvektor eines Punktes, welcher im drehenden Koordinatensystem in Ruhe ist, geschrieben werden als

$$\vec{r} = r_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}.$$

Somit beträgt die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega r_0 \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \phi_0) \\ \cos(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

und die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2 r_0 \begin{pmatrix} -\cos(\omega t + \phi_0) \\ -\sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix},$$

d.h. sie wirkt in radialer Richtung nach innen.

Offenbar ist eine Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung. Beschreibt man die Bewegung von Objekten in einem rotierenden Koordinatensystem, so haben deshalb die Newton'schen Axiome keine Gültigkeit, sondern es treten zusätzliche Kräfte auf, sogenannte Scheinkräfte.

### 2.8.6 Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem

Wir versuchen jetzt, die Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Bewegung im rotierenden System herzuleiten. Wir beschränken uns auf eine Ebene, die senkrecht zur Rotationsachse steht. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da die Bewegung parallel zur Achse durch die Rotation nicht beeinflusst wird.

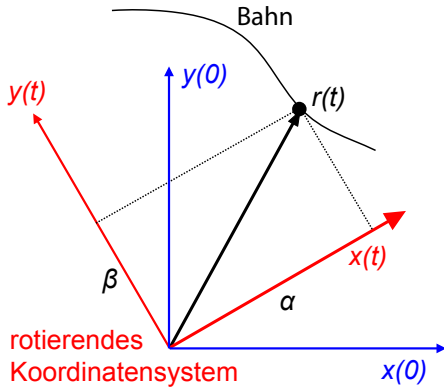


Abbildung 2.107: Bewegung in einem rotierenden Koordinatensystem.

Abb. 2.107 zeigt ein Koordinatensystem  $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$ , welches sich um die  $z$ -Achse dreht und einen Massenpunkt, der sich entlang einer Bahn  $\vec{r}(t)$  bewegt. Im rotierenden Koordinatensystem lautet der Ortsvektor des Massenpunktes

$$\vec{r} = \alpha(t)\vec{x}(t) + \beta(t)\vec{y}(t).$$

Sowohl die Koordinaten  $\alpha(t), \beta(t)$  wie auch die Achsen  $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$  sind hier im Allgemeinen zeitabhängig. Die Geschwindigkeit erhält man wie üblich durch Ableiten:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}[\alpha(t)\vec{x}(t) + \beta(t)\vec{y}(t)].$$

Die Rotation der Koordinatenachsen kann beschrieben werden als

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{x}(0)\cos\omega t + \vec{y}(0)\sin\omega t \\ \vec{y}(t) &= \vec{y}(0)\cos\omega t - \vec{x}(0)\sin\omega t.\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Massenpunkts ist demnach

$$\vec{v}(t) = \dot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \dot{\beta}(t)\vec{y}(t) + \alpha(t)\dot{\vec{x}}(t) + \beta(t)\dot{\vec{y}}(t).$$

Die zeitlichen Ableitungen der Koordinatenachsen sind

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= -\vec{x}(0)\omega\sin(\omega t) + \vec{y}(0)\omega\cos(\omega t) \\ &= \omega\vec{y}(t). \\ \dot{\vec{y}}(t) &= -\vec{y}(0)\omega\sin(\omega t) - \vec{x}(0)\omega\cos(\omega t) \\ &= -\omega\vec{x}(t).\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \dot{\beta}(t)\vec{y}(t) + \omega[\alpha(t)\vec{y}(t) - \beta(t)\vec{x}(t)].$$

Der erste Term besitzt die gleiche Form wie in einem Inertialsystem. Der zusätzliche zweite Term berücksichtigt die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren. Er tritt auch dann auf, wenn  $\alpha(t) = \alpha(0)$  und  $\beta(t) = \beta(0)$ , d.h. wenn sich der Punkt gegenüber dem rotierenden Koordinatensystem nicht bewegt.

### 2.8.7 Scheinkräfte im rotierenden Koordinatensystem

Nach dem gleichen Verfahren können wir die Beschleunigung berechnen:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) =$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \dot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \dot{\beta}(t)\vec{y}(t) + \omega[\alpha(t)\vec{y}(t) - \beta(t)\vec{x}(t)] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ddot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \omega\dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) + \ddot{\beta}(t)\vec{y}(t) - \omega\dot{\beta}(t)\vec{x}(t) \\
 &\quad + \omega[\dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) - \dot{\beta}(t)\vec{x}(t)] \\
 &\quad + \omega^2[-\alpha(t)\vec{x}(t) - \beta(t)\vec{y}(t)] \\
 &= \ddot{\alpha}(t)\vec{x}(t) + \ddot{\beta}(t)\vec{y}(t) + 2\omega[\dot{\alpha}(t)\vec{y}(t) - \dot{\beta}(t)\vec{x}(t)] \\
 &\quad + \omega^2[-\alpha(t)\vec{x}(t) - \beta(t)\vec{y}(t)].
 \end{aligned}$$

Der gleiche Sachverhalt kann auch etwas kompakter geschrieben werden wenn wir die Vektoren

$$\vec{r} = (\alpha, \beta, 0),$$

$$\vec{v} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, 0),$$

$$\vec{a} = (\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, 0),$$

eingeführen, d.h. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, sowie den Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega).$$

Damit wird

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \omega^2 \vec{r}.$$

Wir können diese Gleichung natürlich auch nach der Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem auflösen:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \omega^2 \vec{r}. \quad (2.16)$$

Der erste Term entspricht der Beschleunigung im Inertialsystem. Für ein kräftefreies System verschwindet er nach dem Grundgesetz der Mechanik. Beschreibt man die Bewegung eines kräftefreien Körpers im Inertialsystem, so verschwindet die Beschleunigung und der entsprechende Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit tangential vom Kreis weg.

Die beiden anderen Terme in (2.16) beschreiben eine Beschleunigung im rotierenden Koordinatensystem, welche nicht von äußeren Kräften bestimmt wird; sie werden deshalb als Scheinkräfte bezeichnet. Der mittlere Term ist proportional zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Massenpunktes im rotierenden Koordinatensystem und zur Rotationsgeschwindigkeit des Systems. Der dritte Term ist proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, und zum Abstand  $\vec{r}$  von der Drehachse.

## 2.8.8 Zentrifugalkraft

Der letzte Term entspricht der Zentrifugalbeschleunigung (resp. Zentrifugalkraft). Sie muss durch eine gleich große Zentripetalkraft kompensiert werden wenn der Massenpunkt im rotierenden Koordinatensystem am Ort bleiben soll. Der Betrag ist

$$|F| = m|a| = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}.$$

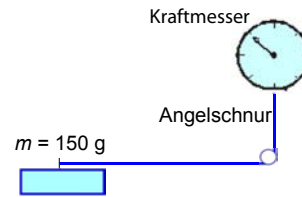


Abbildung 2.108: Messung der Zentrifugalkraft auf eine rotierende Masse.

Die Zentrifugalkraft kann auch experimentell gemessen werden, wie in Abb. 2.108 gezeigt. Man lässt dazu ein Gewicht um einen Punkt rotieren und misst, über eine Umlenkung, die Kraft, mit der das Gewicht an der Schnur nach außen zieht.

Im Experiment wurden folgende Werte gefunden:

| Radius<br>cm | Kraft<br>N | Periode<br>s | $\omega$<br>s <sup>-1</sup> | $m\omega^2 r$<br>ms <sup>-2</sup> |
|--------------|------------|--------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| 31,5         | 0,15       | 3,6          | 1,75                        | 0,14                              |
| 33           | 0,3        | 2,7          | 2,33                        | 0,27                              |
| 38,8         | 0,75       | 1,7          | 3,7                         | 0,8                               |

Offenbar stimmen die gerechneten Werte in der letzten Spalte im Rahmen der Messgenauigkeit mit den gemessenen Werten in der zweiten Spalte überein.

Die Beschleunigungskräfte können auch in Flüssigkeiten gemessen werden. Abb. 2.109 zeigt als Beispiel eine rotierende Küvette, in der die eingeschlossene Flüssigkeit eine Parabelform annimmt, wenn die Küvette um die vertikale Achse rotiert wird.

Abb. 2.110 erläutert den Effekt. Die Oberfläche der Flüssigkeit wird durch die Gleichgewichtsbedingung definiert, dass die Kraft auf die Moleküle an der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche sein muss ( $\rightarrow$  Kapitel 2.9.3). Sie setzt sich zusammen aus der

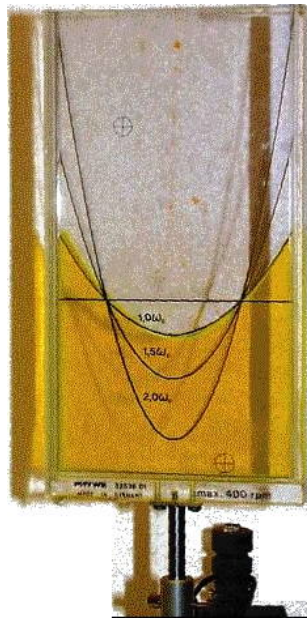


Abbildung 2.109: Zentrifugalküvette.

Gewichtskraft (unabhängig vom Abstand von der Rotationsachse) und der Zentrifugalkraft ( $\sim r^2$ ). Somit ist die Steigung der Oberfläche proportional zur Zentrifugalkraft. Damit erhält man folgende Form für die Oberfläche:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Offenbar bildet die Oberfläche eine Parabel. Dies kann im Experiment gut bestätigt werden. Außerdem können wir die Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit semi-quantitativ verifizieren.

### 2.8.9 Beispiele

Die Zentrifugalkraft wirkt auf alle Körper proportional zu ihrer Masse. Sie wird u.a. dazu verwendet, um Suspensionen zu trennen, indem man diese in eine Zentrifuge lädt. Ultrazentrifugen erzeugen Kräfte bis zu  $10^6 g$ .

In der Kernspinresonanz (NMR) verwendet man ebenfalls sehr schnelle Drehungen: Man rotiert Proben mit bis zu 120 kHz um ihre eigene Achse, um ausgemittelte Spektren zu erhalten. Bei typischen

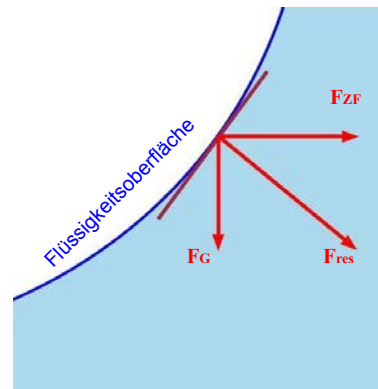


Abbildung 2.110: Kräftegleichgewicht an der Flüssigkeitsoberfläche.

Zahlen von  $\nu_r = 12 \text{ kHz}$ ,  $d = 5 \text{ mm}$  erhält man

$$\begin{aligned} a_{ZF} &= (2\pi \cdot 1,2 \cdot 10^4)^2 s^{-2} 2\text{mm} = 1,1 \cdot 10^7 \text{m/s}^2 \\ &= 1,2 \cdot 10^6 g, \end{aligned}$$

also mehr als 1 Million mal die Erdbeschleunigung.

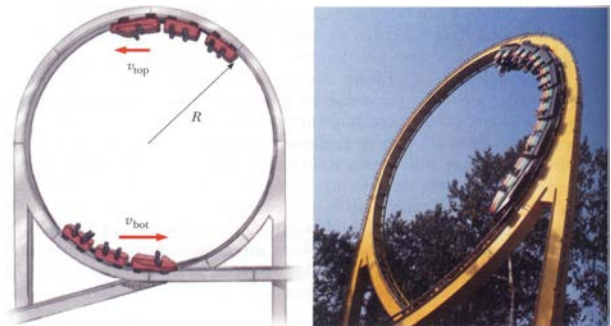


Abbildung 2.111: Loopingbahn.

Die Zentrifugalkraft wird auch in vielen spielerischen Anwendungen genutzt, wie z.B. bei einer Achterbahn wie in Abb. 2.111 und 2.112. In Experiment von Abb. 2.112 kann man messen, wie schnell ein Fahrzeug durch den Looping fahren muss um nicht herunterzufallen. Dafür muss am höchsten Punkt die Zentrifugalkraft gerade die Erdbeschleunigung kompensieren. Die explizite Rechnung wird in den Übungen durchgeführt.

Abb. 2.113 zeigt eine Sportart, bei der die Zentrifugalkraft die Geschwindigkeit beschränkt. Die Zentrifugalbeschleunigung kann hier direkt gemessen werden an der Neigung der Sportler: Die Summe aus



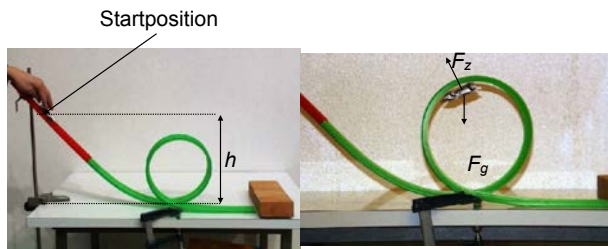


Abbildung 2.112: Experiment zur Loopingbahn: fällt der Wagen herunter?



Abbildung 2.113: Eisschnellläufer in einer Kurve.

Gewichtskraft und Zentrifugalkraft muss entlang der Körperachse wirken, damit die Läufer stabil um die Kurve fahren.

Wir betrachten als Beispiel eine sich drehende Scheibe, auf der ein Körper liegt. So lange sich dieser mit der Scheibe dreht, führt er offenbar eine beschleunigte Bewegung durch. In einem Koordinatensystem, welches an die Scheibe gekoppelt ist, ist er jedoch in Ruhe, d.h. nach Newton's Axiom dürfte keine Kraft auf ihn wirken. Lässt man ihn los, so dreht sich das Bild: im Ruhesystem ist er jetzt kräftefrei und führt deshalb eine gradlinige Bewegung durch (tangential zur Scheibe). Im rotierenden Koordinatensystem beginnt er zunächst, sich radial nach außen zu bewegen und führt dann eine gekrümmte Bewegung aus; gemäß Newtons Axiom müssen somit Kräfte auf den Körper wirken. Die Bewegung im rotierenden Koordinatensystem wird aufgezeichnet, indem man die Kugel über ein Kohlepapier rollen lässt.

### 2.8.10 Corioliskraft

Wenn ein Körper sich auf einer rotierenden Scheibe bewegt, so wird er durch die Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt. Er folgt jedoch keiner geradlinigen Bahn, sondern diese ist gekrümmt. Verantwortlich dafür ist die zweite Scheinkraft, die als Corioliskraft bezeichnet wird, nach dem französischen Physiker Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843). Die Corioliskraft kann geschrieben werden als

$$\vec{F}_C = 2\vec{p} \times \vec{\omega},$$

wobei der Impuls sich auf das rotierende Koordinatensystem bezieht. Er führt dazu, dass die Bewegung von reibungsfreien Körpern in einem rotierenden Koordinatensystem gekrümmt ist, falls die Bewegung eine Komponente senkrecht zur Rotationsachse aufweist.

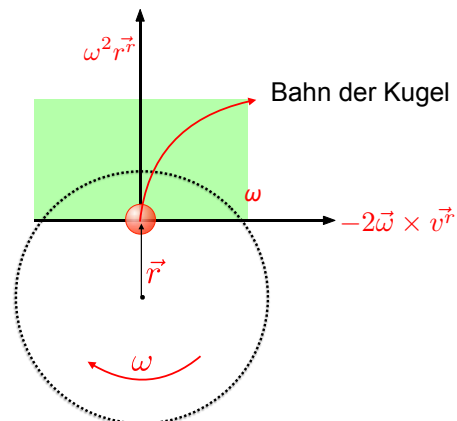


Abbildung 2.114: Zentrifugal- und Corioliskraft im Drehstuhl.

Abb. 2.114 zeigt die Richtung der beiden Scheinkräfte für eine Kugel, die zu Beginn radial nach außen rollt. Die Corioliskraft ist proportional zur Geschwindigkeit des bewegten Körpers und zur Winkelgeschwindigkeit des Systems, wobei nur die senkrechte Komponente beiträgt. Wenn der Körper aufgrund der Zentrifugalkraft nach außen beschleunigt wird, setzt auch die Corioliskraft ein, welche proportional zur Geschwindigkeit ist und senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt, d.h. die Bahn biegt. Der Effekt der beiden Kräfte ist eine spiralförmige Bewegung nach außen.

Die gleichen Kräfte treten z.B. auch bei Bewegungen auf der Erdoberfläche auf. Hier ist die Corioliskraft z.B. für die Ablenkung der Windsysteme verantwortlich. Gäbe es keine Erdrotation so würden die Winde direkt in Richtung des Zentrums eines Tiefdruckgebietes blasen. Aufgrund der Erdrotation wird bewegte Luft jedoch abgelenkt. Die Richtung wird durch das Vektorprodukt  $\vec{v} \times \vec{\omega}$  bestimmt. Der Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\omega}$  zeigt auf der Erde nach Norden. Auf der Nordhalbkugel werden die Winde nach rechts abgelenkt. Dies ist der Grund für die dominanten Westwinde in unseren Breitengraden: es handelt sich um Luft, die aus den Hochdruckgebieten im Bereich der Sahara nach Norden fließt und dabei durch die Corioliskraft nach Osten abgelenkt wird.

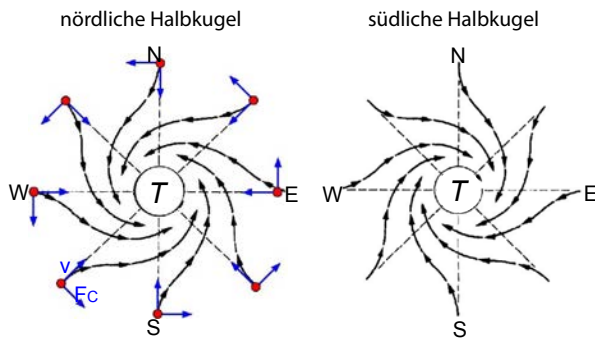


Abbildung 2.115: Windrichtung von Tiefdruckgebieten auf der nördlichen, resp. südlichen Halbkugel.

Gleichzeitig führt die Corioliskraft dazu, dass Luft nicht gerade in ein Tiefdruckgebiet hinein fließt, sondern sich im Gegenuhrzeigersinn darum dreht. Auf der Südhalbkugel wechselt das Vorzeichen von  $\vec{v} \times \vec{\omega}$ , die Winde werden nach links abgelenkt und drehen sich im Uhrzeigersinn um die Tiefdruckgebiete. Abb. 2.115 zeigt die Situation für beide Fälle.

Die resultierende Drehung der Tiefdruckgebiete ist praktisch in jeder Wetterkarte sichtbar. Abb. 2.116 zeigt als Beispiel einen Hurrikan über dem südöstlichen Teil der USA.

Ebenso kann die Drehung der Pendelebene beim Foucault'schen Pendel als Effekt der Coriolis-Kraft verstanden werden. Die Geschwindigkeit der Pendelmasse ist näherungsweise parallel zur Erdober-

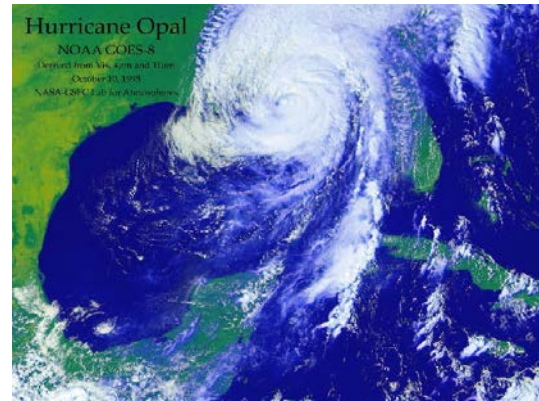


Abbildung 2.116: Hurrikan.

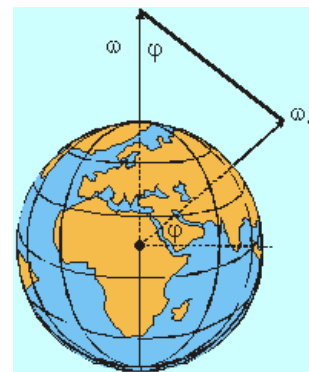


Abbildung 2.117: Das Foucault'sche Pendel.

fläche, während der Rotationsvektor  $\vec{\omega}$  parallel zur Süd-Nord Achse der Erde steht. Die Projektion des Vektorprodukts  $\vec{v} \times \vec{\omega}$  in die Horizontale hat den Betrag

$$F_C = -2m\omega v(t) \sin \varphi,$$

wobei  $\varphi$  die geographische Breite darstellt. Somit variiert die Präzessionsgeschwindigkeit mit  $\sin \varphi$ . An den Polen dreht sich dadurch die Schwingungsebene in 24 Stunden einmal um  $360^\circ$ . In Dortmund dauert eine Rotation gegenüber dem terrestrischen Bezugssystem rund 30,67 Stunden.

### 2.8.11 Die Einstein'sche Relativitätstheorie

Nach der Galilei'schen Relativitätstheorie erhält man unterschiedliche Messresultate für die Geschwindigkeit eines Körpers, wenn man sie in unter-

schiedlichen Bezugssystemen misst, welche sich gegeneinander bewegen. Galilei versuchte als einer der ersten, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht zu messen. Er verwendete dafür Laternen und eine Messstrecke von 15 km. Um diese Distanz zweimal zurück zu legen, benötigt Licht rund  $10^{-4}$  Sekunden. Seine Messung konnte deshalb nur eine untere Grenze liefern. Die erste erfolgreiche Messung wurde von Ole Römer 1676 durchgeführt, indem er die Verdunkelungsperioden der Jupitermonde maß. Er fand einen Wert von 240000 km/s. Die erste rein terrestrische Messung wurde 1849 von Fizeau durchgeführt; er verwendete ähnlich wie Galilei eine Messstrecke, die von Licht zweimal durchlaufen wurde, aber anstelle von Menschen ein schnell drehendes Zahnrad.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts versuchte man, die Lichtgeschwindigkeit in unterschiedlichen Bezugssystemen zu messen. Damals ging man davon aus, dass Licht sich in einem Medium namens Äther ausbreitet, welches sowohl im Vakuum wie auch in optisch transparenten Materialien vorhanden sei. Messungen der Lichtgeschwindigkeit sollten deshalb Informationen darüber liefern, wie sich z.B. die Erde gegenüber dem Äther bewegt. Es wurden entsprechend sorgfältige Messungen durchgeführt, z.B. von Michelson und Morley ab 1881. Die Resultate zeigten jedoch keine messbare Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit. Zum Beispiel ist die Geschwindigkeit des Lichts von einem Stern unabhängig davon, ob sich die Erde auf den Stern zu- oder wegbewegt. In einer 1905 veröffentlichten Arbeit beschrieb Albert Einstein die Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Sie sind Gegenstand der "speziellen Relativitätstheorie" und weicht in einigen Punkten ab von der Galilei'schen Theorie. Insbesondere die folgenden Grundvoraussetzungen der Galilei'schen Theorie gelten nur noch im Grenzfall niedriger Geschwindigkeiten:

- Die Zeit ist absolut und unveränderlich und hängt nicht von der Bewegung und dem Ort ab.
- Es gibt einen "absoluten Raum", d.h. ein absolut ruhendes System, in dem alle Bewegungsabläufe stattfinden.
- Die Eigenschaft "Masse" eines Körpers geht nie verloren oder entsteht aus dem Nichts. Mas-

se ist unabhängig vom Bewegungszustand und bleibt erhalten.

Die Grundannahme der speziellen Relativitätstheorie ist, dass die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

in allen möglichen Bezugssystemen konstant ist. Im Rahmen der Galilei'schen Relativitätstheorie ist dies nicht möglich. Die Transformationsgleichungen zwischen den Koordinatensystemen müssen deshalb modifiziert werden. Die entsprechenden Gleichungen werden als Lorentz-Transformation bezeichnet. Für eine Relativgeschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung lauten die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Hier stellt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

den Lorentz-Faktor dar und

$$\beta = \frac{v}{c}$$

ist das Verhältnis zwischen der Relativgeschwindigkeit  $v$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Für  $v \ll c$ , d.h.  $\beta \ll 1$  und  $\gamma \rightarrow 1$  geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.

Die spezielle Relativitätstheorie kann im Wesentlichen folgende Effekte erklären:

**Lorentzkontraktion:** In zwei gegeneinander bewegten Bezugssystemen erscheinen<sup>3</sup> die im jeweils anderen System ruhenden Maßstäbe verkürzt.

**Zeitdilatation:** In zwei gegeneinander bewegten Bezugssystemen erscheint die Zeit des jeweils anderen Systems verlangsamt.

<sup>3</sup>"erscheint" ist hier nicht im Sinn einer Täuschung gemeint, sondern es handelt sich um messbare Tatsachen.

Relativistischer Dopplereffekt: Das Licht von Sternen, die sich von uns entfernen, erscheint rotverschoben.

Relativistische Massenzunahme: Die Lichtgeschwindigkeit kann von Körpern mit Masse nicht erreicht werden. Bei gleicher Kraft ist die Beschleunigung um so kleiner, je größer die Geschwindigkeit ist. Dies kann als Zunahme der Masse gedeutet werden:  $m = m_0 \gamma$ .

Zwillingsparadoxon: Ein Zwilling begibt sich auf einen Raumflug, der andere bleibt auf der Erde. Man kann nachrechnen, dass der Raumfahrer bei seiner Rückkehr weniger gealtert ist als der andere Zwilling. Dies wurde 1971 mit Atomuhren bestätigt, die auf Linienflugzeugen mitgenommen wurden.

Die 1916 von Einstein vorgestellte "allgemeine Relativitätstheorie" ist eine Beschreibung der Gravitation als Raumkrümmung in der Umgebung von Massen und beruht auf der Äquivalenz von schwerer und träger Masse.

## 2.9 Hydrostatik

### 2.9.1 Aggregatzustände

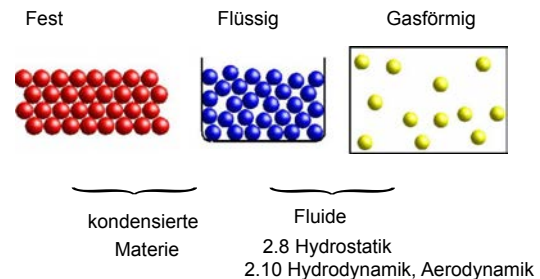


Abbildung 2.118: Die drei wichtigsten Aggregatzustände.

Die drei wichtigsten Aggregatzustände sind Festkörper, Flüssigkeiten und Gase ( $\rightarrow$  Abb. 2.118). Die wesentlichsten Unterscheidungsmerkmale sind, dass Festkörper eine Gestalt haben; diese kann unter dem Einfluss einer äußeren Kraft ändern, so lange diese Kraft nicht zu groß wird kehrt der Körper jedoch nach Nachlassen der äußeren Kraft in die ursprüngliche Form zurück; man nennt dies Formgedächtnis. Eine Flüssigkeit besitzt keine bestimmte Form, sie nimmt jedoch ein definiertes Volumen ein. Unter dem Einfluss einer äußeren Kraft kann dieses Volumen kleiner werden; nach Entfernen der Kraft dehnt sich die Flüssigkeit wieder aus bis sie das ursprüngliche Volumen wieder einnimmt. Man bezeichnet dies als Volumengedächtnis. Ein Gas füllt im Gegensatz dazu immer das gesamte verfügbare Volumen.

Man fasst Festkörper und Flüssigkeiten unter dem Begriff "kondensierte Materie" zusammen; Flüssigkeiten und Gase werden unter dem Begriff "Fluide" zusammengefasst.

Diese Eigenschaften sind jedoch nicht absolut scharf: Auch Eis, oder sogar Steine, die üblicherweise als Festkörper bezeichnet werden, haben die Tendenz, unter hohem Druck und über lange Zeiten zu fließen. Außerdem gibt es eine Reihe von Substanzen, die sich nur schlecht in dieses Schema einordnen lassen: Granulare Medien (z.B. Zucker, Sand) bestehen aus vielen festen Körpern, aber als gesamte Medien zeigen sie typisches Fließverhalten. Gläser sind unterkühlte Flüssigkeiten, die sich für viele

Belange wie Festkörper verhalten.

## 2.9.2 Spannung

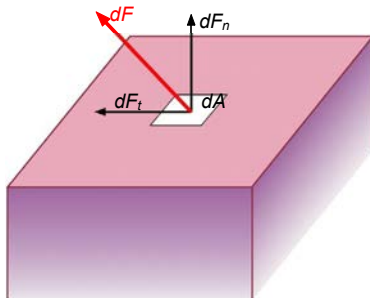


Abbildung 2.119: Spannung als Quotient aus Kraft und Fläche; Zerlegung in Normal- und Schubspannung.

Spannung ist definiert als Kraft pro Fläche,

$$S = \frac{dF}{dA} \quad [S] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} = \text{Pascal}.$$

Wie in Abb. 2.119 gezeigt, kann eine allgemeine Spannung zerlegt werden in eine Normalspannung  $\sigma$  und eine Tangential- (Schub-) Spannung  $\tau$ :

$$\vec{S} = S_{\perp} + S_{\parallel} = \sigma + \tau = \frac{dF_n}{dA} + \frac{dF_t}{dA}.$$

Die Normalspannung wirkt senkrecht zur Fläche, die Schubspannung parallel dazu. Liegt z.B. ein Körper mit einer Fläche  $A$  auf einer horizontalen Unterlage, so wirkt die Normalspannung

$$S_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{mg}{A}.$$

Mit Hilfe dieser Klassifizierung kann man den Unterschied zwischen Fluiden und Festkörpern so formulieren: Bei Fluiden verschwindet der Schermodul, es treten also (im statischen Grenzfall) keine Scherspannungen auf.

## 2.9.3 Flüssigkeitsoberfläche

Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist immer senkrecht zu der Richtung der auf sie wirkenden Kraft, wie in Abb. 2.120 gezeigt. Würde sich

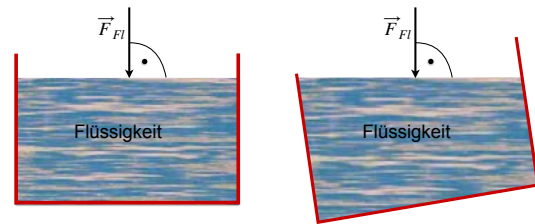


Abbildung 2.120: Die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist immer senkrecht zu der Richtung der auf sie wirkenden Kraft.

ein Flssigkeitshgel bilden, dann hätte er eine höhere potentielle Energie als seine Umgebung. Um sie zu minimieren, versuchen alle Flüssigkeitsvolumina die tiefst-möglichen Positionen einzunehmen. Dies ist erfüllt, wenn die Oberfläche eine horizontale Ebene bildet. Bei Festkörpern wird dieses „Zerfließen“ durch Reibung oder innere Kräfte verhindert.

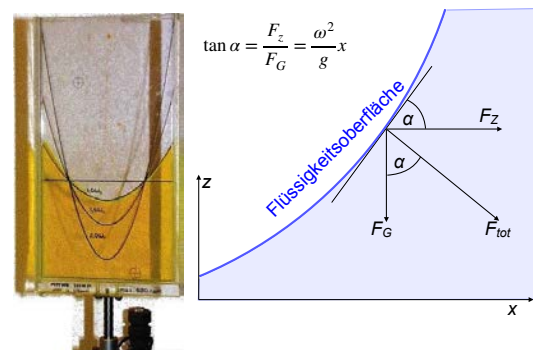


Abbildung 2.121: Flüssigkeitsoberfläche in einer rotierenden Küvette.

Dies kann auch zur Messung der Kraft verwendet werden. Abb. 2.121 zeigt als Beispiel die Flüssigkeitsoberfläche in einer rotierenden Küvette. Für die Berechnung der Oberfläche verwendet man die Bedingung, dass die resultierende Kraft auf ein Flüssigkeitselement immer senkrecht zur Oberfläche steht. Die Kraft auf ein Volumenelement ist gegeben durch die Vektorsumme aus Schwerkraft

$$F_G = mg$$

und Zentrifugalkraft

$$F_Z = mx\omega^2.$$



Die Zentrifugalkraft wirkt in radialer Richtung ( $x$  im Koordinatensystem) und die Schwerkraft in vertikaler Richtung. Damit bildet die resultierende Kraft mit der Vertikalen einen Winkel  $\alpha$ , gegeben durch

$$\tan \alpha = \frac{F_z}{F_G} = \frac{\omega^2}{g} x.$$

Die Steigung nimmt somit mit dem Abstand  $x$  von der Drehachse zu und die Oberfläche selber folgt der Funktion

$$h(x) = \int_0^x \tan \alpha dx = \int_0^x \frac{\omega^2}{g} x dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

also einer Parabel.

### 2.9.4 Hydrostatischer Druck

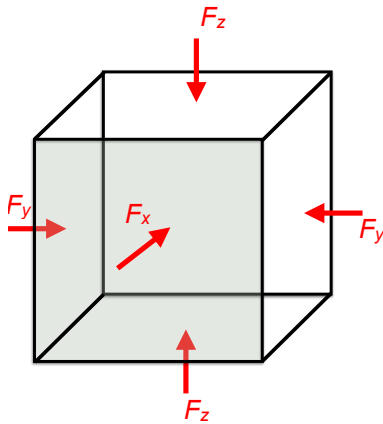


Abbildung 2.122: Hydrostatischer Druck.

Man spricht von hydrostatischem Druck, wenn die Normalspannung aus allen Raumrichtungen gleich ist und die Scherspannung verschwindet. Wie in Abb. 2.122 gezeigt sind dann die Kräfte auf die Seiten eines infinitesimalen Würfels alle gleich groß,  $F_x = F_y = F_z$ . Man verwendet dann anstelle von Spannungen die skalare Größe Druck und verwendet das Symbol  $p$ . Spannungen allgemein und damit auch der Druck werden im SI System in der Einheit Pascal = N/m<sup>2</sup> gemessen. Normaldruck, d.h. der mittlere Luftdruck auf Meereshöhe, (1 atm) entspricht ca. 10<sup>5</sup> N/m<sup>2</sup>. Nach DIN ist der Normaldruck 101325 Pa (=760 mm Hg), ebenso in der Medizin, nach IUPAC 100000 Pa.

Ist die vertikale Ausdehnung eines Systems von Rohren klein, so herrscht innerhalb im Gleichgewicht überall derselbe Druck. Dies kann man u.A. für die Übertragung und Umwandlung von Kräften verwenden.

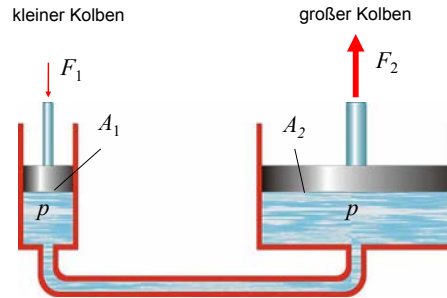


Abbildung 2.123: Hydraulische Presse.

Damit gilt für die beiden Kolben in Abb. 2.123

$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}.$$

Somit lassen sich auch kleine Kräfte  $F_1$  in sehr große Kräfte  $F_2$  umwandeln, sofern das Flächenverhältnis  $A_2/A_1$  entsprechend gewählt wird. Die Wege, die dabei zurückgelegt werden, verhalten sich genau entgegengesetzt.

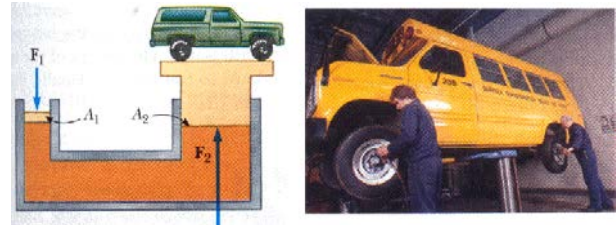


Abbildung 2.124: Hydraulischer Lift.

Auf diese Weise werden z.B. mit hydraulischen Pressen große Kräfte erzeugt (→ Abb. 2.124).

### 2.9.5 Schweredruck

Bei tiefen Flüssigkeiten und Gasen tritt ein Schweredruck auf: zusätzlich zum Außendruck wirkt an jeder Stelle die Gewichtskraft der darüber liegenden Flüssigkeit. Die Gewichtskraft einer Flüssigkeitssäule mit Querschnittsfläche  $A$ , Dichte  $\rho$  und

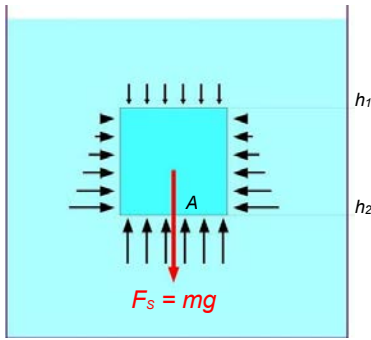


Abbildung 2.125: Berechnung des Schweredrucks.

Höhe  $h = h_1 - h_2$  ( $\rightarrow$  Abb. 2.125) beträgt

$$F_S = mg = V \rho g = A h \rho g.$$

Wenn sich das in Abb. 2.125 markierte Volumenelement im Gleichgewicht befindet, muss diese Gewichtskraft  $F_S$  durch eine entsprechende Kraft kompensiert werden, welche auf die Unterseite des Volumenelements wirkt, zusätzlich zur Kraft, welche diejenige auf die Oberseite kompensiert. Der Druckunterschied zwischen oben und unten muss somit

$$p_S = \frac{F_S}{A} = h \rho g$$

sein. Dieser Druckbeitrag wird als Schweredruck bezeichnet.

Der gesamte hydrostatische Druck  $p(z)$  ist demnach

$$p(z) = p_a + z \rho g, \quad (2.17)$$

wobei  $p_a$  den Außendruck an der Oberfläche darstellt und  $z$  die Distanz zur Oberfläche. Der Druck ist somit nur abhängig von der Dichte der Flüssigkeit und von der Höhe der Flüssigkeitssäule. Für den Fall von Wasser gilt

$$\begin{aligned} \rho_w g &= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \\ &= 0,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N/m}^2}{\text{m}} \approx 0,1 \frac{\text{atm}}{\text{m}}, \end{aligned}$$

d.h. der Druck nimmt pro 10 m Tiefe um 1 atm ( $\approx 10^5 \text{ N/m}^2$ ) zu. Innerhalb des Systems ist der Druck

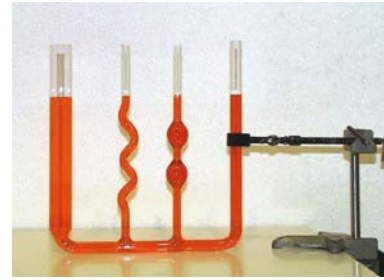


Abbildung 2.126: Kommunizierende Röhren.

nur von der Höhe abhängig, nicht vom (horizontalen) Ort. Dieses Prinzip gilt für alle unbewegten Fluide.

Eine Konsequenz davon ist, dass die Flüssigkeit in einem System von verbundenen (=“kommunizierenden”) Röhren überall bis zur gleichen Höhe aufsteigt, unabhängig vom Querschnitt und Form der Röhre. Abb. 2.126 zeigt dies für ein System von verbundenen Glasgefäßen.

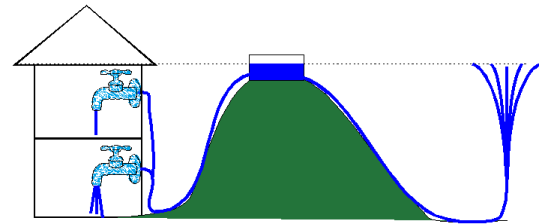


Abbildung 2.127: Druckverteilung im Wasserrohr-Netz.

Die gleichmäßige Verteilung des Drucks in einem System von Röhren wird verwendet, um den Wasserdruck in der städtischen Wasserversorgung sicherzustellen: Wie in Abb. 2.127 gezeigt, muss das Reservoir mindestens so hoch liegen wie das höchste Haus. Eine Erweiterung dieses Prinzip ist, dass man - in einer gewissen Näherung - die Röhre auch weglassen darf: Eine Fontäne erreicht die Höhe des Wasserspiegels im Reservoir.

Es ist jedoch auch möglich, einen Springbrunnen zu bauen, dessen Fontäne höher steigt als die Wasseroberfläche des Reservoirs. Wie in Abb. 2.128 gezeigt, wird dafür auf einem Teil der Strecke der Druck nicht durch Wasser übertragen, sondern durch Luft. Der Schweredruck der Luft ist fast tausendmal geringer als derjenige des Wassers und kann deshalb

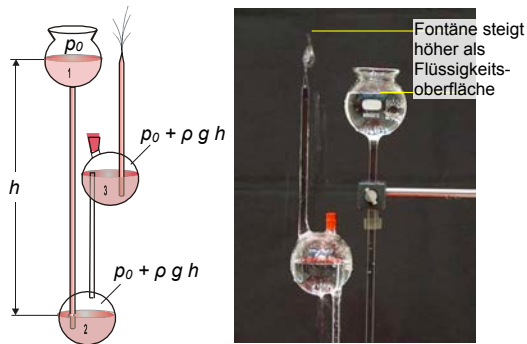


Abbildung 2.128: Hero's Springbrunnen.

praktisch vernachlässigt werden. Dadurch steigt die Fontäne entsprechend höher. Das Prinzip wurde von Heron von Alexandria (wahrscheinlich 1. Jhd nach Chr.).

### 2.9.6 Hydrostatischer Druck in Gasen

Im Falle von Gasen ist die Dichte abhängig vom Druck. Die Druckzunahme ist deshalb nicht mehr proportional zur Höhe der Gas-Säule. Für die Berechnung der Höhenabhängigkeit des Druckes in der Atmosphäre betrachtet man zunächst eine Schicht, welche so dünn ist, dass die Dichte noch als konstant betrachtet werden kann. Die Druckänderung durch diese Schicht ist dann wie bei einer Flüssigkeit

$$dp = -\rho g dh,$$

wobei  $h$  nach oben zunimmt und somit der Druck abnimmt. Für ein ideales Gas gilt bei konstanter Temperatur:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \text{ (Boyle – Mariotte Gesetz),}$$

mit  $p_0$  als Referenzdruck und  $\rho_0$  als Referenzdichte. Damit wird

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dh.$$

Trennung der Variablen und Integration ergibt

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh = \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} gh$$

oder

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} gh\right),$$

d.h. der Druck nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab.

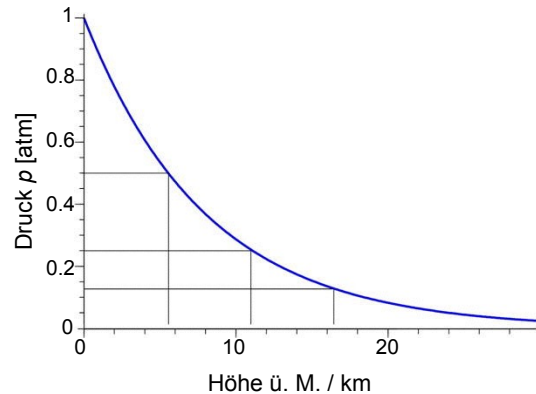


Abbildung 2.129: Atmosphärischer Druck als Funktion der Höhe.

Numerische Werte für diese Parameter sind für Normalatmosphäre ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ )  $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$ . Damit hat das Produkt  $\rho_0 g / p_0$  den numerischen Wert  $1,254 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$  oder

$$p = p_0 e^{-h/8 \text{ km}}.$$

Interessant dabei ist, dass die Druckabnahme mit der Höhe rein aus Messungen an der Erdoberfläche berechnet werden kann. Abb. 2.129 zeigt den Druck als Funktion der Höhe. Er fällt pro 8 km Höhe auf  $1/e$  oder pro 5,5 km auf die Hälfte ab. In Wirklichkeit variieren sowohl die Temperatur wie auch die Zusammensetzung der Erdatmosphäre mit der Höhe. Die obige Formel gibt aber eine gute Näherung für das tatsächliche Verhalten.

### 2.9.7 Das Prinzip von Archimedes

Ein Effekt des Schweredruckes ist, dass das scheinbare Gewicht eines Körpers in einer Flüssigkeit geringer ist als im Vakuum. Dies wird als Auftrieb bezeichnet. Typische Anwendungen davon sind Schiffe oder andere Körper, welche auf dem Wasser schwimmen.

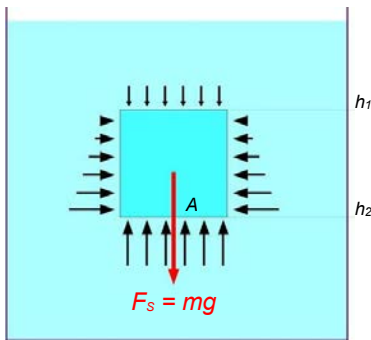


Abbildung 2.130: Auftrieb: der Druck auf die untere Fläche ist größer als auf die obere Fläche.

Dieser Effekt lässt sich relativ leicht am Beispiel eines Kubus in einer Flüssigkeit berechnen (→ Abb. 2.130). Der Druck auf die beiden Seitenflächen ist der gleiche; in horizontaler Richtung heben sich die Druckkräfte somit auf. Der Druck auf den Boden ist aber aufgrund des Schweredruckes größer als auf die obere Fläche. Damit erhält man eine resultierende Druckkraft auf den Körper, die nach oben wirkt. Die resultierende Kraft kann direkt aus der Druckdifferenz berechnet werden, welche durch den Schweredruck (2.17) erzeugt wird:

$$\begin{aligned} F_A &= F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) \\ &= A\rho_f g(h_2 - h_1) = \rho_f gV \\ &= m_{\text{verdrängt}}g = F_{G,\text{verdrängt}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$



Abbildung 2.131: Archimedes von Syrakus (287 - 212 v. Chr.).

Gleichung (2.18) beschreibt das Prinzip von Archi-

medes:

Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Dieses Resultat wurde hier für einen Kubus hergeleitet. Das Resultat ist aber allgemein gültig, unabhängig von der Form des Körpers. Dieses Gesetz wurde zuerst von Archimedes (→ Abb. 2.131) formuliert und wird deshalb als Prinzip von Archimedes bezeichnet. Es ist eines der ältesten immer noch gültigen physikalischen Gesetze.

## 2.9.8 Auftriebsmessungen

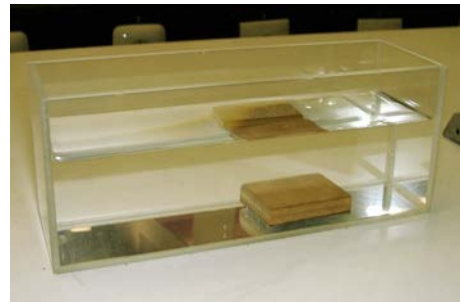


Abbildung 2.132: Der Holzblock klebt am Boden des Wassertanks.

Man kann die Kraft auf die Unterseite eliminieren, indem man den Körper so auf dem Boden drückt, dass keine Flüssigkeit darunter bleibt. Abb. 2.132 zeigt einen Holzblock, der am Boden des mit Wasser gefüllten Glasgefäßes klebt. Weil unter dem Körper kein Wasser ist, wirkt dort ein hydrostatischer Druck, der Körper erfährt keinen Auftrieb. Erst nach einer gewissen Zeit gelangt Wasser wieder darunter und erzeugt Auftrieb.

Der Auftrieb reduziert das Gewicht des schwimmenden Körpers. Dabei steigt jedoch der Flüssigkeitsspiegel und damit der Schweredruck, der auf den Boden des Gefäßes wirkt. Die Gewichtskraft des schwimmenden Körpers wird somit auf den Boden des Gefäßes übertragen. Dies kann man z.B. mit der Wasserglaswippe nachweisen: Hier werden 2 teilweise mit Wasser gefüllte Bechergläser auf einer Waage im Gleichgewicht gehalten. Taucht man einen Finger in

eines der Bechergläser, so steigt dessen Wasseroberfläche und es wird schwerer als das auf der Gegenseite.

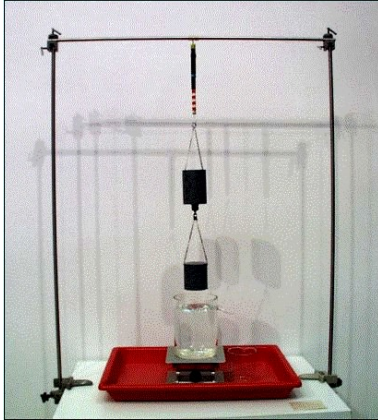


Abbildung 2.133: Messung des Auftriebs.

Der Auftrieb kann experimentell gemessen werden, indem man die Reduktion der Gewichtskraft misst, wenn der Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht wird ( $\rightarrow$  Abb. 2.133). Die verdrängte Flüssigkeitsmenge wird dadurch gemessen, dass sie in einem Becherglas aufgefangen wird. Wird sie anschließend in den oberen Behälter gegossen, welcher am gleichen Federkraftmesser hängt wie der Aluminiumblock, so misst man wieder die gleiche Kraft wie ohne die Wirkung des Auftriebs.

Eine Messung des Auftriebs kann auch dazu verwendet werden, um die Dichte eines Körpers zu bestimmen. Misst man sein Gewicht ohne Auftrieb, so ist es gegeben durch

$$F_G = mg = g\rho V.$$

Misst man das Gewicht mit Auftrieb in einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho_{Fl}$ , so erhält man

$$F_{G,A} = g(\rho - \rho_{Fl})V.$$

Das Verhältnis ist

$$\frac{F_{G,A}}{F_G} = \frac{\rho - \rho_{Fl}}{\rho}.$$

Somit ist die Dichte des Körpers

$$\rho = \frac{\rho_{Fl}}{1 - F_{G,A}/F_G}.$$

Der Legende nach nutzte Archimedes dies, um die Dichte des Metalls in der Krone von König Hieron II von Syrakus zu bestimmen. Beispiel: Das Gewicht betrage in Luft 13,5 N und in Wasser 12,214 N. Dies ergibt

$$\rho = \frac{1000}{1 - 12,214/13,5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10498 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Dies passt gut zur Dichte von Silber ( $\rho = 10,49 \text{ g/cm}^3$ ).

Ein wichtiges Beispiel ist Eis in Wasser. Die Dichte von Eis liegt bei etwa  $0,92 \text{ g/cm}^3$ . Deshalb schwimmt es auf dem Wasser, wobei rund 92% des Volumens eines Eisblocks unter Wasser sind.

Im Fall der cartesischen Taucher kann man die Dichte der Körper über den Druck steuern: Sie enthalten Luftkammern, welche bei entsprechendem Druck komprimiert werden. Durch die Verkleinerung des Volumens steigt die Dichte und die Taucher sinken ab.

## 2.9.9 Auftrieb in Luft



Abbildung 2.134: Ballonflug.

Nicht nur in Flüssigkeiten, sondern auch in Luft und anderen Gasen existiert dieser Auftrieb. Dies ist z.B. die Grundlage für den Ballonflug ( $\rightarrow$  Abb. 2.134), kann aber auch anhand eines einfachen Laborexperimentes nachgewiesen werden.



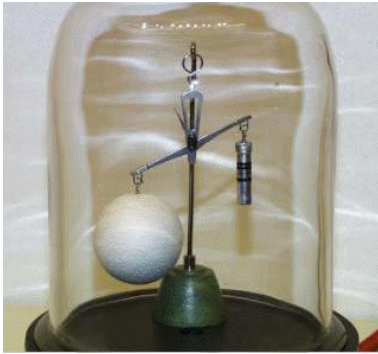


Abbildung 2.135: Auftriebswaage.

Man kann den Effekt u.a. nachweisen, indem man die Luft entfernt (siehe Abb. 2.135). Im Experiment wird der Auftrieb für 2 Körper gemessen, welche in der Atmosphäre gleich schwer sind. Der eine davon besteht aus Blei, der andere aus Styropor.

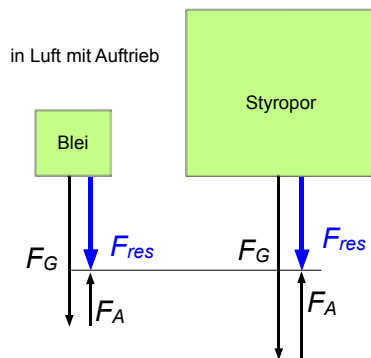


Abbildung 2.136: Gleichgewicht in Luft.

In Luft sind die beiden Körper im Gleichgewicht. Wie in Abb. 2.136 gezeigt, ist die Summe  $F_{res}$  aus Schwerkraft  $F_G$  und Auftrieb  $F_A$  ist für beide gleich. Wird die Luft abgepumpt, so verschwindet der Auftrieb. Da dieser für den größeren Körper erheblich größer ist, als für den kleinen Körper sinkt er ab.

Der Auftrieb für den eingetauchten Körper bedeutet umgekehrt, dass das Gefäß, welches die Flüssigkeit enthält, entsprechend schwerer wird. Man kann dies dadurch verstehen, dass die Flüssigkeitssäule, welche auf den Boden des Gefäßes drückt, entsprechend dem verdrängten Volumen höher geworden ist.

### 2.9.10 Kompressibilität

Unter dem Einfluss des Druckes ändert jedes reale Medium sein Volumen um  $\Delta V$ . In linearer Näherung ist die Volumenänderung proportional zum Volumen  $V$  und zur Druckänderung  $\Delta p$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p = \frac{\Delta p}{K}, \quad [\kappa] = \text{m}^2 \text{N}^{-1},$$

wobei die Proportionalitätskonstante  $\kappa$  als Kompressibilität bezeichnet wird. Sie ist das Inverse des Kompressionsmoduls  $K$ .

Die Dichte eines Mediums ist definiert als Masse pro Volumen; da das Volumen mit zunehmendem Druck abnimmt, steigt somit die Dichte an. Für infinitesimale Änderungen gilt

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = \kappa \Delta p.$$

Diese Gleichungen gelten sowohl für Flüssigkeiten wie auch für Gase; bei Flüssigkeiten ist die Kompressibilität jedoch sehr viel geringer als bei Gasen. Typische Werte für die Kompressibilität von Flüssigkeiten sind rund zwei Größenordnungen höher als bei Festkörpern. Einige Beispiele sind (bei 20 °C, 1 atm):

| Flüssigkeit | $\kappa$                                  |
|-------------|---|
| Quecksilber | $0,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ |
| Wasser      | $5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$   |
| Benzol      | $10 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$  |
| Äthanol     | $10 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$  |

Für ein ideales Gas ist die Kompressibilität  $\kappa_{ig} = 1/p$ , bei Normaldruck also  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$  und damit um rund 4 Größenordnungen über dem entsprechenden Wert für eine typische Flüssigkeit. Die Größenordnung der Kompressibilität ist somit, neben der Dichte, das wesentliche Kriterium, welches Flüssigkeiten von Gasen unterscheidet.

Man kann damit z.B. die Kompression von Wasser in einer Tiefe von 4000 m (=mittlere Meerestiefe) ausrechnen. Hier beträgt der Druck  $4 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$  und die entsprechende Volumenänderung etwa

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p = -5 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^7 = -0.02 = -2\%.$$

Eine Volumenänderung wird auch durch eine Temperaturänderung erzeugt:

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T \quad [\gamma] = \frac{1}{K}.$$

Die Proportionalitätskonstante wird als Volumenausdehnungskoeffizient bezeichnet. Wie bei der Kompressibilität ist der Volumenausdehnungskoeffizient für Flüssigkeiten sehr viel kleiner als für Gase. Für ideale Gase ist  $\gamma = 1/T$  ( $\sim 1/300K$  bei Raumtemperatur).

## 2.10 Grenzflächeneffekte

### 2.10.1 Oberflächenspannung

An Grenzflächen treten besondere Effekte auf, welche im Volumen nicht beobachtbar sind. Die molekulare Grundlage dafür sind Kohäsionskräfte, d.h. Kräfte zwischen gleichartigen Atomen / Molekülen. In den meisten Flüssigkeiten dominieren dabei van der Waals Kräfte. Sie erniedrigen die Energie des Moleküls gegenüber einem Molekül im Vakuum und sind damit die Ursache dafür, dass sich Flüssigkeiten überhaupt bilden. Eng verwandt damit sind Adhäsionskräfte: diese wirken zwischen Molekülen verschiedener Stoffe, also z.B. zwischen einem Molekül in der Flüssigkeit und einer festen Oberfläche.

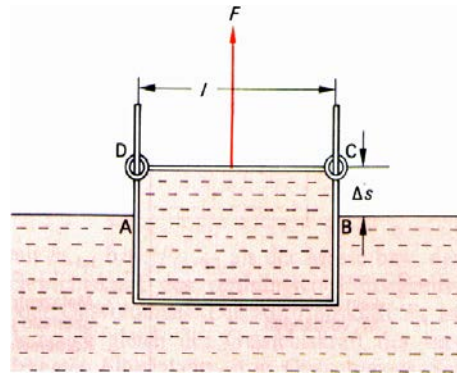


Abbildung 2.137: Berechnung der Oberflächenspannung.

Befindet sich ein Molekül an der Oberfläche einer Flüssigkeit so ist es weniger Kohäsionskräften ausgesetzt und seine Energie ist höher als im Innern der Flüssigkeit. Auf solche Moleküle wirkt deshalb eine Kraft  $\vec{F}_{\text{resultierend}}$  nach innen. Mit einer Oberfläche ist deshalb eine potenzielle Energie verbunden, die "Oberflächenenergie". Diese ist in guter Näherung proportional zur Oberfläche. Somit erhält man eine universelle Beschreibung, wenn man die spezifische Oberflächenenergie, also den Quotienten aus Energie und Oberfläche betrachtet:

$$\sigma_A = \frac{dW}{dA} \quad [\sigma_A] = \frac{N}{m}.$$

Diese Größe wird auch als Oberflächenspannung bezeichnet. Die Energie  $dW$  muss dem System als Arbeit zugeführt werden, um die Oberfläche um  $dA$  zu

vergrößern ( $\rightarrow$  Abb. 2.137). Im Gegensatz zu Spannungen im Volumen handelt es sich hier aber um eine Kraft pro Längeneinheit. Dies ist mit einem Blick auf Abb. 2.137 auch nachvollziehbar: je länger der Bügel, desto mehr Kraft muss aufgewendet werden.

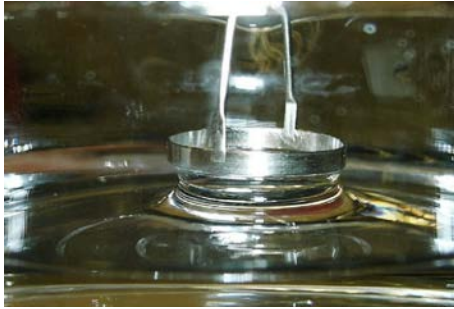


Abbildung 2.138: Messung der Oberflächenspannung.

Die Grenzflächenspannung kann gemessen werden, indem man an einem Bügel zieht, an den eine Lamelle anschließt. Wie in Abb. 2.138 gezeigt, wird dabei die Oberfläche der Lamelle vergrößert, wobei der Oberflächenzuwachs auf beiden Seiten der Lamelle erfolgt. Bei einem Radius  $r$  des Kreises wird die Oberfläche der Lamelle um den Betrag

$$\Delta A = 2\Delta h\ell = 2\Delta h2\pi r$$

vergrößert, wobei  $\ell = 2\pi r$  den Umfang des Bügels darstellt und  $\Delta h$  die Höhenänderung. Der Faktor 2 berücksichtigt, dass die Flüssigkeitslamelle zwei Oberflächen besitzt. Die Kraft, welche für die Vergrößerung der Oberfläche benötigt wird, lässt sich berechnen aus der Änderung der Oberflächenenergie  $W_S$  pro Wegelement  $\Delta h$ :

$$F = \frac{W_S}{\Delta h} = \sigma_A \frac{\Delta A}{\Delta h} = 4\pi r \sigma_A.$$

Im Experiment hat der Ring einen Radius von 1 cm. Man misst eine Kraft von ca. 10 mN, was einer Oberflächenspannung von

$$\sigma_A = \frac{F}{4\pi r} = \frac{0,01}{4\pi \cdot 0,01} \frac{\text{N}}{\text{m}} = 0,08 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

entspricht, in guter Übereinstimmung mit dem Literaturwert von 0.072 N/m (Wasser bei 20 °C).



Abbildung 2.139: Wasserläufer.

Die Oberflächenspannung wird häufig von kleinen Tieren wie z.B. Wasserläufern durchgeführt ( $\rightarrow$  Abb. 2.139): Sie können auf dem Wasser gehen, weil Ihre Körpergewichte so klein ist, dass die Kraft auf die Wasseroberfläche kleiner ist als die Kraft, welche benötigt würde, um ein Loch in der Wasseroberfläche zu drücken und damit die Oberfläche zu vergrößern.

Oberflächenspannungen kann es sowohl zwischen festen Körpern und Gasen wie zwischen Flüssigkeiten und Gasen oder zwischen zwei Flüssigkeiten geben.

Am größten sind die Oberflächenspannungen bei Metallen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Metallatome eine sehr starke Wechselwirkung untereinander besitzen. Wasser besitzt im Vergleich mit anderen Flüssigkeiten ebenfalls eine relativ hohe Oberflächenspannung. Dies ist ein Hinweis auf die relativ starken intermolekularen Kräfte in Wasser, welche auch für den relativ hohen Siedepunkt (im Vergleich zu gleich schweren Molekülen) verantwortlich sind.

### 2.10.2 Minimalflächen

Im Gleichgewicht besitzt ein System die niedrigste mögliche Energie. Dazu gehört offenbar, dass die Oberflächen möglichst klein sind. Oberflächen sind deshalb Minimalflächen.

In Abb. 2.140 wird dies anhand von Einzelbildern beim Abfallen eines Wassertropfens gezeigt: Zunächst findet man ein Gleichgewicht von Oberflächenspannung und Schwerkraft; erst wenn die Flüssigkeitsmenge groß genug wird überwiegt die

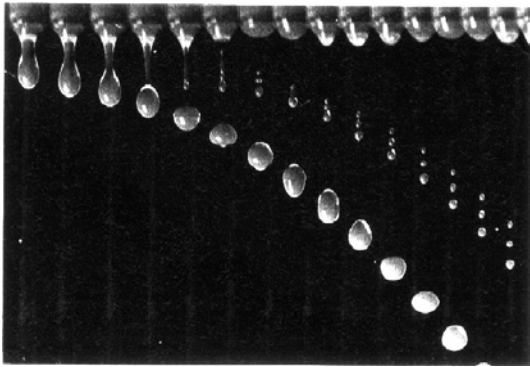


Abbildung 2.140: Entstehung eines Wassertropfens.

Schwerkraft und der Tropfen reißt ab. Der Tropfen nimmt darauf Kugelform (eine Minimalfläche) an, wobei transiente Schwingungen um die Gleichgewichtsform beobachtet werden können.

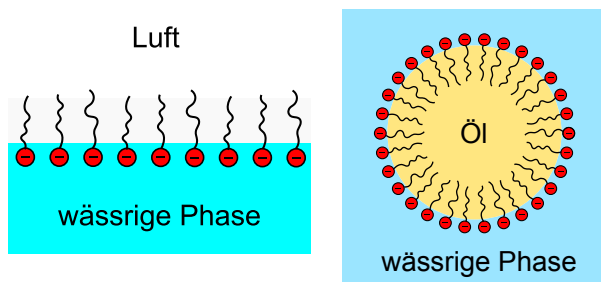


Abbildung 2.141: Tenside an unterschiedlichen Grenzflächen.

Die Oberflächenspannung kann durch Zusatzstoffe stark variiert werden. Das geschieht z.B. durch sogenannte Tenside. Das sind Moleküle, die sich an der Grenzfläche einordnen und sowohl mit der wässrigen, wie auch mit der anderen Phase (Luft oder Öl) eine anziehende Wechselwirkung haben, wie in Abb. 2.141 gezeigt. Solche Moleküle werden z.B. in Waschmitteln verwendet, und sie spielen in vielen biologischen Systemen eine wichtige Rolle, z.B. in der Lunge, wo sie eine wesentlich effizientere Atmung ermöglichen. Im Experiment nehmen Äthermoleküle in Wasser diese Funktion. Sie reduzieren die Oberflächenspannung. Dadurch werden beim Abtropfen aus einem Glasrohr kleinere Tropfen erzeugt, was z.B. über die Zunahme der Tropffrequenz gemessen werden kann.

Minimalflächen kann man z.B. erzeugen, indem

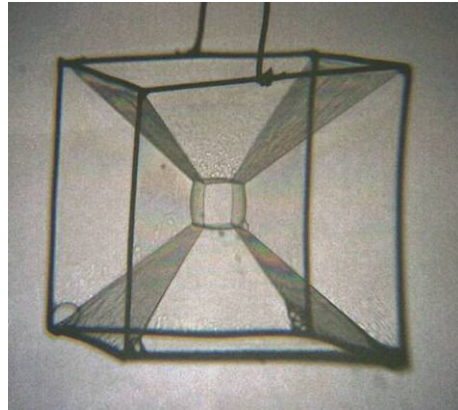


Abbildung 2.142: Minimalfläche in einem Würfel.

man Seifenlamellen aufspannt. Je nach Randbedingung (Drähte) erzeugen die Seifenlamellen diejenigen Oberflächen, welche die Größe der Lamelle minimieren. Abb. 2.142 zeigt ein Beispiel.

### 2.10.3 Seifenblasen

Ein Beispiel wo keine Drähte benötigt werden, ist die Seifenblase. Hier ist das Volumen durch die eingeschlossene Gasmenge vorgegeben. Die Minimalfläche bei gegebenem Volumen ist eine Kugel. Durch die Seife wird die Oberflächenspannung reduziert auf 30 mN/m. Wir untersuchen folgende Fragen:

- Wie hoch ist der Druck im Innern der Seifenblase im Vergleich zum Außendruck?
- Was passiert, wenn eine große und eine kleine Seifenblase zusammenkommen?

Wir berechnen zunächst die Arbeit, welche benötigt wird, um den Radius der Kugel von  $r$  auf  $r + dr$  zu vergrößern. Die Kraft ist gegeben durch das Produkt aus Druckdifferenz  $p$  und Oberfläche  $A$ . Der zurückgelegte Weg ist gegeben durch die Änderung  $dr$  des Radius. Damit wird die Arbeit

$$dW = F dr = p A dr = p 4\pi r^2 dr,$$

Diese Arbeit wird benötigt, um die Oberflächenenergie zu vergrößern,

$$\begin{aligned} dW &= \sigma dA = \sigma [4\pi(r + dr)^2 - 4\pi r^2] \\ &= \sigma [4\pi r^2 + 8\pi r dr - 4\pi r^2] = \sigma 8\pi r dr, \end{aligned}$$



wobei wie üblich der Term  $\propto dr^2$  (quadratisch in einer infinitesimalen Größe) weggelassen wurde. Gleichsetzen der beiden Terme ergibt

$$p 4\pi r^2 dr = \sigma 8\pi r dr \rightarrow p = 2\frac{\sigma}{r}. \quad (2.19)$$

Für eine Seifenblase mit einem Radius von  $r = 1.8$  cm erhält man z.B. einen Überdruck von  $p = 3.33$  N/m<sup>2</sup>.

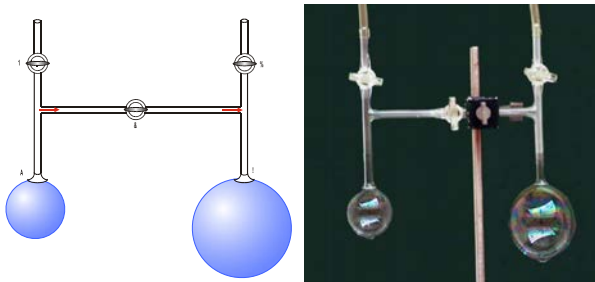


Abbildung 2.143: Druckausgleich zwischen 2 Seifenblasen.

Der Druck ist indirekt proportional zum Radius, d.h. in größeren Seifenblasen ist der Druck kleiner. Werden zwei Seifenblasen durch ein Rohr so verbunden ( $\rightarrow$  Abb. 2.143), dass Gas aus der einen in die andere fließen kann, so pumpt die kleinere die größere auf. Die resultierende gemeinsame Seifenblase besitzt wiederum eine minimale Oberfläche.

Die Abhängigkeit (2.19) des Drucks vom Durchmesser der Seifenblase hat wichtige Konsequenzen, z.B. für unsere Lunge. Zweck der Atmung ist es, Sauerstoff aus der Luft in die Blutbahn zu überführen und CO<sub>2</sub> aus dem Blut in die Luft. Damit dieser Austausch effektiv stattfindet, benötigt die Lunge eine große Oberfläche von rund 100 m<sup>2</sup>. Damit diese im Brustkorb Platz findet, wird sie auf kleine Lungenbläschen aufgeteilt: diese besitzen ein großes Oberflächen/Volumen Verhältnis. Der Nachteil ist, dass damit laut Gleichung (2.19) ein sehr hoher Druck entsteht, den unser Atemsystem nicht überwinden könnte. Die Natur hat dieses Problem mit Hilfe von oberflächenaktiven Substanzen gelöst, welche die Oberflächenspannung und damit den benötigten Druck reduzieren.

## 2.10.4 Benetzung

Befinden sich Flüssigkeiten auf Oberflächen, so existieren drei verschiedene Arten von Grenzflächen (fest-flüssig, fest-gas und flüssig-gas). Dadurch kommt es zu einem Wettbewerb zwischen Kohäsionskräften und Adhäsionskräften. Adhäsionskräfte erniedrigen die Energie eines Moleküls, welches in Kontakt ist mit einer festen Oberfläche.


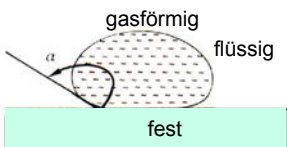
| Benetzung  | keine Benetzung   |
|--|---|
| Adhäsionskraft > Kohäsionskraft  | Adhäsionskraft < Kohäsionskraft   |
| Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Oberfläche                                     | Flüssigkeit zieht sich tropfenförmig zusammen                                       |
|  |  |

Abbildung 2.144: Benetzung und Definition des Kontaktwinkels.

Ist die Adhäsion stärker als die Kohäsion, wird die Kontaktfläche zwischen Flüssigkeit und Oberfläche vergrößert. Dies ist z.B. für Wasser auf Glas der Fall. Man quantifiziert das Verhältnis von Kohäsion zu Adhäsion über den Randwinkel  $\alpha$  ( $\rightarrow$  Abb. 2.144). Dieser stellt sich als Gleichgewichtswert dadurch ein, dass die drei Grenzflächenspannungen (fest-flüssig, fest-gasförmig und flüssig-gasförmig) gleichzeitig minimiert werden müssen. Ist der Benetzungswinkel kleiner als 90° so spricht man von Benetzung; liegt er bei 0° so handelt es sich um vollständige Benetzung. Bei  $\alpha > 90^\circ$  liegt eine nicht benetzende Flüssigkeit vor.

Einige Beispiele für Benetzungswinkel:

| Grenzfläche                | $\alpha$          |
|----------------------------|-------------------|
| Wasser auf fettfreiem Glas | $\approx 0^\circ$ |
| Wasser auf Paraffin        | 105-110           |
| Quecksilber auf Glas       | 140               |
| Quecksilber auf Stahl      | 154               |

Quecksilber ist ein typisches Beispiel einer nicht benetzenden Flüssigkeit. In diesem Fall sind die Kohäsionskräfte stärker als die Adhäsionskräfte. Das



System verkleinert deshalb die Kontaktfläche. Diese Eigenschaft ist eine Folge der hohen Oberflächenspannung von Quecksilber.

### 2.10.5 Kapillarkräfte

Grenzflächeneffekte erzeugen auch die so genannten Kapillarkräfte: Die Energie, welche ein System durch die Vergrößerung der Kontaktfläche gewinnt, kann dazu verwendet werden, um die Flüssigkeit auf eine größere Höhe anzuheben.

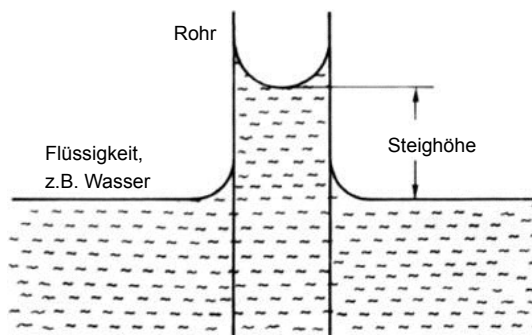


Abbildung 2.145: Kapillarkräfte.

Die Kraft, welche die Flüssigkeit in der Kapillare nach oben zieht, kann in erster Näherung berechnet werden, wenn man die Oberfläche in der Kapillare als Halbkugel annähert, was etwa dem in Abb. 2.145 gezeigten Fall entspricht. Dann ist die Druckdifferenz gegeben durch Gleichung (2.19) und die Kraft, welche die Flüssigkeitssäule nach oben zieht, als das Produkt aus Druckdifferenz und Querschnittsfläche  $A$ :

$$F_{\uparrow} = A \frac{2\sigma_A}{R},$$

wobei  $R$  den Krümmungsradius der Oberfläche bezeichnet ( $\rightarrow$  Abb. 2.145). Wird die Kapillare vollständig benetzt (Kontaktwinkel  $\alpha \approx 0$ ) so ist dieser Krümmungsradius gerade gleich dem Radius  $r$  der Kapillare. Diese Kraft muss gerade die Gewichtskraft der Flüssigkeit in der Kapillare kompensieren, welche

$$F_G = mg = \rho A h g$$

beträgt. Offenbar ist das Gleichgewicht erreicht wenn die beiden Kräfte gleich sind,  $F_{\uparrow} = F_G$ . Dies wird bei der Höhe

$$h = \frac{2\sigma_A}{\rho r g}$$

erreicht. Die Steighöhe ist somit proportional zur Oberflächenspannung und invers proportional zum Radius der Kapillare. Für Wasser ( $\sigma_A = 0.072 \text{ N/m}$ ) in einer Kapillare von  $0.1 \text{ mm}$  Radius erhält man somit eine Steighöhe von  $0.144 \text{ m} \sim 14 \text{ cm}$ .

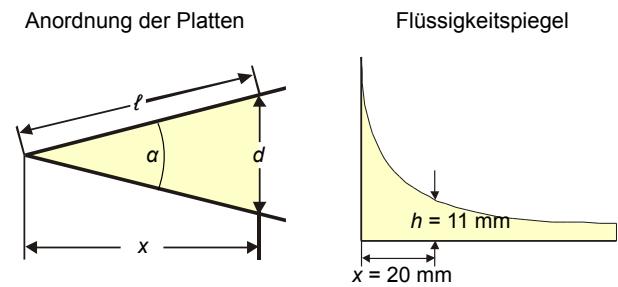


Abbildung 2.146: Kapillarkräfte zwischen 2 Glasplatten. Links blickt man von oben auf die Anordnung, rechts von der Seite.

Man kann dies auch mit Hilfe von Glasplatten zeigen. Wie in Abb. 2.146 links dargestellt, stehen zwei Glasplatten unter einem spitzen Winkel, so dass der keilförmige Bereich dazwischen unterschiedliche Kapillardurchmesser darstellt. Man findet eine hyperbolische Abhängigkeit der Steighöhe von der Position und damit vom Abstand der Platten.

Ist die Benetzung nicht vollständig (d.h. der Kontaktwinkel  $\alpha > 0^\circ$ ), so fällt der Effekt entsprechend geringer aus.

$$h = \frac{2\sigma_A}{\rho r g} \cos \alpha.$$

Auch hier kann der umgekehrte Fall eintreten, dass die Kohäsionskräfte stärker sind. In diesem Fall ist  $\alpha > 90^\circ$  und  $\cos \alpha < 0$ : es kommt also zu einer Kapillardepression, d.h. die Flüssigkeitsoberfläche im Innern der Kapillare ist tiefer als außen, wie in Abb. 2.147 gezeigt.

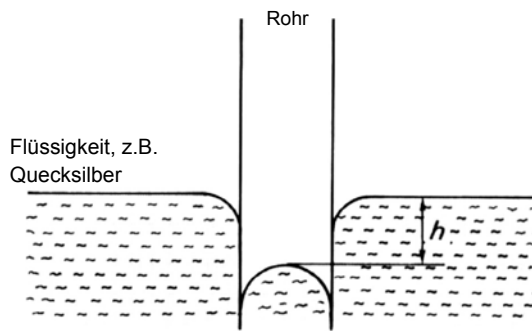


Abbildung 2.147: Kapillardepression.

## 2.11 Hydrodynamik und Aerodynamik

Genau wie die Hydrostatik behandelt die Hydrodynamik, respektive die Aerodynamik, Fluide. Im Gegensatz zur Hydrostatik, wo sich das Medium im stationären Gleichgewicht befindet, wird hier jedoch ein bewegtes Medium behandelt. Durch die Bewegung kommen 2 Aspekte dazu, welche bei der Hydrostatik nicht diskutiert wurden:

- In bewegten Fluiden existieren Scherspannungen auf Grund der endlichen Viskosität. Diese innere Reibung ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.
- Bewegte Fluide besitzen kinetische Energie. Es findet deshalb eine Umwandlung von potenzieller (Höhe, Druck) in kinetische Energie (und umgekehrt) statt.

Der wichtigste Unterschied zwischen strömenden Flüssigkeiten und strömenden Gasen ist, dass man bei Flüssigkeiten meist davon ausgehen kann, dass die Volumenänderungen der Flüssigkeit gering sind, d.h., dass es sich um ein inkompressibles Medium handelt. Im Falle der Aerodynamik (bei Gasen) muss die Kompressibilität berücksichtigt werden.

### 2.11.1 Stromlinien und Geschwindigkeitsfelder

Um ein strömendes Medium zu beschreiben, gibt es verschiedene Methoden. Die Lagrange-Methode

entspricht einer zeitlichen Verfolgung der Masselemente  $\delta m$ . Einfacher ist die Euler-Methode bei der zu einem beliebigen Zeitpunkt die Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Masselemente betrachtet werden.

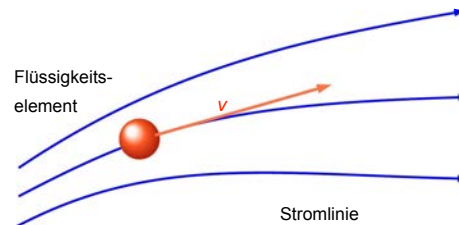


Abbildung 2.148: Darstellung eines Flussfeldes mit Flusslinien.

Die Gesamtheit dieser Geschwindigkeitsvektoren wird als Geschwindigkeitsfeld bezeichnet. Zur Darstellung verwendet man meist Stromlinien ( $\rightarrow$  Abb. 2.148). Dabei handelt es sich um orientierte Kurven, welche den Weg der Flüssigkeitselemente verfolgen. Die momentane Tangente an diese Kurven ergibt jeweils die lokale Richtung der Strömungsgeschwindigkeit. Im Rahmen der Vorlesung werden die Stromlinien meist als stationär angenommen.

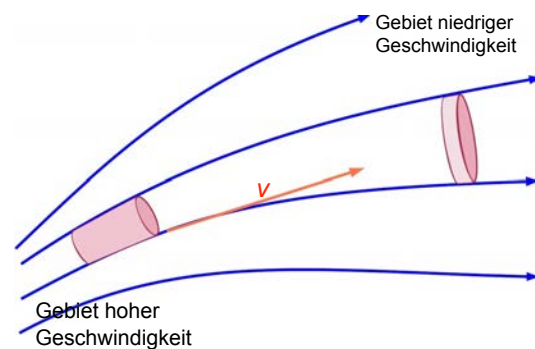


Abbildung 2.149: Stromliniendichte als Maß für die lokale Geschwindigkeit.

Die Dichte der Stromlinien ist ein Maß für den Betrag der Geschwindigkeit: Je größer die Anzahl der Stromlinien durch eine Fläche sind, desto größer ist die Stromdichte und damit die lokale Geschwindigkeit. Wie in Abb. 2.149 gezeigt kann man dies zeigen, indem man gleiche Volumina (rot eingezeichnet) betrachtet, welche durch Stromlinien eingeschlossen werden. Die Länge des Volumenelements

entspricht der Verschiebung pro Zeiteinheit. Für inkompressible Fluide muss somit die Geschwindigkeit in einem Bereich hoher Stromliniendichte höher sein, als in einem Gebiet niedriger Stromliniendichte.

Diese Stromlinien können auch sichtbar gemacht werden; sie sind nicht nur ein theoretisches Konzept. Man injiziert dafür z.B. gefärbtes Wasser oder kleine Partikel in das fließende Medium.

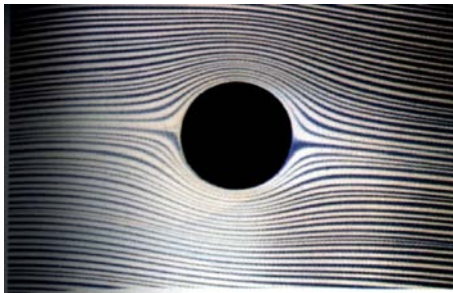


Abbildung 2.150: Laminare Strömung um einen Zylinder.

In Abb. 2.150 werden die Stromlinien beim Umfließen eines Zylinders dargestellt. Sie zeigen, dass auf der Vorder- und Hinterseite ein Stau entsteht, also eine Region geringer Geschwindigkeit, und auf beiden Seiten eine Region hoher Geschwindigkeit.

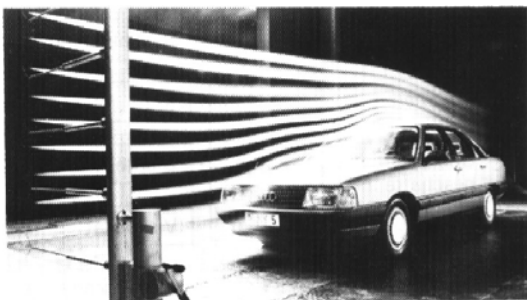


Abbildung 2.151: Automobil im Windkanal.

Abb. 2.151 stellt entsprechende Untersuchungen an einem Automobil in einem Windkanal dar. Die Strömungslinien werden sichtbar gemacht, indem Rauch in den Gasstrom geblasen wird. Solche Experimente spielen z.B. für den Entwurf von Fahrzeugen und Flugzeugen eine wichtige Rolle.

Strömungen werden als stationär bezeichnet, wenn

die Stromlinien zeitlich konstant sind. Es gibt laminare und turbulente Strömungen.

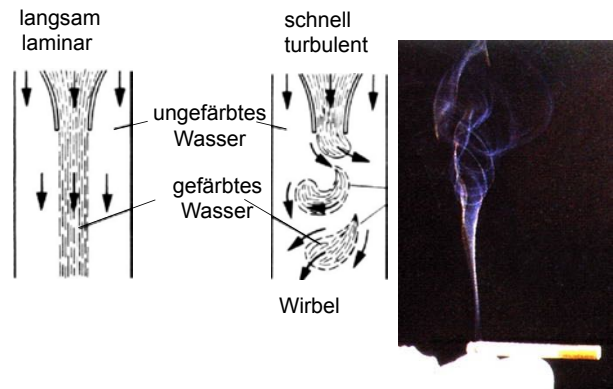


Abbildung 2.152: Laminare und turbulente Strömungen.

In Abb. 2.152 geht die Strömung von laminar nach turbulent über. Dies geschieht z.B. bei höherer Geschwindigkeit. Die Charakterisierung von turbulenten Strömungen gehört ins Gebiet der nichtlinearen Dynamik und kann in diesem Zusammenhang nicht diskutiert werden.

## 2.11.2 Kontinuitätsgleichung

Geschwindigkeiten in bewegten Flüssigkeiten beschreiben den Transport von Materie. Lokal kann dieser Transport durch die Massenstromdichte

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

quantifiziert werden.

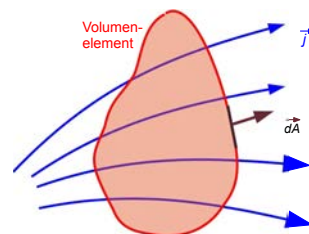


Abbildung 2.153: Massenbilanz für ein Volumenelement.

Wir betrachten die Änderung der Masse in einem Volumen  $V$  aufgrund der Zu- und Abflüsse ( $\rightarrow$  Abb.

2.153). Der Anteil des Massenstroms  $dm/dt$  durch ein kleines Flächenelement  $d\vec{A}$  ist

$$\frac{dm}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{A} = |\vec{j}| dA \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  den Winkel zwischen der Fließrichtung und der Oberflächennormalen darstellt. Integration über die geschlossene Oberfläche ergibt die gesamte Änderung der Masse im Volumen pro Zeiteinheit als

$$\dot{m} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \iint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0,$$

da Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. Die Gleichung besagt einfach, dass die Summe der Zu- und Abflüsse verschwinden muss. Sie kann über den Satz von Gauß

$$\iint_O \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

(die Integralgrenzen sind  $O$  = Oberfläche und  $V$  = Volumen) auch geschrieben werden als

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

da die Gleichung für beliebige Volumina  $V$  gelten muss. Dies ist eine Bedingung für das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit: es enthält weder Quellen noch Senken.

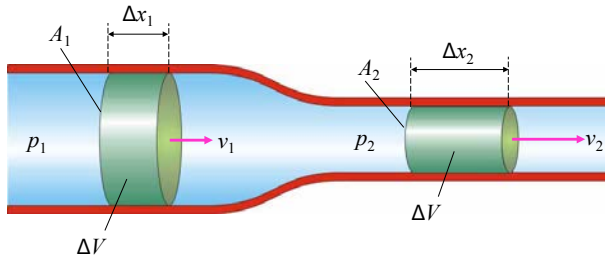


Abbildung 2.154: Transport eines Volumenelementes in einer laminaren Strömung.

Diese Aussage gilt für beliebige Körper. Wir können z.B. einen Flusslauch betrachten, der auf der Außenseite von Flusslinien begrenzt wird ( $\vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$ ) und an den Stirnflächen von zwei Scheiben mit Flächen  $A_1$  und  $A_2$  (siehe Abb. 2.154). Da die Seitenwände durch Flusslinien gebildet werden,

fließt kein Material durch diesen Teil der Oberfläche. Damit sind Ein- und Ausfluss gegeben durch die Durchflussmenge durch die beiden Flächen links und rechts.

Die Flüssigkeitsmenge, welche pro Zeiteinheit durch eine Stirnfläche fließt, ist proportional zum Produkt aus Querschnittsfläche und Fließgeschwindigkeit  $v dm = \rho A v$ , da die Geschwindigkeit senkrecht auf der Fläche steht. Bei konstanter Dichte kann die Massenbilanz somit geschrieben werden als

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (2.20)$$

oder

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}.$$

Dies entspricht der Quantifizierung der oben gemachten Aussage, dass nahe beieinander liegende Stromlinien hohe Geschwindigkeiten markieren und geringe Stromliniendichte einer langsamen Geschwindigkeit entspricht.

Für kompressible Flüssigkeiten muss die Gleichung um die Dichte erweitert werden:

$$v_1 \rho_1 A_1 = v_2 \rho_2 A_2.$$

Für wirbelfreie Strömungen kann man das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{r})$  als Gradient eines Geschwindigkeitspotenzials  $\phi(\vec{r})$  schreiben:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \phi(\vec{r}).$$

Solche Strömungen werden deshalb auch als Potenzialströmungen bezeichnet.

### 2.11.3 Druck und kinetische Energie

Wir betrachten eine Strömung in einem Rohr, das sich verengt. Die Zunahme der Geschwindigkeit aufgrund der Verengung bedeutet laut Gleichung (2.20) für die Flüssigkeitselemente eine Beschleunigung. Die dafür notwendige Kraft stammt aus einer Druckdifferenz.

Wir betrachten eine dünne Scheibe der Flüssigkeit, wie in Abb. 2.155 gezeigt. Die Masse des Zylinders mit Querschnittsfläche  $A$  und Dicke  $dx$  beträgt

$$dm = \rho A dx.$$

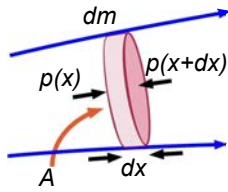


Abbildung 2.155: Druckkraft auf dünne Flüssigkeitsscheibe.

Das Newton'sche Axiom für dieses Flüssigkeitselement lautet

$$dF = -Adp = adm = (\rho A dx) \frac{dv}{dt}.$$

Hier bezeichnet  $dp = p(x+dx) - p(x)$  die (infinitesimale) Druckdifferenz,  $a$  die Beschleunigung und  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit. Offenbar ist die Beziehung unabhängig von der Querschnittsfläche:

$$-dp = \rho v dv.$$

Integration zwischen zwei Punkten 1 und 2 ergibt

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

oder

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2.$$

Offenbar wird eine Zunahme der Geschwindigkeit (Zunahme der kinetischen Energie) durch eine Abnahme des Druckes (Reduzierung der potenziellen Energie) kompensiert.

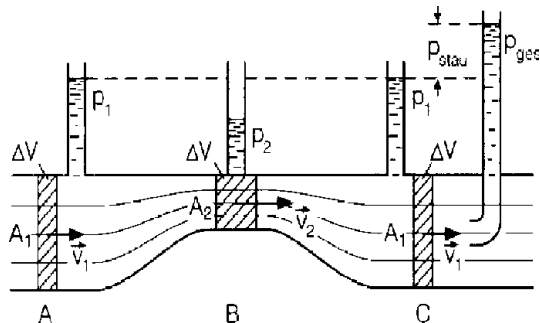


Abbildung 2.156: Herleitung der Bernoulli-Gleichung.

Abb. 2.156 zeigt die Verhältnisse für ein Rohr mit unterschiedlichen Querschnitten. Die Geschwindigkeit ist am Punkt B am höchsten und deshalb der Druck am niedrigsten.

Die Größe  $\frac{1}{2}\rho v^2$  hat die Dimension einer Energiedichte

$$\left[ \frac{\mathcal{E}}{V} \right] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \left[ \frac{F}{A} \right] = [p]$$

und gleichzeitig der des Drucks und wird als Staudruck bezeichnet. Offenbar ist die Summe aus statischem Druck und Staudruck für eine reibungsfreie Flüssigkeit konstant. Man bezeichnet dies als Gesamtdruck und schreibt

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{\text{ges}}$$

für eine reibungsfreie Flüssigkeit.



Abbildung 2.157: Daniel Bernoulli (1700-1782).

Dies wird als die Bernoulli'sche Gleichung bezeichnet (nach Daniel Bernoulli, 1700-1782). Sie beschreibt im Wesentlichen die Erhaltung der mechanischen (potenzielle + kinetische) Energie und gilt nur so lange wie die Reibung vernachlässigt werden kann.

Der Staudruck kommt durch die Impulsänderung des Gases zustande. Er wird u.a. in Kraftwerken genutzt, wo der Staudruck auf die Turbinenschaufeln drückt. Der Effekt kann noch verstärkt werden, wenn das Wasser so umgeleitet wird, dass seine Geschwindigkeit  $v$  nicht auf 0 reduziert wird, sondern es nach rückwärts abgelenkt wird:  $\Delta v = -v - v = -2v$ . Dies wird z.B. bei der Pelton-Turbine genutzt, welche vor allem in Hochdruck-Wasserkraftwerken verwendet wird.



### 2.11.4 Druckänderung in einer Strömung

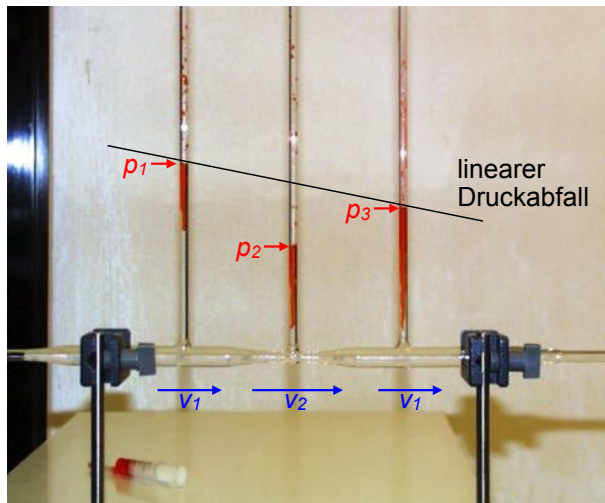


Abbildung 2.158: Experimentelle Verifizierung der Bernoulli-Gleichung.

Die Voraussagen der Bernoulli Gleichung können experimentell leicht überprüft werden. Im Experimente von Abb. 2.158 verwendet man dafür ein Rohr, das in der Mitte verengt ist, an beiden Enden aber den gleichen (größeren) Querschnitt zeigt. In den beiden äußeren Röhren steigt das Wasser höher; an dieser Stelle ist offenbar der statische Druck höher als in der Mitte, wo das Wasser schneller fließt. Da die Strömung im Experiment nicht reibungsfrei ist findet man zusätzlich zum Staudruck auch einen linearen Druckabfall, welcher die Reibungsverluste enthält.

| Bezeichnung | Drucksonde       | Pitot-Rohr                   | Prandtl'sches Staurohr              |
|-------------|------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| Aufbau      |                  |                              |                                     |
| Messgröße   | statischer Druck | statischer Druck + Staudruck | Staudruck, Strömungsgeschwindigkeit |

Abbildung 2.159: Messgeräte für unterschiedliche Arten von Druck.

Geeignete Druckmessgeräte können diese unter-

schiedlichen Beiträge messen, wie in Abb. 2.159 gezeigt. Die Drucksonde misst den statischen Druck, während das Pitot-Rohr den Gesamtdruck misst. Das Prandtl'sche Staurohr besitzt zwei Öffnungen für den statischen und den Gesamtdruck, welche auf unterschiedlichen Seiten der Flüssigkeit angeordnet sind. Die Höhendifferenz ist dann direkt proportional zum Staudruck.

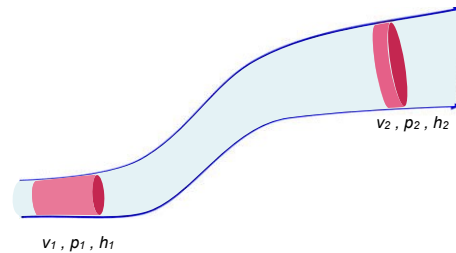


Abbildung 2.160: Beitrag des Schweredruckes zur Bernoulli-Gleichung.

Eine etwas allgemeinere Form der Bernoulli-Gleichung erhält man, wenn man zusätzlich den Schweredruck berücksichtigt. Dann ist der Gesamtdruck zusätzlich von der Höhe abhängig; er beträgt dann

$$p_0 + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{ges}.$$

Insgesamt sind beide Formen der Bernoulli-Gleichung Ausdrücke der Energieerhaltung: jeder Term stellt eine Energiedichte, d.h. Energie pro Volumen dar; der erste enthält die elastische Energie, der zweite die potenzielle Energie der Gravitation, der dritte die kinetische Energiedichte.

Eine weitere Konsequenz davon ist das Gesetz von Torricelli: Tritt Flüssigkeit aus einem kleinen Loch in einem Behälter aus, so ist seine Fließgeschwindigkeit  $v = \sqrt{2gh}$ , mit  $h$  der Distanz unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche. Dies ist die gleiche Geschwindigkeit, die sie hätte, wenn sie von der Flüssigkeitsoberfläche frei gefallen wäre und entspricht der Umwandlung von potenzieller in kinetische Energie.

### 2.11.5 Demonstrationen zur Bernoulli-Gleichung

Einige interessante Konsequenzen können leicht demonstriert werden.

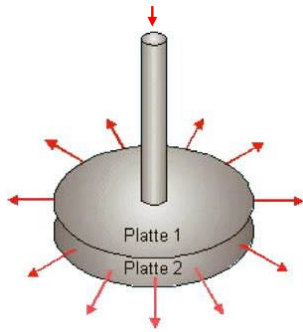


Abbildung 2.161: Strömung zieht Platte an.

Bläst man durch ein Loch in einer Platte auf eine zweite Platte so dass das Gas zwischen den beiden Platten entweichen muss (→ Abb. 2.161), so erzeugt die hohe Geschwindigkeit des Gases zwischen den beiden Platten einen Unterdruck, welcher stark genug ist, das Gewicht der Platte zu halten und die Kraft zu überwinden, welche durch die Impulsänderung des strömenden Gases auf die freie Platte ausgeübt wird.

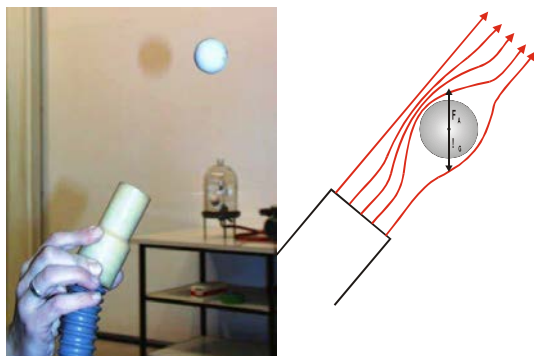


Abbildung 2.162: Tanzender Ping-Pong Ball.

Bläst man auf einen Pingpong Ball schräg nach oben (→ Abb. 2.162), so fällt er nicht zu Boden, sondern gelangt in eine Gleichgewichtsposition etwas unterhalb der Mitte des Luftstrahls: an dieser Stelle ist die Geschwindigkeit des Gases oberhalb etwas größer als unterhalb, so dass eine Auftriebskraft wirkt, welche groß genug ist, die Gewichtskraft zu kompensieren.

Verwendet man einen Trichter, so kann man sogar nach unten auf den Ball blasen, wie in Abb. 2.163 gezeigt; da die Luft sich oberhalb des Balls schneller



Abbildung 2.163: Ping-Pong Ball in einem Trichter.

bewegt als unten, fällt er nicht zu Boden.

## 2.11.6 Viskosität

Eine Flüssigkeit bewegt sich nie widerstandsfrei.

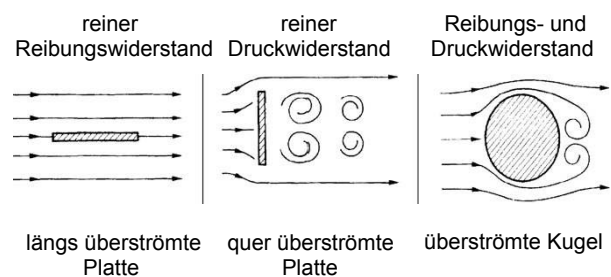


Abbildung 2.164: Widerstand in einer Flüssigkeit.

Der Strömungswiderstand kommt aufgrund von Reibungswiderstand und Druckwiderstand zustande. Der zweite Effekt kann vor allem auf Verwirbelungen zurückgeführt werden. Abb. 2.164 zeigt typische Anordnungen, bei denen die beiden Effekte relevant sind.

Der Reibungswiderstand wirkt außerdem auch im Innern einer Flüssigkeit, wo keine Wände vorhanden sind. Er wird dann als innere Reibung bezeichnet. Abb. 2.165 zeigt eine typische Messanordnung: die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich zwischen 2 parallelen Platten. Eine davon wird fest gehalten, die andere mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v$

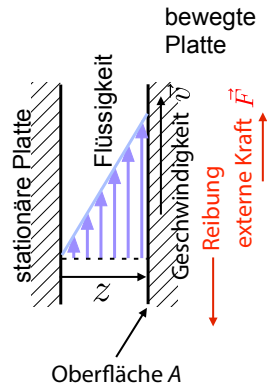


Abbildung 2.165: Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen Flüssigkeitsschichten.

nach oben bewegt. Direkt an der Oberfläche der beiden Platten ist die Flüssigkeit gegenüber der Platte in Ruhe. Dazwischen beobachtet man eine lineare Zunahme der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsschichten. Für viele Substanzen kann er beschrieben werden als eine Kraft

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx} \quad [\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \text{Pas.} \quad (2.21)$$

Diese ist proportional zur Fläche  $A$ , an der die Reibungskraft angreift, und zur Änderung  $dv/dx$  der Geschwindigkeit mit der Entfernung  $x$  von der Oberfläche. Gilt diese Beziehung nicht, so spricht man von nicht-Newton'schen Flüssigkeiten. Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  zwischen Kraft und Fläche mal Geschwindigkeitsgradient wird als Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Neben der SI-Einheit  $\text{Ns} / \text{m}^2$  wird häufig auch noch die ältere Einheit Poise ( $= 0.1 \text{ N s} / \text{m}^2$ ) verwendet. Sie stellt eine Materialeigenschaft dar, welche stark von der Temperatur abhängt.

Die Reibungskraft wirkt parallel zur Fläche  $A$  und ist somit eine Scherkraft, respektive eine Scherspannung. Während Scherkräfte in statischen Flüssigkeiten verschwinden, treten sie in der Form dynamischer Kräfte bei nicht verschwindender Viskosität auf. Diese quantifiziert somit die Scherkräfte in einem fluiden Medium. Bei sehr hoher Viskosität (Glas) verhält sich eine Flüssigkeit praktisch wie ein Festkörper.

Die Viskosität von Wasser und ähnlichen Flüssigkeiten liegt bei etwa  $10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$ . Die Werte für Gase

sind etwa hundertmal niedriger; da die Dichte von Luft etwa 1000 mal niedriger ist als die von Wasser, ist aber die Viskosität pro Masse bei Luft größer als bei Wasser. Die Viskosität wie in Gleichung (2.21) definiert wird auch als dynamische Viskosität bezeichnet, das Verhältnis  $\eta/\rho$  aus dynamischer Viskosität und Dicht als kinematische Viskosität.

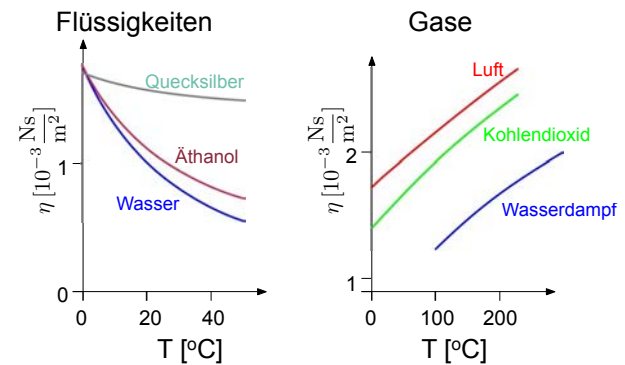


Abbildung 2.166: Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen.

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab, da dann die molekularen Bindungen gegenüber der Bewegung der Moleküle an Bedeutung verlieren. Das Extrembeispiel dafür ist Glas, wo die Viskosität beim Abkühlen kontinuierlich um viele Größenordnungen zunimmt. Abb. 2.166 zeigt den Verlauf für unterschiedliche Flüssigkeiten (links) und Gase (rechts). Bei Gasen nimmt offenbar die Viskosität mit steigender Temperatur zu, da sie auf der Bewegung von Molekülen beruht, deren Geschwindigkeit mit der Temperatur zunimmt.

### 2.11.7 Reibungswiderstand in Flüssigkeiten

Die viskose Reibungskraft wirkt als Bremskraft für die Flüssigkeit und führt gleichzeitig dazu, dass strömende Flüssigkeiten eine Kraft auf den Behälter oder den umströmten Körper ausüben. Für einen Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas schreibt die resultierende Kraft als

$$F_R = -kv. \quad [k] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}}.$$

In Übereinstimmung mit Gleichung (2.21) ist die Kraft proportional zur Geschwindigkeit. Die Proportionalitätskonstante  $k$  wird als Widerstandsbeiwert bezeichnet. Sie hängt sowohl von der Form des Körpers ab, wie auch von der Viskosität der Flüssigkeit. Für eine Kugel mit Radius  $r$  beträgt sie

$$k_K = 6\pi\eta r.$$

Dies wird als Stokes'sches Reibungsgesetz bezeichnet. Die Tatsache, dass die Kraft proportional ist zur Geschwindigkeit, führt z.B. dazu, dass ein fallender Körper in der Erdatmosphäre nach einer kurzen Beschleunigungsphase eine konstante Geschwindigkeit erreicht. Diese ist dadurch bestimmt, dass die Reibungskraft gerade die Gewichtskraft aufhebt.

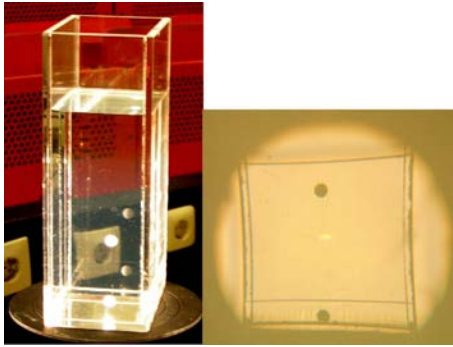


Abbildung 2.167: Freier Fall einer Kugel in Öl.

Diese kann gemessen werden, indem man die Sinkgeschwindigkeit von Kugeln in einer viskosen Flüssigkeit misst. Abb. 2.167 zeigt ein Beispiel. Nach einer "Anlaufstrecke" erreicht die Kugel eine konstante Geschwindigkeit. Diese ist dadurch bestimmt, dass die Schwerkraft gerade gleich groß wie und entgegengesetzt gerichtet zur Reibungskraft ist:

$$\begin{aligned} F_G &= (m_K - m_{Fl})g = g(\rho_k - \rho_{fl})\frac{4\pi}{3}r^3 \\ &= F_R = 6\pi\eta rv. \end{aligned}$$

Hier ist  $m_K$  die Masse der Kugel und  $m_{Fl}$  die Masse der verdrängten Flüssigkeit, welche Auftrieb erzeugt. Wir schreiben diesen Ausdruck als

$$(\rho_K - \rho_{Fl})\frac{4\pi}{3}r^3g = 6\pi\eta rv$$

und lösen auf nach der Geschwindigkeit  $v$ :

$$v = (\rho_K - \rho_{Fl})\frac{2g}{9\eta}r^2.$$

Größere Kugeln sollten also schneller fallen. Dies wird im Experiment bestätigt. Hier werden 2 Kugeln verglichen. Ihr Durchmesser beträgt 4 und 8 mm und die Dichte 1,42 g/cm<sup>3</sup>. Die gemessenen Fallzeiten sind 110, respektive 25 s, was nahe beim erwarteten Verhältnis von 4 liegt.

### 2.11.8 Turbulente Reibung und Luftwiderstand

Wenn Luft einen Körper umströmt, wird häufig Turbulenz erzeugt. Durch die Turbulenz wird kinetische Energie sehr effektiv dissipiert und der Widerstand wächst mit zunehmender Geschwindigkeit. Die Reibungskraft wird dadurch näherungsweise proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit:

$$F_R = dv^2.$$

Der Luftreibungskoeffizient  $d$  hängt von Form und Oberfläche des Körpers, aber auch von der Art des strömenden Mediums ab. Eine übliche Beschreibung verwendet den Widerstandsbeiwert  $c_w$ :

$$d = \frac{1}{2}c_w\rho A,$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Mediums und  $A$  die Querschnittsfläche darstellt, während  $c_w$  in erster Linie von der Form des Gegenstands abhängt.

Abb. 2.168 zeigt Stromlinienfelder für unterschiedliche Körper und die resultierenden Widerstandsbeiwerte. Der unterste Körper erzielt den geringsten Widerstand, indem er die Bildung von Wirbeln durch eine scharfe Kante auf der Windschattenseite vermeidet.

### 2.11.9 Rohrdurchfluss

In einem Rohr führt der Strömungswiderstand dazu, dass der Druck in einem System nicht gleichmäßig verteilt ist, sondern abfällt in Richtung der

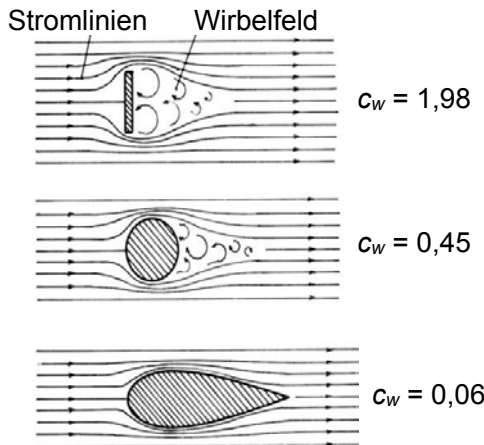


Abbildung 2.168: Widerstandsbeiwerte für unterschiedliche Körper.

Strömung. Dieser Druckgradient wird benötigt, um die Reibungsverluste aufgrund der inneren Reibung zu kompensieren. Der Strömungswiderstand beschränkt deshalb auch den Durchfluss durch ein Rohr.

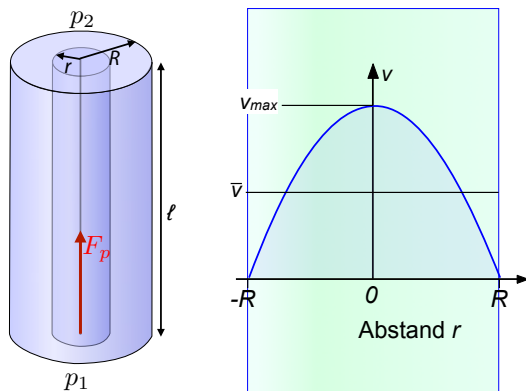


Abbildung 2.169: Durchfluss durch ein zylindrisches Rohr und resultierendes Geschwindigkeitsprofil.

Außerdem ist die Fließgeschwindigkeit nicht homogen, sondern das Geschwindigkeitsfeld bildet sich so, dass der Fließwiderstand minimal wird. Die Flüssigkeitskomponenten in der Nähe der Rohroberfläche werden durch die Reibung am stärksten gebremst und bewegen sich deshalb am langsamsten; die Komponenten in der Mitte werden am wenigsten gebremst und bewegen sich am schnellsten. Wie

in Abb. 2.169 gezeigt, ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit im Zentrum am höchsten, in der Nähe der Rohrwand nimmt sie auf Null ab.

Um den Durchfluss zu berechnen, ist es sinnvoll, die rotationssymmetrischen Randbedingungen zu berücksichtigen. Diese führen dazu, dass die Geschwindigkeit nur vom Abstand  $r$  von der Zylinderachse abhängt. Man teilt deshalb das Flüssigkeitsvolumen in konzentrische Zylinder ein, wie in Abb. 2.169 gezeigt. Auf einen Flüssigkeitszylinder mit Radius  $r$  und Länge  $\ell$  wirkt die Reibungskraft an seiner Außenwand

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = \eta 2\pi r \ell \frac{dv}{dr}.$$

Diese muss kompensiert werden durch eine Druckdifferenz  $\Delta p = p_2 - p_1$ , welche von außen erzeugt werden muss, um die Strömung aufrecht zu erhalten. Die Druckkraft auf diesen Zylinder beträgt

$$F_p = -\Delta p \pi r^2.$$

Im dynamischen Gleichgewicht sind die beiden Kräfte entgegengesetzt und gleich groß, so dass

$$\eta 2\pi r \ell dv = \Delta p \pi r^2 dr$$

oder

$$dv = \frac{\Delta p}{2\eta \ell} r dr.$$

Die Randbedingung ist, dass die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Rohrs verschwindet,  $v(r = R) = 0$ . Damit ergibt die Integration

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta \ell} (r^2 - R^2).$$

$\Delta p$  beschreibt hier die Druckänderung; da der Druck in Fließrichtung abfällt, ist die Druckänderung  $\Delta p < 0$ . Wie in Abb. 2.169 gezeigt, wird die Geschwindigkeit deshalb bei  $r = 0$  maximal und fällt mit dem Abstand vom Zentrum des Rohrs parabolisch ab.

### 2.11.10 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Der Maximalwert der Geschwindigkeit beträgt (in der Mitte des Rohrs)

$$v_{max} = v(0) = -\frac{\Delta p}{4\eta \ell} R^2.$$



Sie ist somit positiv wenn  $\Delta p$  negativ ist, d.h. wenn der Druck in der Fließrichtung abnimmt, und sie wächst linear mit der Querschnittsfläche des Rohrs, respektive quadratisch mit dessen Radius  $R$ .

Die mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt erhält man, indem man über konzentrische Kreissringe mittelt. Integriert man die Geschwindigkeit über den gesamten Querschnitt, so erhält man den Volumenfluss. Dividiert man diesen durch die Querschnittsfläche  $A = \pi r^2$  so erhält man die mittlere Geschwindigkeit. Jeder Kreisring hat die Fläche  $2\pi r dr$ , mit  $r$  als innerem und  $r + dr$  als äußeren Radius. Der Mittelwert ist somit

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \\ &= \frac{2}{R^2} \frac{\Delta p}{4\eta \ell} \int_0^R (r^2 - R^2) r dr \\ &= \frac{\Delta p}{2R^2 \eta \ell} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{r^2 R^2}{2} \right]_0^R \\ &= -\frac{\Delta p}{2R^2 \eta \ell} \frac{R^4}{4} = -\frac{\Delta p R^2}{8\eta \ell} = \frac{v_{\max}}{2}.\end{aligned}$$

Der gesamte Durchfluss durch das Rohr beträgt demnach

$$I = \bar{v} A = -\frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta \ell}.$$

Dies ist bekannt als das Gesetz von Hagen-Poiseuille: Der Durchfluss durch ein gerades Rohr ist proportional zur vierten Potenz des Rohrradius, zum Druckabfall  $\Delta p/\ell$  und invers proportional zur Viskosität  $\eta$ .

Im Experiment ( $\rightarrow$  Abb. 2.170) kann der konstante Wasserdruck dadurch erzeugt werden, dass bei sinkender Flüssigkeitssäule ein abnehmender Luftdruck über der Flüssigkeit steht: es wird nur soviel Luft nachgezogen, dass am unteren Ende des Rohres gerade der Druck  $p_0$ , d.h. der atmosphärische Außendruck entsteht, unabhängig von der Höhe der Flüssigkeitsoberfläche. Es wird die Flüssigkeitsmenge gemessen, welche in 30 Sekunden durch jeweils ein Rohr mit gegebenem Querschnitt fließt. Das Verhältnis der beiden Rohr-Innendurchmesser beträgt  $0.8 / 1.5$  mm; wir erwarten somit ein Verhältnis der

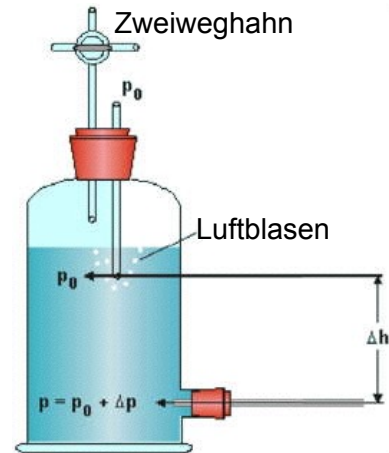


Abbildung 2.170: Verifizierung des Gesetzes von Hagen-Poiseuille. Die Anordnung stellt sicher, dass der Druck beim Ausfluss konstant ist, auch wenn die Flüssigkeitsoberfläche sinkt.

Flüssigkeitsmengen von  $(1.5/0.8)^4 = 12.4$ . Experimentell finden wir ein Verhältnis von ca. 12.

Die Druckdifferenz, welche benötigt wird, um eine mittlere Geschwindigkeit durch das Rohr zu erzielen, beträgt

$$\Delta p = -\bar{v} \frac{8\eta \ell}{R^2},$$

d.h. sie sinkt mit der Querschnittsfläche des Rohrs, während die Durchflussmenge ansteigt. Im statischen Grenzfall ( $v \rightarrow 0$ ) verschwindet der Druckabfall, wir erhalten das hydrostatische Gleichgewicht.

Daraus können wir auch den Widerstandsbeiwert für die Strömung durch das Rohr berechnen als

$$k = -\frac{F_R}{\bar{v}} = -\Delta p \pi \frac{R^2}{\bar{v}} = 8\eta \ell \pi.$$

Er hängt somit nur von der Viskosität des Mediums und der Länge der Rohres ab, aber nicht vom Radius. Die zunehmende Oberfläche wird gerade kompensiert durch den kleineren Gradienten der Geschwindigkeit.

### 2.11.11 Ähnlichkeit von Strömungen

Die Viskosität spielt auch eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung von Strömungen. So wird der

Übergang von laminaren zu turbulenten Strömungen oder die Art des Strömungswiderstandes durch das Verhältnis aus kinetischer Energie zu Reibungsenergie beeinflusst. Ist dieses Verhältnis gleich, so spricht man von ähnlichen Strömungen.



Abbildung 2.171: Osborne Reynolds (1842 - 1912).

Ob zwei Strömungen ähnlich sind, kann man einfach anhand der dimensionslosen Reynolds-Zahl (nach Osborne Reynolds, Abb. 2.171) bestimmen:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}. \quad [Re] = 1$$

Hier stellen  $\rho$  und  $\eta$  die Dichte und Viskosität des Mediums,  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $d$  eine typische Dimension des Körpers dar. Niedrige Reynolds-Zahlen findet man z.B. bei kleinen Dimensionen (z.B. Einzeller in Wasser) oder großen Dimensionen (z.B. Meeresströmungen).

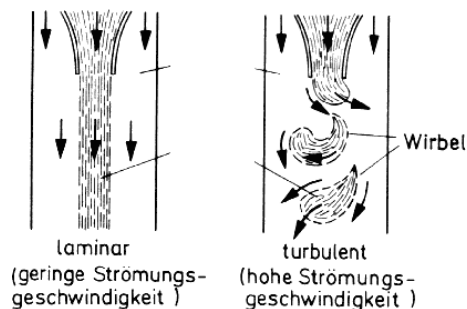


Abbildung 2.172: Einsetzen von Turbulenz.

Bei kleinen Geschwindigkeiten (und damit kleinen Reynolds-Zahlen) sind Strömungen laminar, bei

großen Reynolds-Zahlen werden sie turbulent. Abb. 2.172 zeigt schematisch das unterschiedliche Verhalten. Im Bereich der turbulenten Strömung bilden sich Wirbel auf unterschiedlichen Längenskalen. Die kinetische Energie des strömenden Mediums wird dabei von großen auf kleinere Skalen übertragen, wo die Reibung sie effizient in Wärme umwandelt. Da hier mehr Energie dissipiert wird, steigt der Strömungswiderstand stark an. Biologische Systeme, wie z.B. das Blut-Kreislaufsystem des Menschen, sind deshalb darauf optimiert, Turbulenz zu vermeiden.

Wirbel können auch an Unstetigkeiten in den Randbedingungen entstehen, wie z.B. an den Enden von Flugzeugflügeln. Unter bestimmten Bedingungen sind Wirbel recht stabil und können über längere Zeiten bestehen bleiben und dabei erhebliche Distanzen zurücklegen.

### 2.11.12 Strömende Gase (Aerodynamik)

Bei der Diskussion der Strömung von Gasen muss zusätzlich die Kompressibilität berücksichtigt werden. Qualitativ bleiben die bisher diskutierten Ergebnisse jedoch erhalten. Quantitative Ergebnisse sollen hier auch nicht erhalten werden.

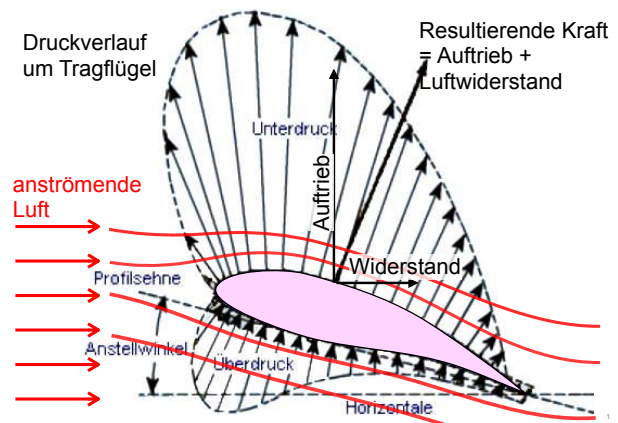


Abbildung 2.173: Auftrieb an einem Flugzeugflügel.

So kann z.B. der Auftrieb eines Flugzeugflügels mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung diskutiert werden. Abb. 2.173 stellt schematisch einen Flugzeugflügel dar, welcher von Luft umströmt wird. Auf der

Oberseite ist die Geschwindigkeit höher und darum der Druck geringer als auf der Unterseite. Die gesamte am Flügel angreifende Kraft besteht aus der Auftriebskraft und der Widerstandskraft, welche mit Hilfe eines Motors oder Triebwerks überwunden wird.

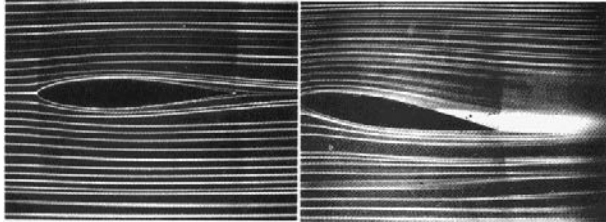


Abbildung 2.174: Strömungsabriss.

Voraussetzung für diesen Effekt ist eine laminare Strömung. Macht man den Anstellwinkel zu groß, so wird die Strömung am hinteren Ende des Flügels turbulent, wie in Abb. 2.174 gezeigt. Damit wird die Geschwindigkeit geringer und der Druck höher, so dass der Auftrieb "abbricht". Man spricht vom Strömungsabriss.

Ähnliche Strömungsprofile findet man auch bei Segelbooten oder Windsurfern.

### 2.11.13 Der Magnus-Effekt

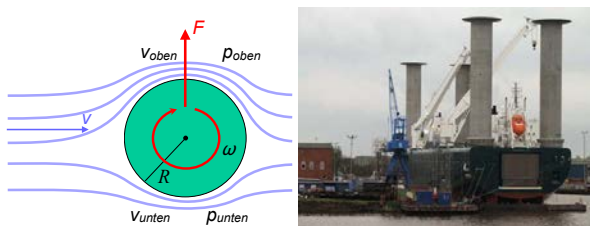


Abbildung 2.175: Links: der Magnus-Effekt.  
Rechts: Flettner-Rotor als Schiffsantrieb.

Eine etwas andere Anwendung des Bernoulli'schen Prinzips verwendet der Flettner-Rotor, der z.T. für Segelschiffe verwendet wurde. Das zu Grunde liegende Prinzip wird als Magnus Effekt bezeichnet. Das Schiff verwendet senkrecht stehende Zylinder, welche um ihre Achse rotieren (→ Abb. 2.175).

Von der Seite anströmende Luft fließt dann aufgrund der Oberflächenreibung bevorzugt in Drehrichtung um den Zylinder. Auf der Vorderseite ist deshalb die Strömungsgeschwindigkeit größer und der statische Druck geringer. Das Schiff erhält damit eine Kraft in Vorwärtsrichtung.

Die Geschwindigkeiten betragen

$$v_{oben} = v + \omega R; v_{unten} = v - \omega R,$$

mit  $R$  als Radius des Zylinders und  $v$  der Geschwindigkeit der Luft ohne den Rotor. Aus dem Bernoulli-Gesetz folgt, dass der Gesamtdruck, bestehend aus statischem plus Staudruck auf beiden -Seiten gleich sein muss:

$$p_{oben} + \frac{1}{2}\rho(v + \omega R)^2 = p_{unten} + \frac{1}{2}\rho(v - \omega R)^2.$$

Somit existiert eine Druckdifferenz

$$\Delta p = p_{oben} - p_{unten} = -\frac{1}{2}\rho(4\omega Rv) = -2\rho\omega Rv.$$

Diese Druckdifferenz ergibt eine antreibende Kraft

$$F = A_{eff}\Delta p = -2RL(2\rho\omega Rv) = -4R^2L\rho\omega v,$$

mit  $A_{eff} = 2RL$  als Querschnittsfläche des Zylinders und  $L$  dessen Höhe.

Der Effekt kann in einem einfachen Experiment gezeigt werden. Dazu wird eine Kunststoffrolle wie ein Jojo an einer Schnur fallengelassen, so dass sie sich dabei dreht. Dadurch erhält man die Kombination von Drehung und Relativgeschwindigkeit, welche für den Magnus-Effekt benötigt werden: die Rolle fällt in einem Bogen.