

11 Ionisierende Strahlung

Literatur zu diesem Kapitel:

- J. Bille, W. Schlegel (Hrsg.), Medizinische Physik, Band 2, Kap.2
- Heinz Morneburg (Ed.), Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik, Kap. 4
- Dössel, Bildgebende Verfahren in der Medizin Kap. 5
- Bushberg et al., The essential physics of medical imaging, Kap. 3

11.1 Übersicht

11.1.1 Ionisierende Strahlung

Strahlung wird als ionisierend bezeichnet, wenn sie in der Lage ist, im Gewebe Moleküle zu ionisieren. Dafür müssen die Teilchen eine Energie enthalten, welche oberhalb der Ionisierungsenergie der Moleküle liegt. Die Ionisierungsenergie von Wasser beträgt 12,6 eV, bei organischen Molekülen liegt sie niedriger. In menschlichem Gewebe liegt die Grenze für Ionisationsprozesse bei etwa 5 eV. Diese Grenze wird bei praktisch allen Arten von Strahlung erreicht, die sich aus massiven Teilchen zusammensetzt, also z.B. α -, β - oder Protonen-Strahlung. Im Rahmen dieses Kapitels beschäftigen wir uns jedoch nur mit elektromagnetischer Strahlung.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, das grundlegende Verständnis der zu Grund liegenden physikalischen Prozesse zu vermitteln. Dies ist z.B. Voraussetzung für die Entwicklung der entsprechenden Geräte, aber auch für ihre optimale Anwendung.

Bei der Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern mit Materie ist der Teilchenaspekt wichtig, besonders wenn die Photonenenergie größer als etwa 1 eV wird. Der Effekt von ionisierender Strahlung beruht darauf, dass einzelne Quanten der Ener-

gie $h\nu$ vollständig absorbiert werden oder durch Stöße einen Teil ihrer Energie übertragen. Diese kann Moleküle ionisieren, wenn sie oberhalb von etwa 5 eV liegt. Die entsprechende Wellenlänge berechnen wir aus

$$5 \text{ eV} = 5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

zu

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{hc}{8 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \\ &= \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{8 \cdot 10^{-16} \text{ J}} = 250 \text{ nm.}\end{aligned}$$

Diese Wellenlänge liegt im ultravioletten Bereich des Spektrums. Zur ionisierenden Strahlung gehört somit kurzwelliges ultraviolettes Licht, Röntgenstrahlung und γ -Strahlung. Wie in Abb. 11.1 gezeigt, ist die durchschnittliche Wellenlänge für medizinisch-diagnostische Röntgenstrahlung mit etwa 25 pm rund vier Größenordnungen kürzer.

11.1.2 Medizinische Anwendungen

Ionisierende Strahlung wird in der Medizin im Wesentlichen zu zwei unterschiedlichen Zwecken eingesetzt: für Diagnose und Therapie. Beim Röntgen ist man interessiert an einer teilweisen Transmission der Strahlung durch das Gewebe, bei der Nukleardiagnose an einer möglichst vollständigen Transmission. In beiden Fällen sind die ionisierenden Effekte unerwünscht und sollen möglichst gering gehalten werden sollen. Bei der Strahlentherapie jedoch ist man spezifisch daran interessiert, solche ionisierenden Effekte zu nutzen, in erster Linie für die Be seitigung von malignem Gewebe. Aufgrund der hohen Eindringtiefe ist es möglich, auch tief liegendes Gewebe auf diese Weise zu zerstören.

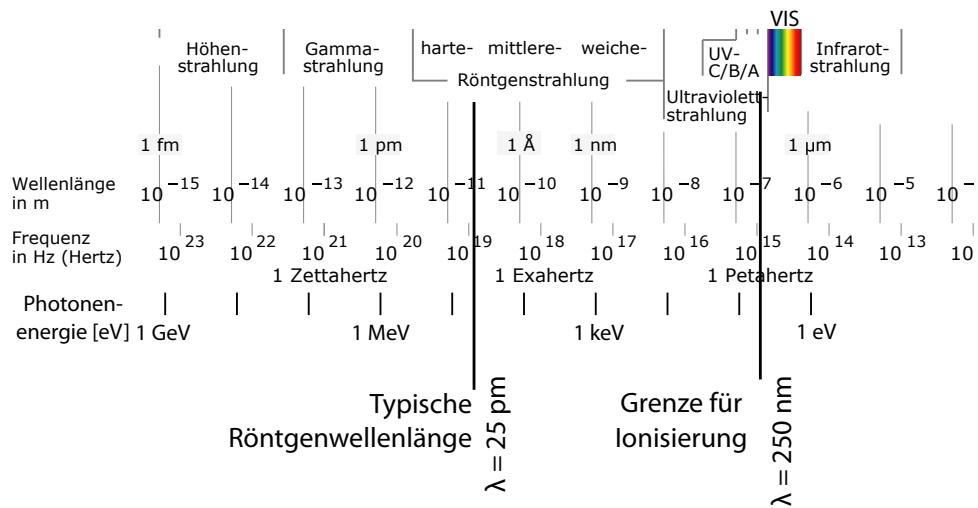


Abbildung 11.1: Übersicht über das elektromagnetische Spektrum.

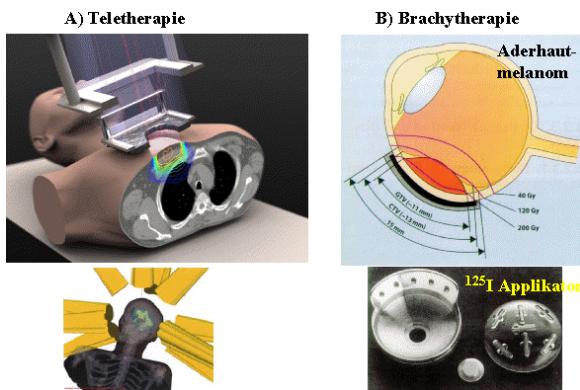


Abbildung 11.2: Formen der Strahlentherapie: Teletherapie (links) und Brachytherapie (rechts).

Strahlentherapie kann mit elektromagnetischer Strahlung durchgeführt werden (Röntgen-, γ -Strahlung), oder mit geladenen Teilchen (Elektronen, Kerne). Ionisierende Strahlung wird entweder eingesetzt, indem man ein radioaktives Präparat in den Körper einbringt (Brachytherapie; *brachys* = kurz, nah), oder indem man den Körper mit einer externen Quelle bestrahlt (Teletherapie, *tele* = fern). Bei der Brachytherapie erreicht man eine gute Dosiszentrierung auf das Zielvolumen, allerdings ist sie eine invasive Methode und die Planung ist schwieriger. Die Teletherapie wird häufiger

eingesetzt, obwohl sich eine ungünstigere Dosisverteilung ergibt. Ein Vorteil ist die Möglichkeit der fraktionierten Strahlenbehandlung, bei der die Gesamtdosis in kleinere Teildosen aufgeteilt wird. In den beiden Techniken kommen unterschiedliche Arten von Strahlung zum Einsatz.

11.1.3 Wechselwirkung mit Materie

Um solche Techniken gezielt anwenden zu können, muss man die Wechselwirkung der Strahlung mit dem Gewebe im Detail verstehen. Man unterscheidet bei allen Arten von Wechselwirkung zwischen primären und sekundären Effekten.

Bei den primären Effekten handelt es sich um die Wechselwirkung der Strahlung selber mit dem Gewebe. Handelt es sich um Photonen, so erfolgt die Wechselwirkung primär mit den Elektronen. Im Falle von schweren Teilchen kann zusätzlich die Wechselwirkung mit den Kernen eine Rolle spielen. Im Falle von Neutronen erfolgt die Wechselwirkung fast ausschließlich mit den Kernen.

Bei den Primärprozessen wird häufig so viel Energie auf die Elektronen übertragen, dass diese aus dem Molekül heraus gelöst werden und selber genügend Energie besitzen, um weitere Ionisationsprozesse zu bewirken. Man bezeichnet dies als Sekundärwechselwirkung.

Im Rahmen dieser Vorlesung werden nur die grundlegenden Wechselwirkung von kurzwelliger elektromagnetischer Strahlung mit Materie diskutiert. Themen wie die Wechselwirkung von massiven Teilchen (Elektronen, α -Teilchen, Protonen, Kerne), die biologische Wirkungsweise, Dosimetrie, Strahlenschutz sowie alle therapeutischen Anwendungen werden hier nicht diskutiert, sondern in der Vorlesung "Medizinische Strahlenphysik".

11.2 Energiedeposition durch Photonen

11.2.1 Phänomenologie

In erster (und recht guter) Näherung gilt für elektromagnetische Strahlung, dass die transmittierte Energie exponentiell mit der Eindringtiefe x abnimmt:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x},$$

sofern das Material homogen ist. Dies entspricht dem Lambert-Beerschen Gesetz. Diese Abhängigkeit erhält man, wenn die Abnahme der Intensität, $-dI$ beim Durchlaufen einer dünnen Schicht dx proportional ist zur einfallenden Intensität,

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I dx.$$

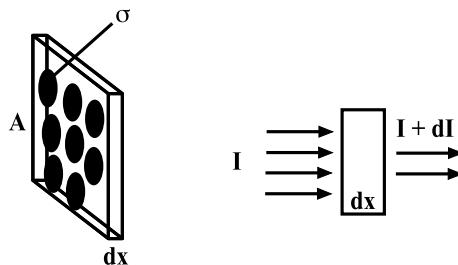


Abbildung 11.3: Streuquerschnitt σ und Abschwächung des Strahls.

Für die Interpretation dieses Befunds verwendete man ein einfaches Bild: ein Photon wird von einem Teilchen innerhalb dieser Schicht absorbiert, wenn es das Teilchen innerhalb einer Fläche σ trifft, ansonsten fliegt es durch die Schicht der Dicke dx . Die

Fläche σ bezeichnet man als Wirkungsquerschnitt, mit der Einheit $[\sigma] = \text{m}^2$. Eine äquivalente Einheit ist das barn, mit $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$. Ist die Schicht dünn genug, so dass sich die einzelnen Flächen σ nicht überlappen, so ist die Absorptionswahrscheinlichkeit μdx gegeben durch das Verhältnis aus der im Volumen $A dx$ enthaltenen Querschnittsflächen zur gesamten Fläche A . Die Anzahl der Teilchen erhalten wir aus dem Produkt aus Teilchendichte n ($[n] = \text{m}^{-3}$) und dem Volumen $V = A dx$. Somit ist

$$\mu dx = \frac{\text{Fläche der Absorber}}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{A dx \sigma}{A}$$

oder

$$\mu = n \sigma.$$

Die Teilchendichte bestimmen wir aus der Massendichte ρ ($[\rho] = \text{kg/m}^3$), der Molmasse m_{mol} [kg/Mol] und der Avogadrokonstanten $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ Mol}^{-1}$:

$$n = \frac{N_A \rho}{m_{mol}} \rightarrow \mu = \frac{N_A \rho}{m_{mol}} \sigma.$$

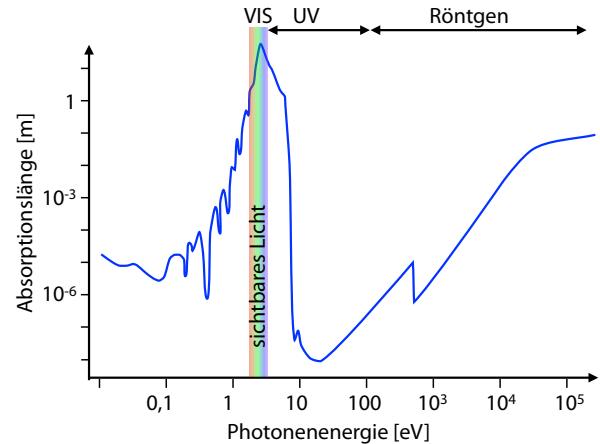


Abbildung 11.4: Absorptionslänge in Wasser als Funktion der Photonenergie.

Der Wirkungsquerschnitt σ und damit die Absorptionslänge $1/\mu$ sind stark von der Wellenlänge, d.h. der Photonenergie abhängig. Wasser ist für sichtbares Licht sehr transparent, aber ultraviolettes Licht wird mit einer Absorptionslänge von etwa 10 nm sehr stark absorbiert. Mit weiter zunehmender Photonenergie nimmt der Wirkungsquerschnitt ab und damit die Absorptionslänge wieder zu.

11.2.2 Absorption und Streuung

Eintreffende Photonen können im Objekt absorbiert, transmittiert oder gestreut werden. Die Streuprozesse können elastisch oder inelastisch sein, und die Photonen können nach vorne oder rückwärts gestreut werden.

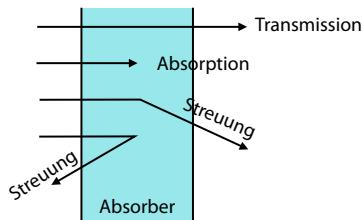


Abbildung 11.5: Mögliche Prozesse bei der Wechselwirkung von Photonen mit Materie.

Bei Absorptions-, wie auch bei Streuprozessen, wird zunächst nicht die gesamte Energie des Photons auf das Material übertragen, sondern nur ein Teil. Außerdem wird die übertragene nicht sofort thermatisiert, ein Teil wird auf andere Teilchen übertragen, insbesondere gestreute Elektronen. Der Anteil an Energie, der auf die Elektronen übertragen wird, liegt typischerweise in der Größenordnung von 70 %.

Absorbierte Photonen übertragen ihre Energie auf das Objekt und tragen zur Ionisation bei. Die gesamte absorbierte Energie pro Masse wird als Dosis D bezeichnet und mit der Einheit

$$[D] = \frac{\text{J}}{\text{kg}} = \text{Gray} = \text{Gy}.$$

Früher wurde als Einheit das rad (rd) verwendet, mit $1\text{rd} = 0,01\text{ Gy}$.

Gestreute Photonen können ebenfalls einen Teil ihrer Energie im Gewebe deponieren. Werden sie nach vorne gestreut, so können sie außerdem zum detektierten Signal beitragen. Da gestreute Strahlen je nach Geometrie der Anordnung auf den Detektor treffen und damit zur transmittierten Energie beitragen oder nicht, hängt der scheinbare Schwächungskoeffizient von der Geometrie der Anordnung ab. Je breiter der Strahl, desto mehr Photonen werden gestreut und desto mehr fallen auf den Detektor.

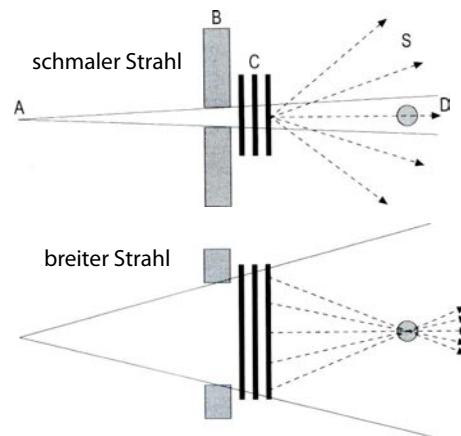


Abbildung 11.6: Streustrahlung und unterschiedliche Schwächungskoeffizienten für unterschiedlich breite Strahlen.

11.2.3 Relevante Prozesse

Man kann eine Reihe von unterschiedlichen physikalischen Prozessen unterscheiden, welche zur Abschwächung eines Strahls beitragen.

Gesamte Abschwächung: μ
 Photoabsorption: τ
 Streuung: σ
 kohärente Streuung: σ_R
 inkohärente Streuung: σ_C
 Paarbildung: X

Abbildung 11.7: Beiträge zum Schwächungskoeffizienten.

Wir unterscheiden zunächst Photoabsorption, Streuung und Paarbildung als die wichtigsten physikalischen Mechanismen. Innerhalb der Streuprozesse wird noch zwischen kohärenter und inkohärenter Streuung unterschieden. Ebenfalls möglich, aber deutlich seltener, ist der Prozess der Absorption von Photonen durch den Kern und die daraus folgenden Kernreaktionen.

Abb. 11.8 zeigt schematische Bilder für die einzelnen Prozesse. Die Wirkungsquerschnitte der einzelnen Prozesse hängen in unterschiedlicher Weise vom streuenden Material, insbesondere von der Kernladungszahl ab, sowie von der Energie der Photo-

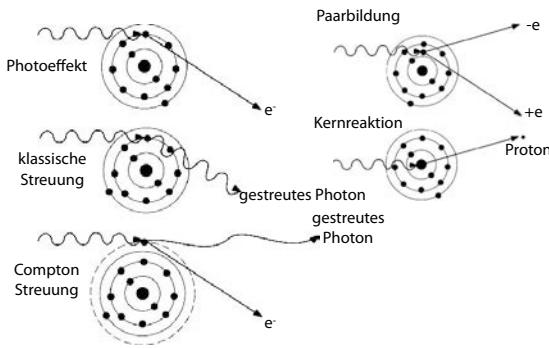


Abbildung 11.8: Primärprozesse für Photonen.

nen. Ihre Wirkungsquerschnitte addieren sich zum Gesamt-Wirkungsquerschnitt.

Im Folgenden werden die drei wichtigsten Prozesse diskutiert: kohärente (klassische) Streuung, Photoeffekt, sowie Compton-Streuung.

11.2.4 Kohärente Streuung

Ein einfaches Modell für die Streuung von Licht ist die Betrachtung eines Elektrons, das sich im Potenzial eines harmonischen Oszillators bewegt (Frequenz ω_0 , Dämpfung Γ). Zusätzlich wirkt das elektrische Feld \vec{E} einer elektromagnetischen Welle auf das Elektron. Dabei reicht es, wenn wir nichtrelativistische Geschwindigkeiten betrachten, sodass die Wirkung des Magnetfeldes vernachlässigt werden kann: die relative Stärke des Magnetfeldes ist $\sim v/c$, verglichen mit der Amplitude des elektrischen Feldes. Im Rahmen eines einfachen Modells kann man für die Auslenkung \vec{r}_0 des Elektrons schreiben

$$m\ddot{\vec{r}}_0 + m\Gamma\dot{\vec{r}}_0 + m\omega_0^2\vec{r}_0 = -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t},$$

wobei schon die Näherung $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_0) \approx 1$ benutzt wurde, also dass die Auslenkung gering sei im Vergleich zur Wellenlänge der Strahlung. In der stationären Lösung erhält man für das zeitabhängige Dipolmoment des Elektrons

$$\vec{p}(t) = -e\vec{r}_0(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Ein oszillierender elektrische Dipol strahlt wiederum eine elektromagnetische Welle ab. Der differen-

zielle Wirkungsquerschnitt ist gleich der abgestrahlten Leistung pro Raumwinkelement $dP/d\Omega$, geteilt durch die einfallende Leistung pro Fläche, also den Betrag des Poynting-Vektors $|\vec{S}|$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP/d\Omega}{\langle |\vec{S}| \rangle}.$$

Die Mittelwerte werden jeweils über eine Periode gebildet. Für Dipolstrahlung gilt

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} c |\vec{E}_0|^2,$$

und für die pro Raumwinkelement im Mittel abgestrahlte Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \omega^4 |\vec{p}|^2 \sin^2(\vartheta),$$

wobei ϑ den Winkel zur Auslenkungsrichtung bezeichnet. Setzt man diese beiden Gleichungen in diejenige für den differenziellen Wirkungsquerschnitt ein, so kann man daraus den totalen Wirkungsquerschnitt berechnen:

$$\sigma_t = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}.$$

Man erhält im Rahmen dieses Modells eine Resonanzkurve

$$\sigma_t = \sigma_T \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}.$$

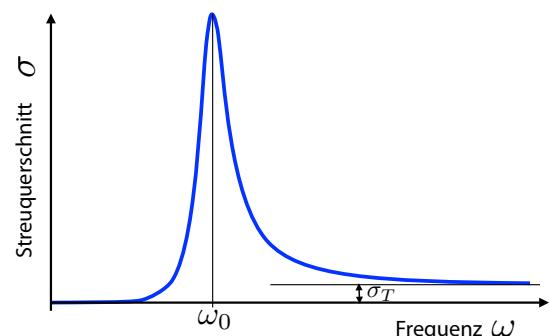


Abbildung 11.9: Resonanzkurve des Streuquerschnitts

Der resonante Fall, $\omega = \omega_0$ entspricht der resonanten Absorption, also z.B. dem Treffen einer K-Kante. Hier interessiert primär der nicht resonante Fall.

11.2.5 Rayleigh- und Thomson-Streuung

Für Frequenzen weit oberhalb der Resonanzfrequenz, $\omega \gg \omega_0$, erhält man Thomson-Streuung, $\sigma_t \approx \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$, und für sehr kleine Frequenzen ($\omega \ll \omega_0$) Rayleigh-Streuung $\sigma_t \approx \sigma_R = \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$. Im Bereich der Rayleigh-Streuung kann das System (das Atom) der Anregung folgen. Die erzwungene Schwingung erzeugt eine Dipolstrahlung, wobei die Emissionsstärke mit der vierten Potenz der Frequenz abnimmt. Der Wirkungsquerschnitt für die Rayleigh-Streuung steigt mit der Kernladungszahl des Atoms, mit einem Exponenten zwischen 2 und 3: $\sigma_R \propto Z^{2\ldots 3}$.

Für die Thomson-Streuung kann man einen Wirkungsquerschnitt von

$$\sigma_T = 8 \frac{\pi}{3} r_e^2 = 6.6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 = 0.66 \text{ b}$$

berechnen. Hier stellt

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.8179 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

den klassischen Elektronenradius dar.

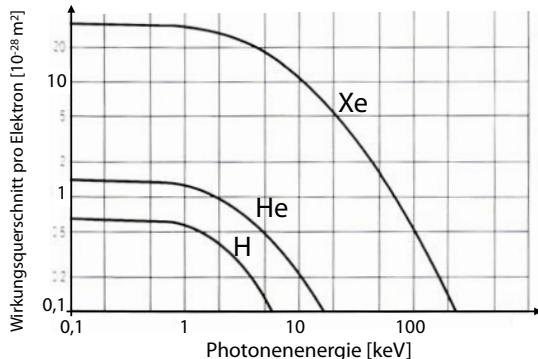


Abbildung 11.10: Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts pro Elektron von der Ordnungszahl und der Photonenergie.

In diesem Modell ist der Streuquerschnitt unabhängig von der Frequenz. Dies gilt allerdings nur für Photonenergien bis etwa 1 keV, darüber nimmt die Streueffizienz stark ab. Im Rahmen des Modells ist der Wirkungsquerschnitt auch unabhängig von der Kernladungszahl. In Wirklichkeit nimmt er mit der

Ordnungszahl zu. Die Zunahme mit Z kann qualitativ so erklärt werden, dass die Elektronen nicht wirklich frei sind, sondern in Atomen gebunden. Die eintreffende Welle versetzt alle Elektronen im Atom gleichzeitig in Schwingung, so dass sich die von ihnen abgestrahlten Wellen konstruktiv überlagern.

11.2.6 Photoeffekt

Beim Photoeffekt wird die gesamte Energie des Photons dazu benutzt, ein in einem Atom gebundenes Elektron mit der Bindungsenergie $\mathcal{E}_B < 0$ aus der Elektronenhülle zu entfernen. Es besitzt danach die kinetische Energie

$$\mathcal{E}_{kin} = \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_B. \quad (11.1)$$

Hier stellt \mathcal{E}_γ die Energie des Photons dar.

Die Absorption eines Photons ist nur möglich, wenn dabei Energie und Impuls erhalten bleiben. Gleichung (11.1) beschreibt die Energieerhaltung. Die Impulserhaltung setzt voraus, dass zusätzlich zum Elektron ein weiteres Teilchen vorhanden ist. Dies ist normalerweise der Kern, der zwar wenig Energie aufnimmt, aber einen wesentlichen Teil des Impulses.

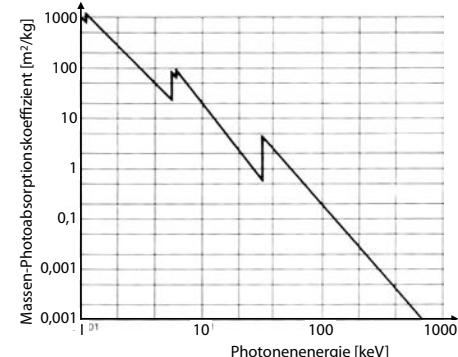
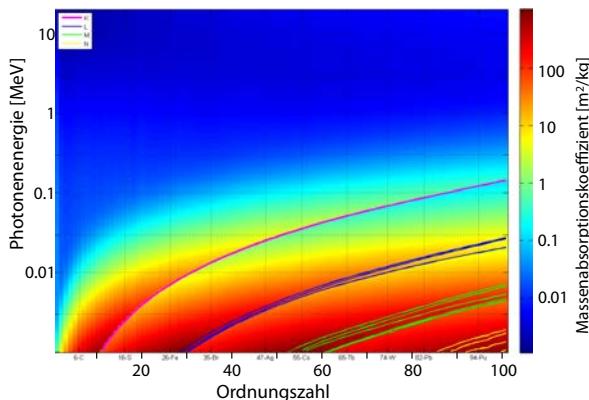


Abbildung 11.11: Energieabhängigkeit des Photoabsorptionskoeffizienten für Xenon.

Der Wirkungsquerschnitt und damit der Massen-Absorptionskoeffizient nehmen mit zunehmender Photonenergie rasch ab. In Abb. 11.11 nimmt der Absorptionskoeffizient oberhalb von 40 keV etwa $\propto \mathcal{E}_\gamma^{-2,6}$ ab.



Material	Z_{eff}
Luft	7.64
Wasser	7.42
Muskel	7.42
Knochen	13.8
Fett	5.92

Abbildung 11.12: Abhängigkeit des Massenabsorptionskoeffizienten von der Photonenergie und der Ordnungszahl.

Der Wirkungsquerschnitt für die Photoabsorption ist maximal, wenn die Photonenergie der Bindungsenergie entspricht $\mathcal{E}_\gamma \approx -\mathcal{E}_B$. Es gibt jedoch keinen einfachen analytischen Ausdruck für die Abhängigkeit der Eindringtiefe von Energie und Material. Eine brauchbare Näherung ist

$$\tau_{ph} \sim \rho \left(\frac{Z}{\mathcal{E}_\gamma} \right)^3 (1 + 0.008Z).$$

Im Bereich der biologischen Gewebe ($Z \sim 8$) nimmt somit die Absorption etwa mit der dritten Potenz der Kernladungszahl zu, bei schweren Kernen etwas stärker.

Für chemische Verbindungen und heterogene Mischungen wie zum Beispiel Gewebe, wird eine **effektive Kernladungszahl** eingeführt:

$$Z_{\text{eff}}^m := \sum_i x_i Z_i^m,$$

wobei x_i den Gewichtsanteil der i -ten Atomsorte bezeichnet und die Summe über alle Atomsorten läuft. Für Wasser erhält man demnach

$$\begin{aligned} Z_{\text{eff}}^3 &= \frac{1}{18} (16 \cdot 8^3 + 2 \cdot 1^3) = \frac{4097}{9} \\ Z_{\text{eff}} &\approx 7,69. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle zeigt einige effektive Kernladungszahlen.

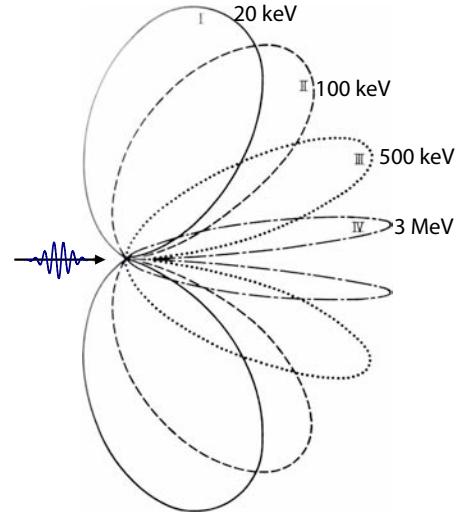


Abbildung 11.13: Richtungsverteilung der Photoelektronen.

Klassisch würde man erwarten, dass die Photoelektronen in Richtung des elektrischen Feldes, also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Photonen abgestrahlt werden. Diese Erwartung ist recht gut erfüllt für niedrige Photonenergien. Bei höheren Energien wird jedoch der Impulsübertrag vom Photon auf das Elektron wichtig und die Verteilung wird zunehmend in Ausbreitungsrichtung verschoben.

Das vom befreiten Elektron zurückgelassene Loch wird durch Übergänge anderer, noch gebundener Elektronen, aufgefüllt. Die dabei freiwerdende Energie wird durch die Ausstrahlung charakteristischer Photonen (**Fluoreszenzstrahlung**) oder die Emission von **Auger-Elektronen** aus dem Atom transportiert.

Beim Auger-Prozess wird das vorhandene Loch in der Elektronenhülle aufgefüllt, indem ein Elektron aus einer höheren Schale hinunterfällt und die Energie an ein anderes Elektron abgibt, welches dadurch in einen nicht gebundenen Zustand übergeht. Dieser Prozess wurde 1922 von Lise Meitner und 1926

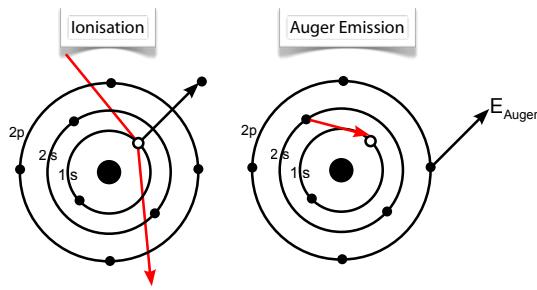


Abbildung 11.14: Auger-Prozess.

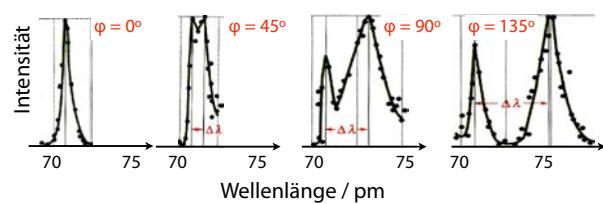


Abbildung 11.16: Spektren der gestreuten Röntgenstrahlung für unterschiedliche Streuwinkel.

von Pierre Auger¹ gefunden. Die Energie der Auger-Elektronen ist relativ gering und ihre Reichweite deshalb klein.

11.2.7 Compton-Effekt: Phänomenologie

Streut man Röntgenlicht an freien (d.h. schwach gebundenen) Elektronen, so stellt man fest, dass das gestreute Licht neben der Wellenlänge des einfallenden Lichtes auch eine andere Wellenlänge enthält.

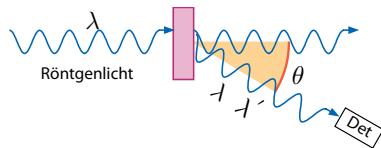


Abbildung 11.15: Geometrie des Streuexperiments.

Die Verteilung ist nicht kontinuierlich, sondern das gestreute Licht enthält neben der ursprünglichen Wellenlänge nur eine weitere Wellenlänge. Diese ist größer, d.h. die entsprechende Frequenz ist niedriger.

Die Verschiebung $\Delta\lambda$ dieser zweiten Wellenlänge ist eine einfache Funktion des Streuwinkels θ :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

mit

$$\lambda_C = 2,4 \text{ pm.} \quad (11.2)$$

Am Größten ist der Wellenlängenunterschied somit in Rückwärtsstreuung, also für $\theta = \pi$. Diese Messungen wurden erstmals 1923 von Arthur Compton durchgeführt.

¹Pierre Victor Auger, 1899-1933

Der Effekt ist unabhängig vom verwendeten Probenmaterial. Dies deutet darauf hin, dass die Bindung im Atom für diesen Effekt keine Rolle spielt. Man kann ihn deshalb in guter Näherung als Streuung an freien Elektronen behandeln. Für den typischen Energiebereich der Compton-Streuung von 50 keV bis zu einigen MeV gilt für die meisten Elektronen $\mathcal{E}_\gamma \gg |\mathcal{E}_b|$, d.h. die Bindungsenergie des Elektrons kann vernachlässigt werden und die Näherung mit dem Modell eines freien Elektrons ist gut.

Für Photonen mit einer Wellenlänge $\lambda > 2,4 \text{ pm}$ wird die Photonenenergie nur teilweise übertragen.

11.2.8 Erhaltungssätze

Der Compton Effekt kann im Rahmen der Wellentheorie der Röntgenstrahlung nicht interpretiert werden. Man erhält diesen Befund jedoch als Resultat einer einfachen Rechnung, sofern man dem Röntgenlicht Teilchencharakter zuschreibt, d.h. indem man es als einen Strom von Photonen behandelt, deren Energie durch die Planck'sche Beziehung $\mathcal{E} = hv$ gegeben ist. Da die Frequenz abnimmt, geben diese Photonen offenbar einen Teil ihrer Energie ab. Da die Art der Atome keinen Einfluss auf den Streuprozess hat, kann man davon ausgehen, dass die Photonen an einzelnen quasi-freien Elektronen gestreut werden und nicht an den Kernen oder an ganzen Atomen. Die Elektronen müssen somit nach dem Streuprozess eine höhere Energie haben, also eine größere Geschwindigkeit.

Man geht also davon aus, dass jedes Photon einzeln an einem Elektron gestreut wird. Für jeden dieser

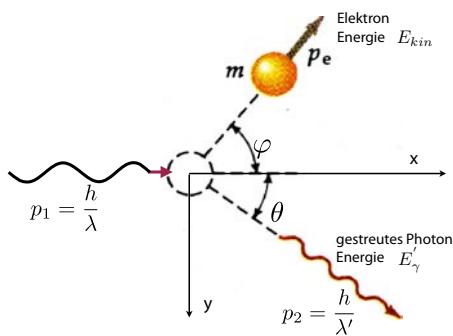


Abbildung 11.17: Spektren der gestreuten Röntgenstrahlung für unterschiedliche Streuwinkel.

Streuprozesse gilt Energieerhaltung:

$$hv = hv' + \frac{mv^2}{2}.$$

Hier stellt m die Elektronenmasse dar und v die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Stoß. Die Geschwindigkeit vor dem Stoß wird vernachlässigt.

Außerdem gilt ein Erhaltungsgesetz für den Impuls. Der Impuls des Photons beträgt

$$p_{Ph} = \frac{h}{\lambda}.$$

Die x -Komponente des Gesamtimpulses ist somit

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + mv \cos \varphi$$

und die y -Komponente

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - mv \sin \varphi.$$

Die drei Gleichungen können nach λ' aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \\ &= \lambda_C(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Compton-Wellenlänge

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2.426 \cdot 10^{-12} \text{ m},$$

in Übereinstimmung mit der phänomenologischen Gleichung (11.2). Sie enthält nur Naturkonstanten, d.h. sie hängt nicht vom Material oder von der Wellenlänge des Röntgenlichtes ab. Da sie im Picometerbereich liegt, muss man Licht mit einer vergleichbaren Wellenlänge, also Röntgenlicht, verwenden, um den Effekt beobachten zu können. Photonen mit hoher Energie haben kurze Wellenlängen, eine Verschiebung um 2.4 pm führt zu einer großen Änderung, während sie z.B. bei sichtbaren Photonen ($\lambda \approx 500 \text{ nm} = 5 \cdot 10^5 \text{ pm}$) praktisch nicht messbar ist:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} < \frac{2 \cdot 2.4}{500000} \approx 10^{-5}.$$

11.2.9 Energieübertrag

Die Verschiebung um eine feste Wellenlängendifferenz impliziert, dass je nach Energie des Photons ein sehr unterschiedlicher Teil seiner Energie auf das Elektron übertragen wird. Das Elektron (Masse $mc^2 = 511 \text{ keV}$) verlässt das Atom mit einer kinetischen Energie \mathcal{E}_{kin} , das gestreute Photon besitzt die Restenergie \mathcal{E}'_γ . Die Verteilung der Energie ist durch die Erhaltung von Energie und Impuls gegeben und damit abhängig vom Streuwinkel θ :

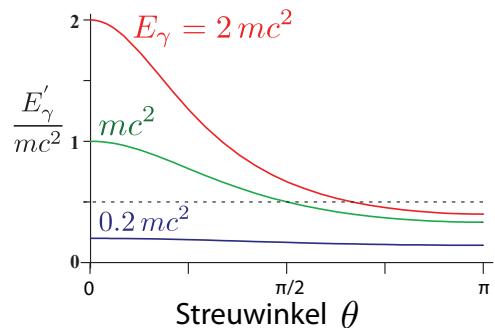


Abbildung 11.18: Restenergie des gestreuten Photons als Funktion des Streuwinkels, für unterschiedliche Energien des einfallenden Photons.

$$\mathcal{E}'_\gamma = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{1 + \frac{\mathcal{E}_\gamma}{mc^2}(1 - \cos \theta)}.$$

Wichtige Grenzfälle sind

- niedrige Photonenergie, $\mathcal{E}_\gamma \rightarrow 0$, d.h. Wellenlänge $\lambda \gg \lambda_C$:

$$\mathcal{E}'_\gamma \geq \mathcal{E}_\gamma \left(1 - \frac{2\mathcal{E}_\gamma}{mc^2}\right)$$

- hohe Photonenergie, $\mathcal{E}_\gamma \gg mc^2$:

$$\mathcal{E}'_{\gamma, \min} = \frac{mc^2}{2}.$$

Wir berechnen zur Illustration den maximalen Energieübertrag, d.h. $\theta = \pi$ (Rückwärtsstreuung). Hat das einfallende Photon eine Energie von $\mathcal{E}_\gamma = 1 \text{ keV}$, so ist $\frac{\mathcal{E}_\gamma}{mc^2} \approx 1/511 \approx 0,002$. Damit ist die Energie des gestreuten Photons $\mathcal{E}'_\gamma(\theta = \pi) = 996 \text{ eV}$, d.h. die Streuung ist beinahe elastisch, der Energieverlust beträgt nur 0,4%. Für Photonen mit einer Anfangsenergie von $\mathcal{E}_\gamma = 1 \text{ MeV}$ hingegen ist $\frac{\mathcal{E}_\gamma}{mc^2} \approx \frac{1000}{511} \approx 2$ die Energie des gestreuten Photons $\mathcal{E}'_\gamma(\theta = \pi) = 0.2 \text{ MeV}$, d.h. 80% seiner Energie werden auf das Elektron übertragen.

11.2.10 Verteilung der Energie

Die statistische Verteilung der Prozesse auf die verschiedenen Streuwinkel θ erhält man über den differentiellen Wirkungsquerschnitt nach Klein und Nishina (siehe Abb. 11.19).

Mit zunehmender Energie werden die einfallenden Photonen stärker in Vorwärtsrichtung gestreut (siehe Abb. 11.19 und 11.20) und verlieren somit nur einen geringen Teil ihrer Energie.

Abb. 11.21 zeigt, wie sich die Energie des einfallenden Photons auf das gestreute Photon und das Elektron aufteilt. Die obere Kurve stellt den gesamten Wirkungsquerschnitt dar, welcher ab etwa 100 keV abnimmt, die untere den Wirkungsquerschnitt für den Übertrag von Energie auf das gestreute Elektron. Dieser steigt zunächst an, erreicht bei der Ruhenmasse des Elektrons ein Maximum und nimmt dann wieder ab.

Abb. 11.21 zeigt, dass das Photon bei niedrigen Energien fast die gesamte Energie behält, dass es

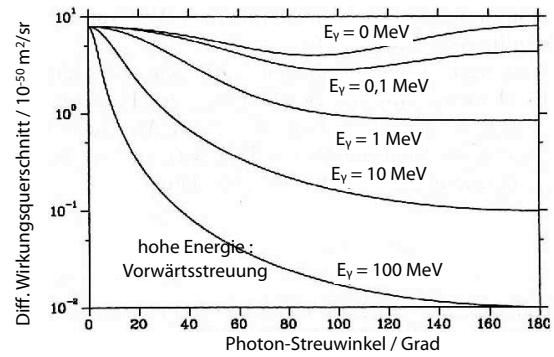


Abbildung 11.19: Differentieller Wirkungsquerschnitt für Compton Streuung als Funktion von Streuwinkel und Energie.

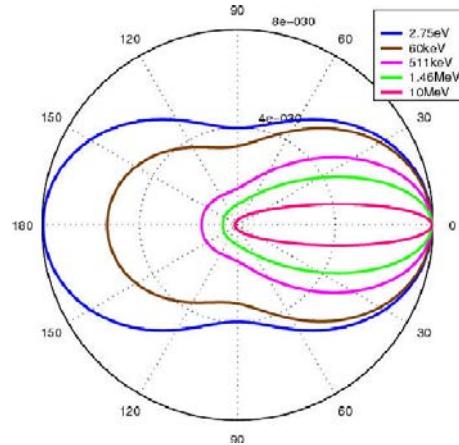


Abbildung 11.20: Richtungsverteilung der gestreuten Photonen.

also weitgehend elastisch gestreut wird. Mit zunehmender Photonenergie nimmt der Wirkungsquerschnitt ab, aber diejenigen Elektronen, die gestreut werden, besitzen eine Energie, welche fast der gesamten einfallenden Photonenergie entspricht. Wegen der geringen Reichweite des Elektrons im Gewebe bleibt die Energie lokal.

Abb. 11.22 zeigt Mittel- und Maximalwert der kinetischen Energie des Elektrons als Funktion der Energie des einfallenden Photons.

Der Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung ist proportional zur Elektronendichte und somit zur Kernladungszahl Z und indirekt proportional zur

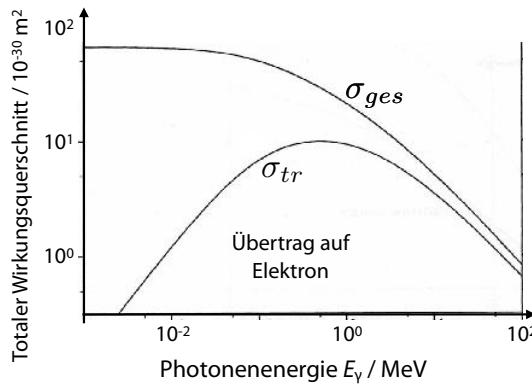


Abbildung 11.21: Gesamter Wirkungsquerschnitt σ_{ges} für die Compton-Streuung als Funktion der Energie des einfallenden Photons und Wirkungsquerschnitt σ_{tr} für die Übertragung der Energie auf ein Elektron.

Photonenenergie:

$$\sigma_C \propto \frac{Z}{\mathcal{E}_\gamma}.$$

11.2.11 Paarbildung

Durch die Wechselwirkung hochenergetischer Photonen (Schwellenenergie $E_\gamma \geq 2mc^2 = 1.022 \text{ MeV}$) mit dem starken elektromagnetischen Feld des Atomkerns kann sich das einfallende Photon spontan in ein **Elektron-Positron-Paar** verwandeln.

Im freien Raum ist die Paarbildung verboten, da es nicht möglich ist, gleichzeitig die Energie- und Impulserhaltung zu gewährleisten. Dies sieht man, wenn man das Quadrat des 4-Impulses von Photon und e^-e^+ -Paar vergleicht:

$$P^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_\gamma}{p_\gamma c} \right)^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-}{(p_+ + p_-)c} \right)^2.$$

Die linke Seite verschwindet, $\mathcal{E}_\gamma^2 - p_\gamma^2 c^2 = 0$ da bei Photonen $\mathcal{E} = pc$. Auf der rechten Seite

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-)^2 - (p_+ + p_-)^2 c^2 \\ &= (2mc^2)^2 - (2mv)^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

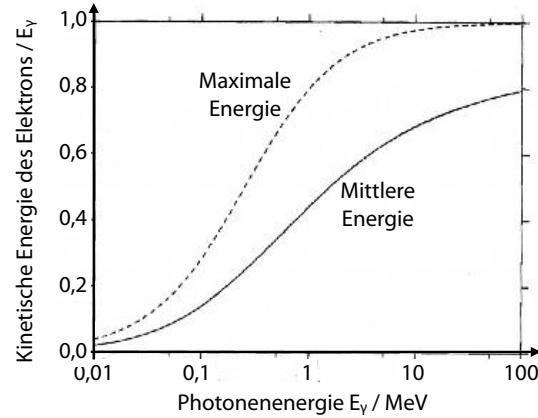


Abbildung 11.22: Kinetische Energie des Elektrons.

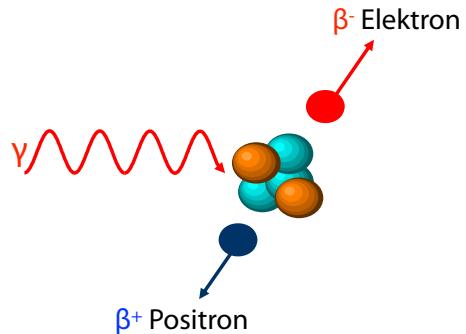


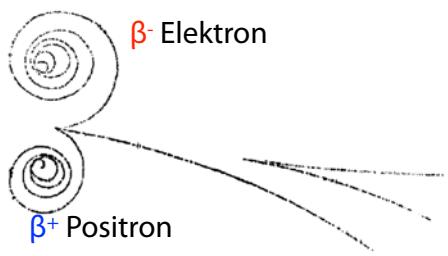
Abbildung 11.23: Paarbildung in der Nähe eines Kerns.

steht hingegen eine positive Zahl. Die Gleichung kann somit nicht befriedigt werden.

Steht jedoch ein Atomkern zur Verfügung, so kann dieser einen Teil des Impulses aufnehmen und damit den Prozess ermöglichen. Der Stoßquerschnitt ist deshalb proportional zum Quadrat der Kernladungszahl, $\sigma_{Paar} \propto Z^2$. Der Impulsübertrag nimmt mit wachsender Photonenergie ab.

Nach der Paarbildung kann sich das Positron frei bewegen (mittlere freie Weglänge einige Millimeter) und formt dann mit dem Elektron eines Atoms ein so genanntes **Positronium**. Das Positronium vernichtet sich anschließend und es werden zwei Photonen emittiert (**Vernichtungsstrahlung**).

Paarbildung spielt im Energiebereich der diagnostischen Röntgenstreuung nur eine geringe Rolle.



0.1 und 10 MeV dominiert der Compton-Effekt (Abbildung 11.25). Daraus resultiert auch eine relativ große Streustrahlung. Die Konsequenzen dieser Abhängigkeit für die Bildgebung mit Röntgenstrahlen werden im Kapitel 12 diskutiert.

Abbildung 11.24: Paarbildung in der Nebelkammer.

11.2.12 Gesamte Energieabhängigkeit

Betrachtet man die Kombination der verschiedenen Prozesse, so erhält man einen gesamten Schwächungskoeffizienten für ein bestimmtes Material. Da der Schwächungskoeffizient bei Röntgenstrahlen proportional zur Dichte des Materials ist, wird häufig der **Massenschwächungskoeffizient** μ/ρ betrachtet.

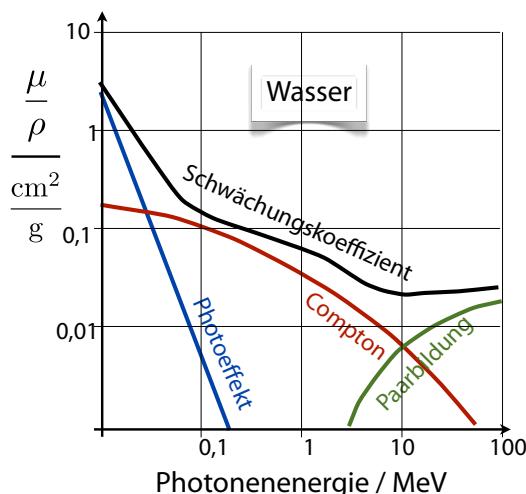


Abbildung 11.25: Beiträge zum Massenschwächungskoeffizienten von Wasser.

Welcher Prozess den dominanten Beitrag zum Schwächungskoeffizienten liefert, hängt von der Energie der Photonen und von der Art des Materials ab. Abb. zeigt die Energieabhängigkeit für Wasser. Bei Energien unter 0.1 MeV dominieren Photoeffekt und Compton-Effekt. Der Streuquerschnitt ist so hoch, dass die Energie bereits in den ersten Zentimetern des Gewebes deponiert wird. Zwischen