# 8. Übung zur Festkörperphysik WS 2016/17

**Ausgabe:** 09.12.2016
**Abgabe:** bis 16.12.2016 12:00 Uhr
**Briefkästen:** 247-249

Prof. Dr. D. Suter

---

## Aufgabe 1: Dispersionsrelation von Phononen — 3 Punkte

Aus der Berechnung der Dispersionsrelation einer linearen Kette mit im Abstand $\frac{a}{2}$ alternierenden Massen $M_1$ und $M_2$, die entlang der Kette schwingen ergeben sich zwei Lösungen

$$\omega_{\pm}^2 = f\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \pm f\left[\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^2 - \frac{4}{M_1 M_2}\sin^2\left(\frac{qa}{2}\right)\right]^{1/2} \tag{1}$$

mit der Federkonstanten $f$.

a) Skizzieren Sie den Verlauf des akustischen und optischen Zweigs in der 1. Brillouin-Zone für den Spezialfall $M_2 \gg M_1$. Nutzen Sie dazu die Näherung $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x$.

b) Es wird weiterhin von einem linearen Gitter aus zwei Atomsorten mit alternierenden Ladungen ausgegangen. Erstellen Sie hierzu eine weitere Skizze, in der Sie die Auslenkung der Atome bei transversal-optischen und transversal-akustischen Wellen darstellen. Erläutern Sie mit Hilfe der Skizze welche der beiden Moden an Licht koppeln kann.

c) Erläutern Sie die Begriffe Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer Welle. Berechnen Sie für den Fall $M_2 \gg M_1$ aus Aufgabenteil **(a)** für beide Zweige die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit im Zentrum der 1. Brillouin-Zone. Vereinfachen Sie die Dispersionsrelation des optischen Zweigs erneut mit Hilfe der Näherung aus Aufgabeteil (a).

## Aufgabe 2: Modell zur Berechnung der mittleren freien Weglänge — 4 Punkte

In dieser Aufgabe soll die mittlere freie Weglänge $l$ für ein einfaches Gas abgeschätzt werden. Hierzu werden die Gas-Atome als massive kugelförmige Teilchen betrachtet.

a) Schreiben Sie den geometrischen Wirkungsquerschnitt $\sigma$ für Stöße zwischen zwei verschiedenen Teilchen in Abhängigkeit ihrer Radien $R_1$ und $R_2$.

b) Leiten Sie dann einen Ausdruck für die Stoßwahrscheinlichkeit eines Teilchens auf der Strecke $\Delta x$ her. Es soll dabei angenommen werden, dass sich ein Teilchen mit Radius $R_1$ durch ein Gas aus ruhenden Teilchen mit Radius $R_2$ bewegt. Die Teilchendichte $n = N/V$ soll als klein angenommen werden, was bedeutet, dass der mittlere Abstand zwischen den Teilchen wesentlich größer als $R_2$ ist.

c) Im Weiteren sollen jetzt $N_0$ Teilchen mit Radius $R_1$ betrachtet werden. Geben Sie an, wie viele dieser Teilchen $dN$ pro Wegstrecke $dx$ mit einem weiteren Teilchen stoßen. Lösen Sie die so erhaltene Differentialgleichung um die Anzahl $N(x)$ der noch nicht in Stoßprozesse verwickelten Teilchen zu erhalten.

d) Nutzen Sie den in **(c)** erhaltenen Ausdruck für $\frac{dN(x)}{dx}$, um mit Hilfe einer geeigneten Integration über $x$ die mittlere freie Weglänge $l$ zu bestimmen.
Tipp: $\int_0^\infty x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$

## Aufgabe 3: Zustandsdichte im Quantentopf — 3 Punkte

In Halbleiter-Heterostrukturen sind zweidimensionale Quantentöpfe heutzutage problemlos realisierbar. Im folgenden soll die Zustandsdichte eines zweidimensionalen Elektronengases (2DEG), bei dem die Energiekomponente der z-Dimension diskretisiert ist, genauer untersucht werden. Hierzu soll die Dispersionsrelation für freie Elektronen

$$E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m^*} \tag{2}$$

in parabolischer Näherung vorausgesetzt werden wobei $q$ die Wellenzahl und $m^*$ die effektive Masse darstellt. Der zu untersuchende rechteckige Quantentopf soll die Ausmaße $L_\mathrm{x} = L_\mathrm{y} = L_0$ haben. Zunächst soll für den Energiebeitrag bezüglich der z-Achse nur der Grundzustand berücksichtigt werden.

a) Geben Sie das Gesamtvolumen aller Zustände in Abhängigkeit von $q$ und das Volumen eines einzelnen Zustandes an. Nutzen Sie diese um den Radius des Fermi-Kreises zu berechnen. Schreiben Sie ebenfalls explizit die Fermi-Energie $E_\mathrm{F}$ und die Fermi-Geschwindigkeit $v_\mathrm{F}$ auf.

b) Erläutern Sie den Begriff Fermi-Energie im Kontext der Fermi-Dirac-Statistik und einer entsprechenden Skizze.

c) Leiten Sie einen Ausdruck für die Zustandsdichte $D_2(E)$ in zwei Dimensionen her indem Sie auf Ihre Ergebnisse aus (a) zurückgreifen.

d) Vergleichen Sie die Zustandsdichte für zwei Dimensionen $D_2(E)$ mit den Zustandsdichten $D_\mathrm{n}(E)$ für freies Elektronengas in den Dimensionen $n = 0, 2, 3$. Recherchieren Sie hierzu die entsprechenden Zustandsdichten und skizzieren Sie alle vier Graphen. Berücksichtigen Sie hierbei ggf. auch die diskretisierten Energiebeiträge aus den beschränkten Raumrichtungen.