

8. Magnetismus

8.1 Diamagnetismus und Paramagnetismus

Bringt man Materie in ein Magnetfeld, so ändert dieses die Eigenschaften des Materials; es entsteht im Material ein makroskopisches magnetisches Moment, die sogenannte Magnetisierung, welche selbst ein Magnetfeld erzeugt.

Die phänomenologische Beschreibung dieser Eigenschaften benutzt die magnetische Suszeptibilität eines Mediums

Zeichnung: Magnetisierung

$$\chi = \mu_0 M / B ,$$

wobei M die makroskopische Magnetisierung beschreibt und B die magnetische Induktion. Umgekehrt ist die magnetische Induktion B gegeben als der Beitrag aus dem externen Feld H und der Magnetisierung M

$$B = \mu_0 H + M = \mu \mu_0 H = (1 + \chi_m) \mu_0 H ,$$

wobei die magnetische Suszeptibilität χ_m definiert ist als das Verhältnis der Magnetisierung zur magnetischen Induktion

$$\chi_m = M / \mu_0 H ,$$

Die Magnetisierung ändert im Magnetfeld die Energie des Systems; die potentielle Energie einer Magnetisierung ist

$$E_{\text{pot}} = - M \cdot B .$$

Deshalb wirkt auf magnetische Materialien in einem inhomogenen Magnetfeld eine Kraft

$$f = F/V = - 1/V \nabla E = M \nabla B$$

Die magnetischen Eigenschaften der Materie können in drei Arten unterteilt werden: Diamagnetismus, Paramagnetismus und Ferromagnetismus. In freien Atomen treten nur Diamagnetismus und Paramagnetismus auf. Sie beschreiben eine lineare Änderung des lokalen Magnetfeldes aufgrund eines verstärkenden Beitrages des Materials im Falle von Paramagnetismus, resp. einem entgegengesetzten Beitrag im Falle des Diamagnetismus. Jedes Material besitzt diamagnetische Eigenschaften, aber paramagnetische Beiträge sind, falls sie existieren, meistens wesentlich stärker als die diamagnetischen.

Diamagnetismus kann relativ leicht aufgrund des Larmor'schen Theorems erklärt werden. Es besagt, daß die Bewegung der Elektronen in einem Magnetfeld sich von ihrer Bewegung ohne Magnetfeld um eine zusätzliche Rotation mit der Kreisfrequenz

$$\omega = eB/2m$$

Zeichnung: Larmor-Kreisstrom

unterscheidet. Diese zusätzliche Bewegung erzeugt ein magnetisches Moment, welches dem äußeren Feld entgegenwirkt. Dieser Effekt entspricht genau der Lenz'schen Regel: Ein externes Feld erzeugt in einem Leiter einen Strom, welcher dem externen Feld entgegenwirkt. Diese Larmorpräzession entspricht einem Kreisstrom

$$\text{Ladung} \cdot \text{Frequenz} = -Ze eB/2m2\pi$$

Das zugehörige magnetische Moment μ beträgt

$$\mu = \pi\rho^2 I = -Z e^2 \langle\rho^2\rangle B/4m ,$$

wobei $\langle\rho^2\rangle$ das mittlere Abstandsquadrat des Elektrons vom Kern in der xy Ebene senkrecht zum Magnetfeld

Radien Kugel / Kreis

darstellt. Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung ist $\langle\rho^2\rangle = 2/3 \langle r^2 \rangle$.

Die Volumenssuszeptibilität wird damit

$$\chi = \mu_0 N \mu / B = -\mu_0 N Z e^2 \langle r^2 \rangle / 6m .$$

Diese Formel ist in recht guter Übereinstimmung mit den experimentell bei Edelgasen gefundenen Werten. Für die schwereren Edelgase nimmt die Suszeptibilität ungefähr mit der Kernladungszahl zu. Bei den isoelektronischen Atomen / Ionen nimmt sie mit der Kernladungszahl ab, da hierbei der Radius $\langle r^2 \rangle$ der Elektronenschale kleiner wird.

Folie AM 649

8.2 Paramagnetismus freier Atome

Magnetische Momente sind immer an einen Drehimpuls eines geladenen Teilchens gekoppelt. Prinzipiell existieren drei Beiträge: Der Elektronenspin S, der Bahndrehimpuls L der Elektronen, sowie der Kernspin I. Für den Paramagnetismus wesentlich sind lediglich der Bahn- und Spindrehimpuls der Elektronen.

Da Elektronenspins in vollständig gefüllten Schalen paarweise antiparallel angeordnet sind heben sich deren magnetische Momente gegenseitig auf. Das gleiche gilt für den Bahndrehimpuls von vollständig gefüllten Schalen.

Zeichnung: Spin-Orbitale

Lediglich bei Atomen mit nur teilweise gefüllten Schalen, sowie bei wenigen Molekülen bleibt ein nicht verschwindender Beitrag zum Paramagnetismus. Diese haben ein permanentes magnetisches Moment pro Atom von

Zeichnung H, NO

$$\mu = \gamma \hbar J = -g \mu_B J ,$$

wobei γ das gyromagnetische Verhältnis, also das Verhältnis zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls bezeichnet, J den gesamten Drehimpuls, $\mu_B = e\hbar/2m$ das Bohr'sche Magneton und g einen Proportionalitätsfaktor der vom System abhängt. Für den Spin eines freien Elektrons ist $g = 2.0023$, und für Atome und Moleküle hängt der Wert davon ab, wie die verschiedenen Drehimpuls-Quellen beitragen.

Grundsätzlich ist der Gesamtdrehimpuls J die **Zeichnung: Vektorsumme** Vektorsumme der Beiträge des Bahndrehimpulses L und des Spins S , und diese sind die Vektorsumme der Beiträge der einzelnen Elektronen.

Spin und Bahndrehimpuls für den Grundzustand freier Atome kann man häufig **Zeichnung: Elektronenorbitale** berechnen indem man die Hund'schen Regeln benutzt.

- Die erste Regel sagt, dass der Spin der Elektronen den höchsten möglichen Wert annimmt, der mit dem Pauli-Prinzip kompatibel ist.
- Die zweite Regel sagt, dass der Bahndrehimpuls den höchsten Wert annimmt, der mit dem Pauli-Prinzip und Regel 1 kompatibel ist.
- Die 3. Regel bestimmt welcher der möglichen Gesamtdrehimpulszustände die niedrigste Energie aufweist. Es gilt

$J = |L-S|$ für weniger als halb gefüllte Schalen und

$J = L+S$ für mehr als halb gefüllte Schalen.

Die entsprechenden Zustände werden durch Termsymbole wie **Folie AM 652** ${}^4F_{3/2}$ beschrieben bei denen der obere Index die Spin-Multiplizität $2S+1$ beschreibt, der Buchstabe den Bahndrehimpuls nach dem Schema S, P, D, F, G, H ... und der untere Index den Gesamtdrehimpuls J .

Für einen Spin $1/2$ **Zeichnung: Aufspaltung der Spinzustände** besitzen die beiden Zustände im Quantenzahl m_j im Magnetfeld eine Energie

$$U = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} = -m_j g \mu_B B .$$

Bei einer endlichen Temperatur T ist **Zeichnung: Besetzung der Zustände** für ein Ensemble von identischen Spins $1/2$ die Besetzungswahrscheinlichkeit

$$N_{\pm} = \exp(\pm \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T) / [\exp(+ \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T) + \exp(- \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T)] .$$

Bei hohen Temperaturen sind somit beide Zustände gleich stark besetzt und das gemittelte magnetische Moment verschwindet. Die Besetzungszahldifferenz und die Magnetisierung kann in diesem Bereich angenähert werden als

$$M = \mu(N_+ - N_-) \approx N \mu \mu_B / k_B T .$$

Man muß zu sehr tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern gehen, bis ein System vollständig polarisiert ist. Dieser Fall tritt ein wenn das Magnetfeld mehrere Tesla beträgt und die Temperatur wenige Kelvin.

Folie: Brillouin-Funktionen, Kittel p. 462

Für ein allgemeineres System mit Drehimpuls J wird im Hochtemperaturbereich

$$M/B = N p^2 \mu_B^2 / 3k_B T = C/T \quad \text{mit} \quad p = g (J(J+1))^{1/2} .$$

C wird als Curie-Konstante bezeichnet, während p die Stärke des magnetischen Momentes über eine effektive Zahl Bohr'scher Magnetonen charakterisiert.

Diese indirekte Proportionalität der magnetischen Suszeptibilität eines paramagnetischen Systems wird als Curie-Gesetz bezeichnet. Hier ist als Beispiel die Temperaturabhängigkeit des Kehrwerts der Suszeptibilität eines Gadoliniumsalzes als Funktion der Temperatur aufgetragen.

Folie: Curie-Gesetz, Kittel p. 463

Die größten Curie-Konstanten findet man allgemein in Übergangsmetallen und v.a. seltenen Erden, da deren teilweise gefüllte d-, resp. f-Schalen große Bahndrehimpulse ergeben. Dies gilt streng allerdings nur für freie Ionen, resp. Atome. Befinden sie sich in einem Kristallgitter, so besitzt der Hamiltonoperator nicht mehr die Symmetrie des freien Raums, sondern es treten zusätzliche Terme auf, welche die Wechselwirkung mit Nachbaratomen beschreiben, und deshalb eine niedrigere Symmetrie aufweisen. Diese Terme treten im Hamiltonoperator als Funktionen des Ortsoperators auf, welcher nicht mit dem Drehimpulsoperator vertauscht. Die Eigenzustände sind dann nicht mehr Eigenzustände des Drehimpulsoperators, d.h. der Erwartungswert des Drehimpulses für diese Zustände verschwindet. Man sagt der Drehimpuls sei gequencht.

Folie effektive p in selt. Erden, AM 657

In diesen Systemen scheint der Bahndrehimpuls unterdrückt zu sein und die magnetischen Eigenschaften werden nur noch durch den Spins bestimmt. Es gibt allerdings auch in diesen Systemen einen Paramagnetismus, der aber wesentlich schwächer ist als der oben diskutierte. Er beruht darauf, daß der Dreh-

Folie eff. p in Übergangsmetallen, AM 658

impulsoperator zwar keine Diagonalelemente besitzt, aber er kann Außerdiagonalelemente zwischen dem Grundzustand und niedrig liegenden angeregten Zuständen haben.

Dadurch wird die Zeemanwechselwirkung in der Eigenbasis des ungestörten Hamiltonoperators nicht-diagonal und die Eigenfunktionen des gestörten Hamiltonoperators enthalten wieder einen Drehimpuls. Die resultierende Suszeptibilität wird

Zeichnung: Hamiltonoperator

$$\chi = N |\langle s | \mu_z | 0 \rangle|^2 / \Delta U ,$$

wobei $|s\rangle$ einen angeregten Zustand darstellt, $|0\rangle$ den Grundzustand, μ_z die Komponente des magnetischen Dipolmomentes in Feldrichtung, und ΔU eine Energiedifferenz. Für den Fall hoher Temperatur, resp. niedriger Aufspaltungsenergie $\Delta \ll k_B T$ wird diese Energie zu $k_B T$, im umgekehrten Fall zur halben Aufspaltungsenergie $\Delta/2$.

8.3 Paramagnetismus des freien Elektronengases

In Metallen würde man aufgrund der großen Zahl von Elektronen zunächst einen starken Paramagnetismus erwarten. In Wirklichkeit findet man aber einen relativ geringen Effekt. Diese Diskrepanz hängt eng mit der Diskrepanz zusammen, die bei der spezifischen Wärme gefunden wurde: die meisten Elektronen können nicht in benachbarte Zustände wechseln, da die Zustände bis zur Fermienergie vollständig besetzt sind. Der Paramagnetismus von Metallen kann gut im Modell freier Elektronen diskutiert werden.

Man stellt die unterschiedlichen Spinzustände gerne als zwei Hälften eines Bandes dar. Durch die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten der Elektronen und dem äußeren Magnetfeld werden die beiden halben Bänder jeweils um eine Zeemanenergie verschoben. Die Fermienergie ist aber für beide Bandhälften gleich, so daß sich in der einen Bandhälfte mehr Elektronen befinden als in der anderen.

Zeichnung: Spin-Bänder, Kittel 477

Eine vollständige Rechnung, welche den Überschuß der einen Spinpolarisation über die andere in einem Magnetfeld bestimmt läuft völlig analog zur Berechnung der Wärmekapazität, wo wir gefunden hatten, daß ein Bruchteil T/T_F aller Elektronen des Bandes zur Wärmekapazität beiträgt. Man erhält bei der Integration über das Band einen zusätzlichen Faktor $3/2$. Man muß aber zusätzlich auch den diamagnetischen Beitrag der freien Elektronen berücksichtigen. Dieser beträgt gerade $-1/3$ des paramagnetischen Beitrages. Somit wird

$$\chi = 3/2 (1-1/3) T/T_F N \mu^2/k_B T = N \mu^2/k_B T_F ,$$

d.h. die Suszeptibilität wird temperaturunabhängig und ist gegenüber einem System unabhängiger Elektronen um den Faktor T/T_F reduziert. Dies gilt allerdings nur solange

die Temperatur klein ist gegenüber der Fermitemperatur. Dies ist aber für feste Metalle immer erfüllt.

Folie: Paramagnetische Suszeptibilität von Metallen; Kittel 479

Auch experimentell findet man für die meisten Metalle eine nur schwache Temperaturabhängigkeit. Dies entspricht auch der Erwartung aus dem qualitativen Bild: der Überschuß der einen Spinpolarisation ist direkt durch die Energie im Magnetfeld gegeben. Ein vollständig polarisiertes System hätte ein magnetisches Moment $N\mu$; aufgrund des Pauli-Prinzips ist aber die Überschuß-Polarisation gleich dem Verhältnis von magnetischer zu kinetischer Energie, $\mu B/k_B T_F$.

Folie / Zeichnung: Temperaturabhängigkeit von Para- / Diamagnetismus, Kittel 456

Damit können wir die wichtigsten Formen des Dia- und Paramagnetismus zusammenfassen. In Metallen und seltenen Erden mit gequenchtem Bahndrehimpuls ist der Paramagnetismus schwach und relativ wenig temperaturabhängig. In freien Atomen mit ungepaarten Elektronen oder einem nichtverschwindenden Bahndrehimpuls ist er sehr viel größer und stark temperaturabhängig. Der Diamagnetismus, der in allen Elementen auftritt, hat ein negatives Vorzeichen, ist schwach und weitgehend unabhängig von der Temperatur.

8.4 Bahn-Quantisierung in einem Magnetfeld

Wie bereits bei der Diskussion von Bandstrukturen erwähnt bewegen sich Elektronen in einem Magnetfeld auf Kreisbahnen. Dies folgt direkt aus der Bewegungsgleichung

$$\hbar \, d\mathbf{k}/dt = q \, d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{B} \, ,$$

d.h. die Lorentz-Kraft steht immer senkrecht auf dem Magnetfeld und der Bewegungsrichtung. Integriert ergibt dies

$$\hbar \, \dot{\mathbf{k}} = \hbar \, \dot{\mathbf{k}}_0 + q \, \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \, ,$$

Zeichnung Kreisbahn

wobei $\dot{\mathbf{k}}_0$ eine Konstante darstellt, die für die folgende Rechnung nicht berücksichtigt wird und auf das Endresultat keinen Einfluß hat. Der zweite Term ist überall senkrecht zum Magnetfeld und zur Position.

Diese Rechnung ist noch halbklassisch. Den Übergang zur Quantenmechanik findet man über die Bohr-Sommerfeld Quantisierung

$$\oint \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{r} = (n+\gamma) h ,$$

Zeichnung: positive Interferenz im Kreis

wobei n eine ganze Zahl ist und γ eine Konstante, die vom Teilchen abhängt und für Elektronen $= 1/2$ ist. Der Impuls eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld ist

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_{\text{kin}} + \dot{\mathbf{p}}_{\text{Feld}} = \hbar \dot{\mathbf{k}} + q \dot{\mathbf{A}} .$$

Damit wird das Schleifenintegral

$$\hbar \oint \dot{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{r} + q \oint \dot{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{r} = (n+\gamma) h$$

und mit Hilfe des klassischen Resultats

$$\hbar \oint \dot{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{r} = q \oint (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{B}}) \cdot d\mathbf{r} = -q \dot{\mathbf{B}} \cdot \oint \dot{\mathbf{r}} \times d\mathbf{r} = -2q\Phi .$$

Für die Durchführung des Integral berücksichtigt man, daß

$$\oint \dot{\mathbf{r}} \times d\mathbf{r} = 2 \pi \dot{\mathbf{n}} r^2 ,$$

wobei $\dot{\mathbf{n}}$ der Normalenvektor auf der Fläche ist. Das Integral entspricht also gerade $2x$ der Fläche der eingeschlossenen Kurve.

Das zweite Integral ergibt mit Hilfe des Stokes'schen Satzes

$$q \oint \dot{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{r} = q \int \text{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot d\dot{\boldsymbol{\sigma}} = q \int \dot{\mathbf{B}} \cdot d\dot{\boldsymbol{\sigma}} = q \Phi ,$$

wobei $d\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ein Flächenelement, multipliziert mit dem Normalenvektor darstellt. Damit wird das gesamte Schleifenintegral

$$\oint \dot{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{r} = -q \Phi = (n+\gamma) h ,$$

d.h. die Bahn des Elektrons ist so quantisiert daß der Fluß durch die Bahn

$$\Phi_n = (n+\gamma) h/e$$

beträgt. Das Flußquant ist somit

$$\Phi = h/e = 4.14 \cdot 10^{-7} \text{ Tm}^2 .$$

Solche Flußquanten sind bekannt bei Supraleitern vom Typ II, wo sie auch direkt beobachtet werden können. Der einzige Unterschied zwischen diesem Fall und dem Fall der Supraleiter ist ein Faktor 2, welcher im nächsten Kapitel diskutiert wird.

Folie: Flußquanten

8.5 Landau-Niveaus

Im folgenden interessiert uns nicht nur die Bahn im Ortsraum, sondern auch im reziproken (d.h. k-) Raum. Aus der Bewegungsgleichung

$$\hbar d\mathbf{k}/dt = q d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{B}$$

wissen wir, daß der k-Vektor jeweils senkrecht auf dem Ortsvektor steht und daß die Länge eines Wegelementes Δr zur Länge eines Wellenvektorelementes proportional ist:

$$\Delta r = (\hbar/eB) \Delta k$$

Damit ist die Fläche S_n der Bahn im k-Raum proportional zur Fläche A_n der Bahn im direkten Raum:

$$A_n = (\hbar/eB)^2 S_n$$

Wir vergleichen jetzt den magnetischen Fluß durch die Bahn im direkten und im k-Raum. In einem homogenen Magnetfeld gilt für die Bahnen

$$\Phi_n = (n+\gamma) h/e = B A_n = (\hbar^2/e^2 B) S_n .$$

Für die Fläche der Bahn im k-Raum gilt damit

$$S_n = (n+\gamma) e B 2\pi/\hbar ,$$

d.h. die von der Bahn eingeschlossene Fläche ist proportional zur Magnetfeldstärke.

Die Energie des Zustandes ist

$$E_n = \hbar^2 k^2 / 2m^* = \hbar^2 S_n / 2\pi m^* = (n+1/2) \hbar \omega_c \quad \text{mit } \omega_c = eB/m^* .$$

Der niedrigste Zustand hat hier den Index 0, was die Anzahl Flußquanten bezeichnet, die durch diese Bahn laufen. Allerdings hat dieser Zustand keine praktische Bedeutung, da der Umfang der entsprechenden Bahn grösser ist als die freie Weglänge der Elektronen und die Quantisierungsbedingung deshalb entfällt.

Wie bei einem harmonischen Oszillator finden wir eine unendliche Folge von äquidistanten Energieniveaus. Da wir für die Herleitung nur zwei Dimensionen berücksichtigt haben gilt dies allerdings nur in einem zweidimensionalen System. **Zeichnung: Energie-Leiter**

In drei Dimensionen kommt dazu ein Beitrag der kinetischen Energie entlang dem Magnetfeld. Elektronen in einem Magnetfeld werden deshalb durch zwei Quantenzahlen charakterisiert: den **Folie: Energien in 3D**

Impuls parallel zur Feldrichtung und den Drehimpuls in der gleichen Richtung. Man kann heute aber sehr dünne Filme herstellen, in denen sich die Elektronen und Löcher wie in einem zweidimensionalen System verhalten. Auch in solchen 2D Systemen haben die Niveaus aber eine endliche Linienbreite, welche durch die Zahl der Streuprozesse gegeben ist. Experimente, bei denen man die Effekte der Quantisierung untersucht finden deshalb immer an sehr reinen Materialien bei tiefer Temperatur statt, wo die Streuprozesse minimiert werden.

Natürlich sind diese Bahnen stark

Zeichnung: Benachbarte Bahnen im Magnetfeld

entartet. Die Entartung erhalten wir am besten über die Größe der Bahn. Im direkten Raum wird die Bahn umso kleiner je stärker das Magnetfeld ist, so daß eine größere Zahl von Bahnen in der gleichen Fläche Platz findet und die Entartung zunehmen sollte. Dies findet man auch bei einer Betrachtung im k-Raum: Hier ist die Größe der Bahn proportional zur Stärke des Magnetfeldes. Damit muß die Anzahl entarteter Zustände ebenfalls proportional zur Magnetfeldstärke sein. Der Flächenunterschied zwischen zwei Bahnen n und $n+1$ ist

$$\Delta S = 2\pi e B/\hbar .$$

In dieser Fläche befinden sich

$$D = \Delta S/\delta S = (2\pi e B/\hbar) / (2\pi/L)^2 = e B L^2/h$$

Zustände. δS bezeichnet hier die Fläche pro Zustand.

Ein solcher entarteter Zustand wird als Landau-Niveau bezeichnet; jedes Landau-Niveau ist D -fach entartet.

Die Energie der Zustände ist im Magnetfeld somit nicht mehr

Zeichnung: Energie im Magnetfeld

kontinuierlich, sondern spaltet auf in eine Reihe von diskreten Niveaus. Damit variiert unter anderem auch das Fermi-Niveau mit der Stärke des Magnetfeldes. Da die Entartung eines Landau-Niveaus proportional zur Stärke des Magnetfeldes ist können mit zunehmender Magnetfeldstärke mehr Elektronen in diesem Niveau untergebracht werden. Diese Diskretisierung der Energie ist eine direkte Konsequenz der effektiven Verkleinerung des Volumens, in dem sich die Elektronen aufhalten können. Umgekehrt steigt natürlich die Energie des Zustandes mit der Feldstärke. Die Energie des Gesamtsystems variiert deshalb mit der Magnetfeldstärke auf eine nicht-monotone Weise.

Betrachten wir zunächst die Situation in einem sehr starken Magnetfeld, so daß sämtliche Elektronen im niedrigsten Landau-Niveau Platz finden. Das ist möglich wenn das Magnetfeld größer wird als

Folie: Gesamtenergie; Kittel 289

$$B > h/e N/L^2 .$$

Der zweite Term stellt eine zweidimensionale Elektronendichte dar. Dazu sind Felder von einigen T nötig, wenn man einen Halbleiter mit relativ niedriger Ladungsträgerdichte benutzt. Bei niedrigeren Magnetfeldstärken springt das Fermi-niveau schlagartig zum zweiten, dritten etc. Landau-niveau. Die Gesamtenergie der Elektronen wird dann

$$\sum_n D \hbar \omega_c (n+1/2) = 1/2 D \hbar \omega_c s^2 = 1/2 D \hbar \omega_c s (s-1) ,$$

wobei s die Zahl der vollständig besetzten Landau-Niveaus bezeichnet und D die Anzahl Elektronen pro Niveau, d.h. seine Entartung. Bei nur teilweise gefüllten Niveaus kommt ein zusätzlicher Beitrag dazu von

$$\hbar \omega_c (s+1/2)(N - s D)$$

Diese Quantisierung der Energieniveaus in einem Magnetfeld hat mehrere direkt beobachtbare Konsequenzen. Eine davon ist der De Haas-van Alphen Effekt:

bringt man ein Metall in ein starkes Magnetfeld, so ist das magnetische

Folie: De Haas-van Alphen in Gold

Moment nicht eine monotone Funktion des äußeren Magnetfeldes, sondern es enthält eine oszillierende Komponente. Dies ist darauf zurückzuführen, daß das magnetische Moment die Ableitung der freien Energie nach dem Magnetfeld darstellt

$$M = -dU/dB$$

und deshalb aufgrund der Landau-Quantisierung nicht monoton vom Feld abhängt.

Ein weiteres Resultat ist die nicht-monotone Veränderung des Hall-Widerstandes und des elektrischen Widerstandes in Halbleiter-Kanälen.

Beide zeigen, wie hier gezeigt als Funktion eines äußeren Potentials, aber auch als Funktion

Folie: Quanten-Hall Effekt

des Magnetfeldes, ein deutlich nicht-monotones Verhalten. Dies ist wiederum auf die diskontinuierliche Änderung der Fermi-Fläche beim Füllen eines Landau-Niveaus zurückzuführen: wie bereits mehrfach diskutiert sind die Elektronen an der Fermi-Fläche für die meisten Eigenschaften eines Materials verantwortlich, da die tiefer liegenden nicht auf äußere Störungen reagieren können. Wenn das System effektiv quantisiert ist und die Landau-Niveaus vollständig gefüllt sind, so können kleine Stöße keine Elektronen streuen.

8.6 Ferromagnetismus

Im Falle des Diamagnetismus und des Paramagnetismus hatten wir eine lineare Beziehung zwischen äußerem Magnetfeld und der Magnetisierung der Probe angenom-

men. Ferromagnetische und verwandte Materialien hingegen besitzen auch in Abwesenheit eines äußeren Feldes eine nichtverschwindende Magnetisierung; würde man ein solches Material als Paramagnet beschreiben, so müßte man die Suszeptibilität als unendlich beschreiben.

$$\chi = M / B = M / 0 = \infty .$$

Ferromagnetismus bedeutet, daß die atomaren magnetischen Momente im Festkörper parallel ausgerichtet sind.

Folie Kittel p. 485

Daneben gibt es andere Arten von spontaner Ordnung, z.B. der Antiferromagnetismus, bei dem die Momente entgegengesetzt ausgerichtet sind. In diesem Fall verschwindet die makroskopische Magnetisierung. Beim Ferrimagneten sind identische magnetische Momente parallel ausgerichtet, aber jeweils antiparallel zu einem anderen Typ magnetischer Momente. Die beiden Arten kompensieren sich nicht vollständig, so daß diese Art von Materialien ebenfalls eine endliche Magnetisierung ergibt.

Das Auftreten einer Spontanmagnetisierung kann man verstehen wenn man die Kopplung der Spins untereinander berücksichtigt. Auf eine vereinfachte Weise kann dies auch in einem klassischen Modell geschehen: Eine vorhandene Magnetisierung M erzeugt auf seine Nachbarn ein Magnetfeld

$$B_E = \lambda M ,$$

Zeichnung: Dipolfeld

wobei B_E als Austausch-Magnetfeld bezeichnet wird und

λ eine Kopplungskonstante darstellt. Umgekehrt ist die Magnetisierung durch die paramagnetische Suszeptibilität χ_p und das lokale Magnetfeld $B_a + B_E$ gegeben

$$\mu_0 M = \chi_p (B_a + B_E) .$$

Setzen wir den Ausdruck für das Austauschfeld ein, so wird daraus

$$\mu_0 M = \chi_p B_a + \chi_p \lambda M \quad \text{oder} \quad M = B_a \chi_p / (\mu_0 - \chi_p \lambda) .$$

Mit der paramagnetischen Suszeptibilität $\chi_p = C/T$ wird daraus

$$M = B_a C / (T \mu_0 - C \lambda) .$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die lineare Beziehung zwischen äußerem Magnetfeld und Magnetisierung nur für kleine Magnetisierungen gilt, d.h. solange $T \mu_0 \gg C \lambda$. Außerhalb dieses Bereiches erhalten wir eine modifizierte Suszeptibilität

$$\chi = M/B_a = C / (T \mu_0 - C \lambda) .$$

Die Suszeptibilität hat demnach eine Singularität bei $T = T_C = C \lambda / \mu_0$. Diese Temperatur wird als Curie-Temperatur bezeichnet und markiert das spontane Auftreten einer Magnetisierung. Im Bereich oberhalb der Curie-Temperatur kann die Suszeptibilität geschrieben werden als

$$\chi = C / [\mu_0 (T - T_C)] .$$

Dies wird als Curie-Weiß Gesetz bezeichnet. Es gilt relativ gut für Temperaturen weit oberhalb der Curie-Temperatur. In der Nähe der Curie Temperatur erhält man mit genaueren Rechnungen

$$\chi \propto (T - T_C)^{-1.33} ,$$

d.h. der kritische Exponent sollte gleich 1.33 sein.

Experimentelle Daten sind in dieser Größenordnung.

Folie Kittel p. 487

Wir können den Ausdruck für die kritische Temperatur nach der Kopplungskonstante λ auflösen

$$\lambda = T_C \mu_0 / C = 3k_B T_C \mu_0 / (N g^2 (J(J+1)) \mu_B^2) .$$

Für Eisen ($T_C = 1000$ K, $g=2$, $J=1$) ergibt diese Formel $\lambda \sim 5000$, was einem Austauschfeld von ca. 1000 T entspricht. Dies ist wesentlich mehr, als was die Dipolwechselwirkung ergeben würde. Diese Austauschwechselwirkung ist offenbar wesentlich stärker als eine direkte magnetische, die bei Eisen ca. 0.1 T entspricht. Die Austauschwechselwirkung kann als eine Folge des Pauli-Prinzips betrachtet werden: Dieses verlangt, daß die Wellenfunktion zweier identischer Teilchen antisymmetrisch sein muß. Für zwei Elektronen mit parallelem Spin muß die Zweiteilchen-Wellenfunktion deshalb anti-symmetrisiert werden:

$$\Psi_2(r_1, r_2) = u(r_1) v(r_2) - u(r_2) v(r_1) ,$$

wobei u, v Einelektronenfunktionen darstellen und r_1, r_2 die Koordinaten der Elektronen. Für identische Positionen verschwindet offenbar die Wellenfunktion,

$$\Psi_2(r_1, r_1) = u(r_1) v(r_1) - u(r_1) v(r_1) = 0 ,$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, zwei Elektronen am gleichen Ort zu finden ist Null, was einer starken Abstoßung entspricht.

Diesen Effekt hatten wir bei der Diskussion der Gitterenergie bereits angetroffen und aus der Diskussion des Wasserstoffatoms, resp. Moleküls gesehen, daß er einer

Zeichnung: effektives Potential

effektiven Kopplung von mehreren eV entspricht. Diese Energie ist aber nur dann vorhanden wenn die Spins der beiden Teilchen im gleichen Zustand sind. Die Wechselwirkung ist deshalb spin-abhängig, so daß eine effektive Kopplung entsteht - die Austauschwechselwirkung.

Wenn wir anstelle der Curie-Näherung für hohe Temperaturen den vollständigen Ausdruck

$$M = N \mu [\exp(+\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T) - \exp(-\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T)] / [\exp(+\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T) + \exp(-\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu} / k_B T)] .$$

benutzen und berücksichtigen daß ohne äußeres Magnetfeld $B = B_a + B_E = \lambda M$, erhalten wir einen Ausdruck für die spontane Magnetisierung als Funktion der Temperatur:

$$M = N \mu \tanh(\mu \lambda M / k_B T) .$$

Dieser Ausdruck kann nicht analytisch nach der Magnetisierung aufgelöst werden. Wir können jedoch einen Überblick über die selbstkonsistenten Lösungen erhalten wenn wir die folgenden reduzierten Variablen einführen:

$$m = M / N \mu \quad \text{und} \quad t = k_B T / N \mu^2 \lambda .$$

Damit wird

$$m = \tanh(m/t) .$$

Offensichtlich ist $m = 0$ immer eine Lösung.

Für $t > 1$ ist dies die einzige Lösung. Für $t < 1$ hingegen erhält man zusätzliche Lösungen $0 < m < 1$, wobei m rasch gegen 1 ansteigt. Offenbar ist $t=1$ die kritische Temperatur, d.h. $T_c = N \mu^2 \lambda / k_B$. Die zweite, nichttriviale Lösung entspricht der Sättigungsmagnetisierung des Systems, also derjenigen Magnetisierung, die erreicht wird, wenn alle magnetischen Momente parallel ausgerichtet sind.

Die Größe der Sättigungsmagnetisierung kann über eine effektive Magnetonenzahl **Folie: Kittel p. 490**

$$n_B = M_s(T=0) / N \mu_B$$

parametrisiert werden. $M_s(T=0)$ stellt hier die Sättigungsmagnetisierung am absoluten Nullpunkt dar, N die Teilchendichte und μ_B das Bohr'sche Magneton. Die experimentell gefundene Zahl ist meistens nicht eine ganze Zahl.

Daß diese Zahlen gebrochen sind ist z.T. darauf zurückzuführen, daß es sich nicht um reine Ferromagneten handelt, sondern um Ferrimagneten oder andere Kopplungsmechanismen. Auch bei rein ferromagnetischer Kopplung können aber gebrochene Magnetonenzahlen auftreten.

Folie: Kittel p. 492

Dies kann u.a. eine Folge der Bandstruktur sein, wenn die Fermikante mehrere Bänder schneidet. Im Fall von Nickel ist das 3d Band zu rund 95% gefüllt. Am absoluten Nullpunkt hebt die Austauschwechselwirkung die Entartung der Spinzustände auf, so daß das eine Subband vollständig gefüllt ist. Der Magnetismus kommt durch die Besetzungszahldifferenz zustande, also z.B. durch die 0.54 Löcher pro Atom im 3d↓ Subband.

Folie: Kittel p. 493

8.7 Magnonen

Im Grundzustand eines unendlichen ferromagnetischen Kristalls sind somit sämtliche Spins parallel angeordnet. Angeregte Zustände entsprechen Beimischungen von Spins mit entgegengesetzter Orientierung.

Diese braucht aber nicht auf einen einzelnen Spin lokalisiert zu sein, sondern sie kann über den ganzen Kristall delokalisiert sein. Ausgangspunkt für die Beschreibung dieser Anregungen ist die quantenmechanische Form der Austausch-Wechselwirkung

Zeichnung: angeregte Spinzustände

$$U_{ij} = - J \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j ,$$

Zeichnung: Lineare Kette

wobei J die Kopplungskonstante bezeichnet und $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$ die Drehimpulsoperatoren der gekoppelten Spins. Offenbar ist die Energie eines Spins abhängig von seiner Orientierung gegenüber dem benachbarten Spin - völlig analog zur Orientierung in einem externen Magnetfeld.

Wir betrachten eine lineare Kette von Spins, die nur durch

Zeichnung: Energie im „Austauschfeld“

Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn gekoppelt sind. Für den Spin p erhält man damit die Bewegungsgleichung

$$d \mathbf{S}_p / dt = 2 J / \hbar (\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{p+1} + \mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{p-1}) ,$$

d.h. der Spin führt eine Art Larmorpräzession im Feld seiner Nachbarn durch.

Zeichnung: Präzession im „Austauschfeld“

Diese Bewegungsgleichung ist nichtlinear und hat deshalb keine geschlossene Lösung. Man erhält aber Näherungslösungen wenn man postuliert, daß die Auslenkung

aus der Gleichgewichtslage (d.h. von der z-Achse) klein sei. In diesem Grenzfall erhält man eine vereinfachte Bewegungsgleichung

$$d S_p^x/dt = 2 J S/\hbar (2 S_p^y - S_{p-1}^y - S_{p+1}^y)$$

$$d S_p^y/dt = - 2 J S/\hbar (2 S_p^x - S_{p-1}^x - S_{p+1}^x)$$

$$d S_p^z/dt = 0$$

Offenbar ist also die zeitliche Ableitung der x-Komponente

Zeichnung: diskrete zweite Ableitung

proportional zur zweiten Ableitung der y-Komponente und umgekehrt. Wir erhalten also eine Wellengleichung; allerdings ist hier die zweite räumliche Ableitung proportional zur ersten zeitlichen Ableitung, im Gegensatz zur üblichen Wellengleichung, wo auf der linken Seite die zweite zeitliche Ableitung steht.

Wir setzen deshalb die Lösung als eine ebene Welle an

Folie: Spinwellen AM 706

$$S_p^x = u \exp[i(pka - \omega t)] \quad S_p^y = -i S_p^x ,$$

wobei p den Index des Spins darstellt, a die Gitterkonstante, und k, resp. ω den Wellenvektor und die Frequenz. Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$\hbar \omega = 4JS (1 - \cos ka) .$$

Zeichnung, Dispersionsrelation

Für große Wellenlängen, d.h. $ka \ll 1$ kann

$\cos ka$ angenähert werden durch $1 - k^2 a^2/2$, so daß die Dispersionsrelation sich vereinfacht zu

$$\hbar \omega = 2 J S k^2 a^2 .$$

Die Frequenz ist somit proportional zum Quadrat des Wellenvektors, im Gegensatz zur Situation der

Folie: Dispersionsrelation

Phononen, wo die Frequenz linear mit dem Wellenvektor wächst. Dieses Verhalten kann man mit magnetischer Neutronenstreuung messen. Die Proportionalitätskonstante $2 J S a^2$ beträgt für Fe, Co, Ni 0.28, 0.5, und 0.36 eV \AA^2 . Die Energie von Magnonen mit kurzen Wellenlängen kann also recht erheblich sein, was eine direkte Folge der enormen Austauschenergie ist.

Wie bei den Phononen sind diese Anregungen im Fall der Spin-Wellen quantisiert, wobei die Energie der Zustände

$$\mathcal{E}_n = (n+1/2) \hbar \omega_k$$

Zeichnung: Stufenleiter

ist. Wie bei den Phononen ist die mittlere thermische Anregung gegeben durch

$$\langle n_k \rangle = 1/(\exp(\hbar\omega_k/k_B T)-1) .$$

Zeichnung: thermische Besetzungen

Da pro Wellenvektor nur ein Polarisationszustand existiert ist die Anzahl Zustände in einer Kugel mit Radius k

$$N(k) = (1/2\pi)^3 4\pi/3 k^3 .$$

Wir lösen die Dispersionsrelation für große Wellenlängen auf nach dem Wellenvektor

$$k^2 = \hbar \omega / 2 J S a^2$$

und schreiben damit die Anzahl Zustände im Frequenzraum

$$N(\omega) = (1/2\pi)^2 2/3 (\hbar \omega / 2 J S a^2)^{3/2} .$$

Die Zustandsdichte $D(\omega)$ der Magnonen wird damit

$$D(\omega) = (1/4\pi^2) (\hbar/2JSa^2)^{3/2} \omega^{1/2} .$$

Daraus erhält man die mittlere thermische Reduktion der Magnetisierung

$$\Delta M/M(0) = \sum_k \langle n_k \rangle / NS = 0.0587/SQ (k_B T/2JS)^{3/2} ,$$

wobei die Konstante Q vom Gitter abhängt. sie beträgt $Q = 1, 2, 4$ für ein sc, bcc, fcc Gitter.

Dieses Resultat ist als Bloch'sches $T^{3/2}$ Gesetz bekannt.

Folie: $T^{3/2}$ Gesetz

Die Beschreibung der Spinwellen als Magnonen kann am direktesten über magnetische Neutronenbeugung überprüft werden. Neutronen haben vergleichbar starke Wechselwirkungen mit Elektronen wie mit Kernen. Die Wechselwirkung ist spin-abhängig und kann deshalb, bei inelastischer Streuung Magnonen erzeugen oder vernichten. Durch gleichzeitige Messung der Energie- und Impulsänderung der gestreuten Neutronen findet man die Dispersionsrelation.

8.8 Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus

Das Austauschintegral J , welches die Kopplung zwischen den Spins bestimmt, kann positives oder negatives Vorzeichen haben. Bei negativem Vorzeichen ist eine antiparallele Orientierung der Spins energetisch bevorzugt.

Im Rahmen der oben gezeigten klassischen **Zeichnung: lineare Kette** Behandlung einer linearen Kette, die aus Spins ABABA besteht müßte das Austauschfeld, wenn man nur Kopplungen zwischen nächsten Nachbarn berücksichtigt,

$$B_A = -\lambda M_B \quad B_B = -\lambda M_A$$

betragen, wobei λ positiv wäre. Die Energie des Systems ist dann

$$U = -1/2 (B_A M_A + B_B M_B) = \lambda M_B M_A$$

und wird damit minimal wenn die beiden Spins unterschiedlich polarisiert sind, $M_B = -M_A$.

Während ferromagnetische Kopplungen auch in dreidimensionalen Gittern immer eine eindeutige Ordnung ergeben (d.h. parallele Orientierung der Spins) ist dies bei antiferromagnetischer Kopplung nicht der Fall. Dies sieht man am einfachsten schon bei einer zweidimensionalen Anordnung. Wir wählen ein hexagonales Gitter und nehmen an, daß nächste Nachbarn antiferromagnetisch gekoppelt sind, während alle übrigen Wechselwirkungen verschwinden.

In diesem Fall ist es nicht **Zeichnung: Hexagonale Anordnung in 2D** möglich, sämtliche Spins paarweise antiparallel anzuordnen. Diese Situation wird als Frustration bezeichnet. Die resultierende Magnetisierung hängt deshalb von sämtlichen auftretenden Wechselwirkungen ab. Antiferromagnetische Ordnung kann z.B. auftreten wenn Spins in einer Netzebene parallel orientiert sind, während aufeinanderfolgende Netzebenen antiparallel orientiert sind.

Dies ist z.B. der Fall in MnO. Hier sind die Spins innerhalb **Folie Kittel p. 508** jeder 111-Ebene parallel, aber aufeinanderfolgende Ebenen zeigen antiparallele Orientierung. Dies führt zu einer Verdoppelung der Größe der Einheitszelle: Da Spins an aufeinanderfolgenden Ecken der Einheitszelle entgegengesetzt orientiert sind wiederholt sich das Gitter inkl. Spin erst nach der doppelten Distanz. Neutronenbeugung, die auf den Spin empfindlich ist, findet deshalb in diesem Material eine doppelt so große Einheitszelle wie die Röntgenbeugung, welche die 'chemische' Einheitszelle sieht.

Da antiferromagnetische Ordnung ähnlich wie ferromagnetische Ordnung erst unterhalb einer bestimmten Temperatur **Folie Kittel p. 507** auftritt, kann man diesen Unterschied auch mit Neutronenbeugung allein, bei unterschiedlichen Temperaturen beobachten.

Antiferromagnetische Wechselwirkungen müssen aber nicht immer zu einem Verschwinden der Magnetisierung führen. Das wichtigste Beispiel ist Magnetit, mit der

Formel $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$: Die dreiwertigen Eisenionen (Ferriionen) haben Spin $5/2$ und sollten damit $2 \times 5 = 10$ Bohr'sche Magnetonen zur gesamten Magnetisierung beitragen; das Ferroion (Fe^{2+}) mit Spin 2 sollte 4 Magnetonen beitragen.

Der Spin der dreiwertigen Eisenatome ist aber antiparallel orientiert, so daß effektiv nur das

Zeichnung: Orientierung der Momente

zweiwertige Eisen zur Magnetisierung beiträgt; der experimentelle Wert für die Magnetisierung entspricht 4.1 Bohr'schen Magnetonen. In diesem Material existieren also sowohl ferromagnetische wie antiferromagnetische Kopplungen, was insgesamt zu einem ferromagnetischen Verhalten führt.

Ausgehend von den obigen Ausdrücken für die Austauschfelder erhalten wir die Gleichungen für die Magnetisierungen

$$\mu_0 M_A = \chi_p (B_a - \lambda M_B) .$$

$$\mu_0 M_B = \chi_p (B_a - \lambda M_A) .$$

Wir eliminieren M_B und erhalten

$$\mu_0 M_A = \chi_p B_a - \lambda \chi_p^2 / \mu_0 B_a + \lambda^2 \chi_p^2 / \mu_0 M_A .$$

$$M_A = \chi_p B_a (1 - \lambda \chi_p / \mu_0) / (\mu_0 - \lambda^2 \chi_p^2 / \mu_0) .$$

Mit dem Ausdruck $\chi_p = C/T$ für die paramagnetische Suszeptibilität erhalten wir

$$M_A = C/T B_a (1 - \lambda C/T / \mu_0) / (\mu_0 - \lambda^2 (C/T)^2 / \mu_0) .$$

Wie beim Ferromagneten kommt es auch hier zu einer Singularität, d.h. zu einem Phasenübergang, und zwar bei einer Temperatur die gegeben ist durch

$$\mu_0^2 / \lambda^2 = (C/T)^2 .$$

Die kritische Temperatur ist dann die Néel Temperatur

$$T_N = C \lambda / \mu_0 .$$

Den Ausdruck für die Magnetisierung kann man auch damit schreiben

$$M_A = T_N / T B_a (1 - T_N / T) / \lambda (1 - (T_N / T)^2) .$$

Damit wird die Suszeptibilität

$$\chi = (M_A + M_B) / B_a = 2 C / \mu_0 (T + T_N).$$

Dieser Ausdruck gilt oberhalb der Néel Temperatur. Offenbar tritt hier keine eigentliche Singularität auf, die Suszeptibilität bleibt endlich.

Wir können die paramagnetische Suszeptibilität für reine Paramagneten, Ferromagneten oberhalb der Curie-Temperatur, sowie Antiferromagneten oberhalb der Néel Temperatur vergleichen. Das Verhalten ist offenbar immer das gleiche, doch ist der Ursprung der Temperaturskala verschoben: im Falle des reinen Paramagneten, d.h. beim Curie Gesetz, ist die Referenztemperatur der absolute Nullpunkt; beim Ferromagneten ist die Referenztemperatur die Curie-Temperatur. Beim Antiferromagneten ist die Referenz die negative Néel Temperatur.

Folie: Kittel p. 509 Mitte

Experimentell findet man eine etwas andere Temperatur, welche mit θ bezeichnet wird. Sie weicht bis zu einem Faktor 5 von der rechnerischen Temperatur ab.

Zeichnung, Folie: Kittel p. 509 oben

Unterhalb der Néel-Temperatur hängt die Suszeptibilität von der Richtung des Feldes bezüglich der Achse der antiferromagnetischen Kopplung ab. Ist das Feld parallel zur Achse, so verschwindet die Suszeptibilität am absoluten Nullpunkt und wächst bis zur Néel Temperatur monoton mit der Temperatur. Liegt das Feld senkrecht dazu, so wird die Suszeptibilität temperaturunabhängig

$$\chi_{\perp} = 1 / \lambda .$$

Antiferromagnetische Verbindungen, wie z.B. MnF_2 , zeigen deshalb unterhalb der Néel Temperatur, also in einem antiferromagnetisch geordneten Zustand, anisotropen Paramagnetismus.

Folie: Kittel p. 511

Natürlich existieren auch in diesem geordneten Zustand thermisch aktivierte Anregungen, d.h. Magnonen. Aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens der Kopplungskonstanten erhält man in diesem Fall eine andere Dispersionsrelation: Für große Wellenlängen ist die Energie proportional zum Wellenvektor.

Hier ist die mit magnetischer Neutronenbeugung bestimmte Dispersionsrelation der Magnonen im kubischen Antiferromagneten $RbMnF_3$ dargestellt.

Folie: Kittel p. 512

8.9 Domänen

Obwohl die ferromagnetische Kopplung eine parallele Orientierung der magnetischen Momente bevorzugt sind in einem Ferromagneten nicht alle Momente parallel orientiert.

Statt dessen findet man Bereiche, in denen die Momente parallel orientiert sind, aber die Ausrichtung der Bereiche ist unterschiedlich, so daß die gesamte Magnetisierung des Systems verschwindet. Dies ist ein Resultat der endlichen Größe des Kristalls und der Maxwell Gleichungen, welche verlangen, daß magnetische Feldlinien geschlossen sind: Besteht ein Kristall endlicher Größe aus nur einer Domäne, so muß außerhalb des Kristalls ein Magnetfeld vorhanden sein. Mit diesem Feld ist eine magnetische Energie verbunden,

Folie: Kittel p. 513

$$U = \int dV \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

welche bei der Energiebilanz des Gesamtsystems berücksichtigt werden muß. Die Energie des Systems kann deshalb verringert werden, wenn das äußere Feld verkleinert wird. Dies kann durch Domänenbildung geschehen.

Mehrere Domänen mit entgegengesetzter Ausrichtung der magnetischen Momente verringern die Energie des äußeren Feldes um die Anzahl der Domänen. Eine noch größere Verringerung ist möglich wenn an allen Oberflächen Domänen gebildet werden, die parallel zur Oberfläche ausgerichtet sind. Dies ist auch im vorherigen Bild erkennbar, wo sich an der Oberfläche eine komplexere Domänenstruktur abzeichnet.

Folie: Kittel p. 520

Während die Domänen die Energie des externen Feldes verringern vergrößern sie die Energie der Austauschwechselwirkung. Die resultierende Domänengröße ist deshalb ein Gleichgewicht zwischen diesen Effekten. Da die magnetische Energie nicht im Kristall sondern im Volumen außerhalb der Materials lokalisiert ist führt Domänenbildung primär an der Oberfläche günstig. Hier sind deshalb die Domänen kleiner als im Volumen des Materials.

Die Austauschenergie ist offenbar in den Bereichen zwischen den Domänen lokalisiert, wo die Spins nicht parallel orientiert sind. Sie kann deshalb verringert werden, wenn diese Übergangsbereiche möglichst groß werden, so daß die Momente lokal fast parallel sind.

Zeichnung: Domänen, Domänenwände

Die Paar-Wechselwirkungsenergie nimmt quadratisch mit dem Winkel ϕ zwischen den Spins zu

Folie AM ausgedehnte Domänenwand

$$U = -J(1 - \cos \phi) \approx J \phi^2/2$$

und damit quadratisch mit der Anzahl N der Elementarzellen, über die die Domänenwand delokalisiert ist

$$U = J \pi/2 N^2 .$$

Die gesamte Austauschenergie eines solchen Übergangsbereichs erhält man durch Multiplikation mit der Anzahl N der Elementarzellen :

$$U = N J \pi/2N^2 = J \pi/2N,$$

nimmt also mit der Anzahl der beteiligten Zellen ab.

Man findet deshalb zwischen den Domänen Übergangsbereiche, welche als Bloch-Wände bekannt sind, und in denen sich die Momente kontinuierlich drehen. Während die ferromagnetische Kopplung einen möglichst langsamen Übergang zwischen den Domänen bevorzugt gibt es auch einen Effekt, der dagegen wirkt. Es handelt sich um die Anisotropieenergie. Im Gegensatz zur einfachen quantenmechanischen Beschreibung der Austauschwechselwirkung als eine skalare Kopplung ist sie bei genauerer Betrachtung richtungsabhängig.

Folie: Kittel p. 518

$$U_{ij} = - \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}_j ,$$

wobei \mathbf{J} ein Tensor ist. Diese Richtungsabhängigkeit liegt u.a. an der Spin-Bahn Wechselwirkung. Dies führt dazu, daß die Domänen sich nur in bestimmte Richtungen orientieren.

Dies sieht man auch im Falle des Nickelplättchens, wo alle Domänen parallel zu den Diagonalen orientiert sind. Dadurch ist die Energie der Bloch-Wände höher als die der Domänen selbst. Die Anisotropieenergie ist deshalb proportional zur Dicke der Blochwände. Die Austauschenergie ist indirekt proportional zu ihrer Dicke,

Folie: Domänen in Nickelfolie

$$U_{\text{aniso}} = N K,$$

wobei K die Anisotropiekonstante ist. Damit entsteht ein Optimum für eine Dicke, die

$$N = (\pi^2 J S^2 / K a^3)^{1/2}$$

Einheitszellen entspricht, wobei a die Gitterkonstante beschreibt. Für Eisen erhält man $N \approx 300$.

Diese Domänenwände oder Blochwände sind deshalb stabil, d.h. sie besitzen eine Breite, die nur von Materialkonstanten abhängt. Sie stellen deshalb auch eine Art von Teilchen dar, welche sich aufgrund von äußeren Felder durch das Material bewegen können. Solche Quasiteilchen, die die Lösung einer nichtlinearen Wellengleichung darstellen und lokalisierte Wellen bilden werden als **Solitonen** bezeichnet.

Die unterschiedliche Orientierung der Domänen führt dazu, daß die Magnetisierung des Materials in der Abwesenheit eines

Zeichnung: lokale vs. globale Magnetisierung

äußeren Feldes kleiner ist als die Magnetisierung der einzelnen Domänen. Dies ist auch der wichtigste Grund dafür daß die beobachtete Magnetisierung kleiner ist als die oben errechnete Sättigungsmagnetisierung. Die Sättigungsmagnetisierung ist die Magnetisierung einer einzelnen Domäne, während die beobachtete Magnetisierung dem makroskopischen Mittelwert entspricht.

Zeichnung: Energie / Wanderung der Domänengrenze

Legt man ein äußeres Feld an, so werden diejenigen Domänen, welche parallel zum äußeren Feld orientiert sind, energetisch bevorteilt, sie wachsen deshalb auf Kosten derjenigen Domänen, die antiparallel orientiert sind. Erst wenn ein genügend großes äußeres Feld anliegt werden alle Domänen parallel zu diesem Feld ausgerichtet und die Magnetisierung des Kristalls erreicht die Sättigungsmagnetisierung. Diese Umorientierung der Domänen geschieht über eine Wanderung der Blochwände zwischen den einzelnen Domänen und, bei höheren Feldstärken, über eine Drehung der Magnetisierung innerhalb der Domänen.

Da für die Verschiebung der Domänenwände Energie nötig ist, um innere Widerstände zu überwinden, ist dieser Prozeß nicht reversibel und geschieht in Form einer Hysterese.

Folie: Hysterese

Orientiert man alle Domänen durch ein äußeres Feld und fährt dieses anschließend auf Null zurück, so bleibt

Zeichnung: Hysterese

eine Magnetisierung zurück, die Remanenzmagnetisierung. Erst wenn man das Feld auf einen negativen Wert bringt, das Koerzitivfeld H_C , so verschwindet die Magnetisierung.

Der Betrag des Koerzitivfeldes hat für technische Anwendungen eine wichtige Bedeutung. Für Permanentmagnete, die in kleinen äußeren Feldern ihre Magnetisierung behalten sollen, soll es möglichst groß sein. Bei Transformatoren hingegen, wo bei jedem Ummagnetisierungszyklus elektrische Energie von der Größe der Hysterese in Wärme umgewandelt wird, soll das Koerzitivfeld möglichst klein sein. Sein Wert läßt sich über Kristallfehler und die mikrokristalline Struktur kontrolliert werden. Für Permanentmagnete erreicht man Werte bis zu 1000 G, nahe bei der Sättigungsmagnetisierung, für Transformatoren kann man sie bis auf wenige mG reduzieren.