

2. Zwei-Niveau Atome

Das einfachste und verbreitetste Modell der Wechselwirkung zwischen Atomen und elektromagnetischen Feldern beschreibt das Atom als ein quantenmechanisches Zweiniveausystem und das Licht als eine klassische elektromagnetische Welle. Es wird deshalb als halbklassisches Modell bezeichnet. Obwohl solche Atome mit nur zwei Zuständen in der Natur nicht existieren sind sie doch eine nützliche Fiktion und oft eine gute Näherung für Phänomene, die in der Natur beobachtet werden, sofern die Frequenz der Anregung nahe bei einer atomaren Resonanzfrequenz liegt.

Wer hat QED gehört ?

2.1 Quantenmechanische Beschreibung: Das Jaynes-Cummings Model

2.1.1 Übersicht

Klassisch wird die Wechselwirkung zwischen einem Atom und dem Strahlungsfeld durch das Skalarprodukt **Z: Dipol / Feld**

$$U = -\vec{E} \cdot \vec{d}$$

beschrieben, wobei \vec{E} das elektrische Feld und \vec{d} das atomare Dipolmoment beschreiben. Gemäß dem Korrespondenzprinzip können wir diese klassische Wechselwirkung in einen Hamiltonoperator umwandeln indem wir die klassischen Variablen durch die entsprechenden quantenmechanischen Operatoren ersetzen. Das elektromagnetische Feld kann aber nicht durch einen einzelnen Operator ausgedrückt werden. Statt dessen benutzt man üblicherweise eine Summe über die einzelnen Moden des Feldes.

Davon gibt es aber unendlich viele. Die vollständige Form des Hamiltonoperators ist deshalb bei weitem nicht trivial. **Z: Feldmoden**

Es gibt jedoch eine vereinfachte Form, die es erlaubt, analytische Resultate zu erhalten und trotzdem einige wesentliche Aspekte der Wechselwirkung exakt beschreibt. Dazu vernachlässigt man sämtliche Moden außer einer. Dieses Modell ist von Jaynes und Cummings entwickelt worden (E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963)). Es war ursprünglich als ein rein theoretisches Modell entwickelt worden, um zu untersuchen, inwiefern sich die Voraussagen der Quantenmechanik von denen der klassischen Theorie, d.h. der Maxwell-Gleichungen unterscheiden würde. Zu dieser Zeit schien es nicht

denkbar, daß man mit einzelnen Moden des Strahlungsfeldes oder einzelnen Atomen Experimente durchführen könnte. Inzwischen ist es aber in verschiedenen Gruppen gelungen, Versuchsaufbauten zu realisieren, in denen diese theoretische Idealsituation in einer sehr guten Näherung erreicht wird. Man muß dafür einerseits die Wechselwirkung mit einer Mode verstärken, andererseits die Wechselwirkung mit allen anderen Moden unterdrücken, so daß die Wechselwirkung des Systems mit einer einzelnen Mode sehr viel stärker wird als die mit allen anderen Moden zusammen.

Literatur: P. Goy, J.M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche, '*Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission*', Phys. Rev. Lett. 50, 1903-1906 (1983).

H. Walther, '*The single atom maser and the quantum electrodynamics in a cavity*', Physica Scripta T23, 165-169 (1988).

S. Haroche and D. Kleppner, '*Cavity quantum electrodynamics*', Physics Today January 1989, 24-30 (1989).

E.A. Hinds, '*Cavity Quantum Electrodynamics*', in *Adv. atomic, mol. opt. phys.* 28, Editor: D. Bates, Academic Press, Boston (1991).

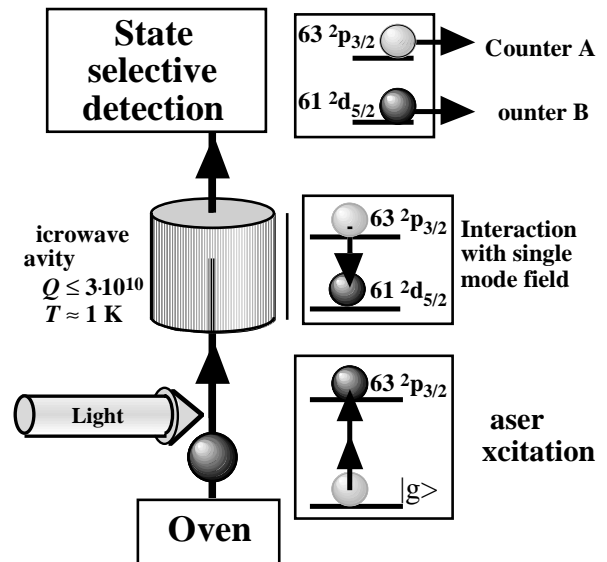
S. Haroche, '*Cavity Quantum Electrodynamics*', in *Fundamental Systems in Quantum Optics; Proceedings of the Les Houches summer school*, Editor: J. Dalibard, J.M. Raimond, and J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam (1992).

H. Walther, '*Experiments on cavity quantum electrodynamics*', Phys. Rep. 219, 263-281 (1992).

Damit eine einzelne Mode selektiert werden kann muß zunächst die **F: Modenstruktur eines Resonators** Modenstruktur des freien Raums modifiziert werden. Dies kann man erreichen indem man den Raum durch Spiegel begrenzt. Diese erzwingen Randbedingungen für das elektromagnetische Feld, welche nur von diskreten Wellenlängen und damit diskreten Frequenzen erfüllt werden können. In einem dreidimensional beschränkten Volumen erhält man deshalb eine vollständig diskrete Modenstruktur. Wird nur eine Dimensionen eingeschränkt, so erhält man eine monoton ansteigende Modendichte, die aber diskrete Stufen aufweist. Bei zwei Randbedingungen werden aus den Stufen Diskontinuitäten.

Figur 2.1: Der Mikromaser erlaubt eine gute experimentelle Näherung an das JC Modell.

Figur 2.1 zeigt schematisch, wie das Strahlungsfeld im Prinzip auf eine einzelne Mode reduziert werden kann. Die Wechselwirkungsregion ist vollständig von einem Resonator eingeschlossen, dessen Wände elektrisch leitend sind. Ein solcher Resonator besitzt eine diskrete Modenstruktur, d.h. es sind nur bestimmte Frequenzen und Wellenlängen möglich.



Durch Anpassen der Geometrie kann die Frequenz der Moden so angepaßt werden, daß eine in der Nähe der atomaren Resonanz liegt, während alle andern so weit entfernt sind, daß deren Beitrag zur Wechselwirkung vernachlässigbar bleibt. Aus praktischen Überlegungen muß dazu die Übergangsfrequenz im Mikrowellenbereich des elektromagnetischen Spektrums liegen. Die Atome, welche mit dem Feld in Wechselwirkung treten werden deshalb in hoch liegenden Rydberg-Zuständen präpariert bevor sie in die Wechselwirkungszone eintreten. Ihre Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld im Resonator wird über eine Analyse der heraustretenden Atome erreicht.

Im optischen Bereich des Spektrums ist es bisher nicht gelungen, Strukturen zu bauen, welche die Atome vollständig einschließen, obwohl Halbleiter-Quantentrogstrukturen dieses Ziel allmählich erreichen. Trotzdem ist es möglich, die Modenstruktur auf eine Weise zu modifizieren daß die Wechselwirkung eines Atoms mit einer bestimmten Mode wesentlich stärker ist als mit allen anderen Moden. Solche Effekte kann man in Fabry-Perot ähnlichen optischen Resonatoren beobachten. Man beobachtet dabei üblicherweise verstärkte oder abgeschwächte spontane Emission.

Literatur: D. Kleppner, *'Inhibited spontaneous emission'*, Phys. Rev. Lett. 47, 233-236 (1981).

P. Goy, J.M. Raimond, M. Gross, and S. Haroche, *'Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission'*, Phys. Rev. Lett. 50, 1903-1906 (1983).

R.G. Hulet, E.S. Hilfer, and D. Kleppner, *'Inhibited spontaneous emission by a Rydberg atom'*, Phys. Rev. Lett. 55, 2137-2140 (1985).

G. Gabrielse and H. Dehmelt, *'Observation of inhibited spontaneous emission'*, Phys. Rev. Lett. 55, 67-70 (1985).

W. Jhe, A. Anderson, E.A. Hinds, D. Meschede, L. Moi, and S. Haroche, 'Suppression of spontaneous decay at optical frequencies: a test of vacuum-Feld anisotropy in confined space', Phys. Rev. Lett. 58, 666-669 (1987).

F. DeMartini and G.R. Jacobovitz, 'Anomalous spontaneous-stimulated-decay phase transition and zero-threshold laser action in a microscopic optical cavity', Phys. Rev. Lett. 60, 1711-1714 (1988).

Oder als eine **Frequenzverschiebung** **Z: Verschiebung / Verbreiterung** der atomaren Linien gegenüber dem freien Raum.

D.J. Heinzen and M.S. Feld, 'Vacuum radiative level shift and spontaneous emission linewidth of an atom in an optical resonator', Phys. Rev. Lett. 59, 2623-2626 (1987).

Oder als eine **Aufspaltung** der Resonanzlinien **Z: Aufspaltung**

M.G. Raizen, R.J. Thompson, R.J. Brecha, H.J. Kimble, and H.J. Carmichael, 'Normal-mode splitting and linewidth averaging for two-state atoms in an optical cavity', Phys. Rev. Lett. 63, 240-243 (1989).

R.J. Thompson, G. Rempe, and H.J. Kimble, 'Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity', Phys. Rev. Lett. 68, 1132-1135 (1992).

2.1.2 Hamiltonoperator

Der Jaynes-Cummings Hamiltonoperator besteht aus drei Teilen

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_{\text{atom}} + \mathcal{H}_{\text{feld}} + \mathcal{H}_{\text{int}} , \quad (1)$$

wobei

$$\mathcal{H}_{\text{atom}} = - 1/2 \hbar \omega_0 \sigma_z \quad \mathcal{H}_{\text{feld}} = \hbar \omega_L (a^\dagger a + 1/2) \quad (2)$$

das freie Atom und das isolierte elektromagnetische Feld darstellen. Der Operator σ_z ist ein Pauli Spin Operator, der auf das Zweiniveaumatom wirkt, ω_0 bezeichnet die atomare Resonanzfrequenz, und ω_L die Laserfrequenz.

Der Teil des Hamiltonoperators, der auf das Atom wirkt, hat dabei die folgenden Matrixelemente: **Frage: Operatoren bekannt?**

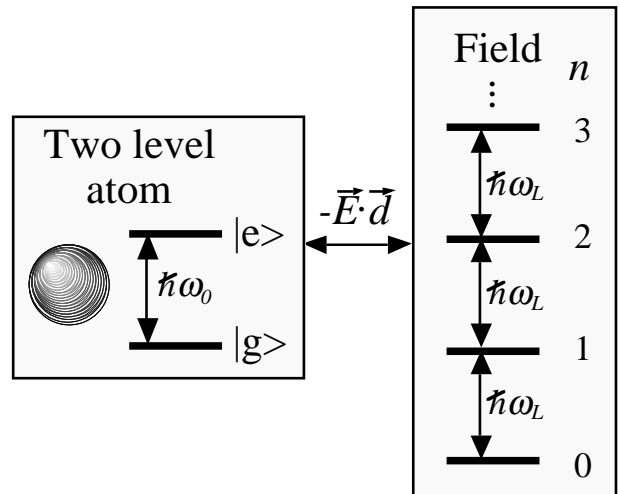
$$\mathcal{H}_{\text{atom}} |g,n\rangle = - 1/2 \omega_0 |g,n\rangle; \quad \mathcal{H}_{\text{atom}} |e,n\rangle = 1/2 \omega_0 |e,n\rangle;$$

und der Feldteil:

$$\mathcal{H}_{\text{feld}} |g,n\rangle = \omega_L(n + 1/2) |g,n\rangle ; \quad \mathcal{H}_{\text{feld}} |e,n\rangle = \omega_L(n + 1/2) |e,n\rangle ,$$

wobei $|n\rangle$ den Zahlzustand mit n Photonen im Feld darstellt.

Figur 2.2: Die Komponenten des Jaynes-Cummings Modells sind ein Zweiniveuaatom und eine einzelne Mode des Strahlungsfeldes.



Figur 2.2 zeigt die beiden Komponenten des Modells. Das „Zweiniveuaatom“ kann hier einerseits wirklich ein Atom beschreiben, oder es kann einen Spin-1/2 darstellen. Die Wechselwirkung zwischen den beiden ist die elektrische oder magnetische Dipol Wechselwirkung. Wir benutzen das Korrespondenzprinzip und schreiben den Wechselwirkungsoperator als

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \omega_1(a+a^\dagger)(\sigma_++\sigma_-) = \omega_1(a\sigma_++ a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \approx \omega_1(a\sigma_++a^\dagger\sigma_-) \quad (3)$$

wobei ω_1 die Kopplungsstärke parametrisiert. Diese hängt vom atomaren Dipolmoment, dem Modenvolumen, sowie von der Position des Atoms in der Mode ab. Die Operatoren σ_\pm sind Pauli Spin Matrizen, welche den Übergang vom Grund- zum elektronisch angeregten Zustand des Zweiniveuaatoms beschreiben.

Die erste Form des Hamiltonoperators erhält man direkt aus dem Korrespondenzprinzip indem man den atomaren Dipol durch den Operator

Z: Effekt der einzelnen Terme

$$\sigma_x=(\sigma_++\sigma_-)$$

ersetzt und das elektrische Feld durch

$$E = a+a^\dagger.$$

Die Näherungsform erhält man indem man die Terme $a^\dagger\sigma_+$ und $a\sigma_-$ vernachlässigt. Der erste der beiden Terme beschreibt den Übergang eines Atoms aus dem Grundzustand in den angeregten Zustand während gleichzeitig ein Photon erzeugt wird, der zweite Term den umgekehrten Vorgang. Diese Prozesse sind nicht energieerhaltend und spielen deshalb erst in sehr hoher Ordnung einer Störungsrechnung eine Rolle. Die Näherungsform entspricht der Approximation eines rotierenden Feldes, das in der halbklassischen Näherung noch diskutiert wird.

2.2 Die wichtigsten Resultate

2.2.1 Die Struktur des Hamiltonoperators

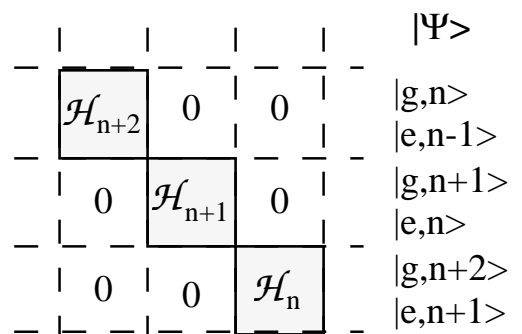
Für die Auswertung des Hamiltonoperators benutzen wir eine Basis, die aus den Produktzuständen $|g, n\rangle$ und $|e, n\rangle$ besteht. Hierbei bezeichnet $|g\rangle$ den Grundzustand des Atoms, $|e\rangle$ den angeregten Zustand, und n zählt die Anzahl Photonen. Die Wirkung des Hamiltonoperators auf diese Zustände ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{atom}} |g, n\rangle &= -\frac{1}{2} \omega_0 |g, n\rangle; & \mathcal{H}_{\text{atom}} |e, n\rangle &= \frac{1}{2} \omega_0 |e, n\rangle; \\ \mathcal{H}_{\text{feld}} |g, n\rangle &= \omega_L (n + \frac{1}{2}) |g, n\rangle; & \mathcal{H}_{\text{feld}} |e, n\rangle &= \omega_L (n + \frac{1}{2}) |e, n\rangle \\ \mathcal{H}_{\text{int}} |g, n\rangle &= \omega_1 \sqrt{n} |e, n-1\rangle & \mathcal{H}_{\text{int}} |e, n\rangle &= \omega_1 \sqrt{n} |g, n+1\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Die Operatoren der Teilsysteme sind somit diagonal in dieser Basis, während die Kopplungsoperatoren nichtdiagonale Elemente enthalten zwischen Zuständen, die beinahe entartet sind. Der gesamte Hamiltonoperator hat eine 2x2 Struktur, wie in Figur 2.3 gezeigt

Figur 2.3: Blockdiagonale Matrixdarstellung des Jaynes-Cummings Hamiltonoperators.

Die linke Seite der Figur stellt die Struktur des Hamiltonoperators dar, wobei der schattierte Teil die nichtverschwindenden Matrixelemente darstellt. Dieses Zerfallen des Hamiltonoperators in einzelne Untermatrizen ist der Grund dafür, daß das JC-Modell analytisch gelöst werden kann.



Die rechte Hälfte der Figur stellt die zugehörigen Basisfunktionen dar. Die obersten zwei Zustände entsprechen dem Atom im Grundzustand und n Photonen im elektromagnetischen Feld, bez. dem Atom im angeregten Zustand und $n-1$ Photonen im Feld.

Die einzelnen Submatrizen haben folgende Struktur:

$$\mathcal{H}_n = \hbar \begin{pmatrix} (n+\frac{1}{2}) \omega_L - \frac{\omega_0}{2} & \omega_1 \sqrt{n} \\ \omega_1 \sqrt{n} & (n-\frac{1}{2}) \omega_L + \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Die Energie der beiden ungestörten Zustände unterscheidet sich somit nur um den Betrag $\omega_L - \omega_0$, also um die Verstimmung zwischen Laser und atomarer Resonanzfrequenz. Die

außerdiagonalen Elemente des Hamiltonoperators, welche Absorption und Emission eines Photons beschreiben, koppeln diese beiden Zustände aneinander, aber nicht an zusätzliche Zustände. Sie stellen deshalb ein geschlossenes Zweiniveausystem dar und können analytisch diagonalisiert werden.

2.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte dieses Zweiniveausystems sind

$$E_{n;\alpha,\beta} = (n \omega_L \pm \Omega/2) , \quad (6)$$

wobei α und β Indizes darstellen, welche die Eigenzustände numerieren. Die Energiedifferenz ist

$$\Omega = \sqrt{((\omega_0 - \omega_L)^2 + 4n\omega_1^2)} , \quad (7)$$

die verallgemeinerte Rabi-Frequenz. Die Eigenzustände sind

$$|n;\alpha\rangle = -\sin\theta_n |g;n\rangle + \cos\theta_n |e;n-1\rangle \quad |n;\beta\rangle = \cos\theta_n |g;n\rangle + \sin\theta_n |e;n-1\rangle \quad (8)$$

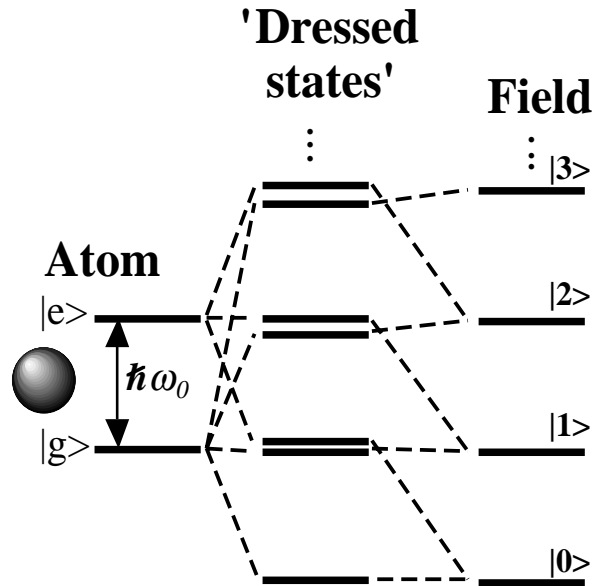
wobei der Mischungswinkel

$$\tan(2\theta_n) = \sqrt{n} \omega_1 / (\omega_L - \omega_0) \quad (9)$$

durch das Verhältnis aus Kopplungsstärke $\sqrt{n} \omega_1$ zur Resonanzverstimmung gegeben ist $\omega_L - \omega_0$. Die Eigenzustände des gekoppelten Systems sind Superpositionen von zwei Zuständen, welche sich nur dadurch unterscheiden, daß ein Photon sich entweder im Feld befindet, oder vom Atom absorbiert wurde. Dieser Übergang von den ungestörten zu den gekoppelten Zuständen bezeichnet man auf englisch als „dressing“. Damit will man ausdrücken, daß die nackten, also ungestörten Zustände des Atoms ein Kleid aus Photonen erhalten. Die gekoppelten Zustände werden deshalb als „dressed states“ bezeichnet.

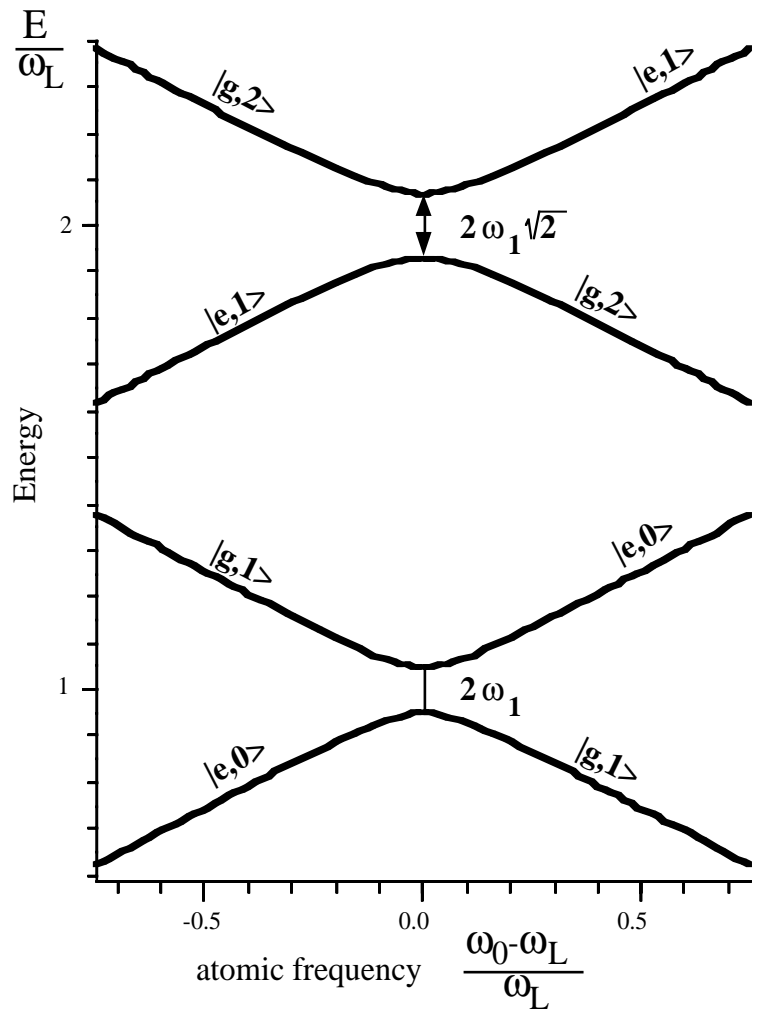
Figur 2.4: Energieniveaus der isolierten Subsysteme (links, rechts) und des gekoppelten Jaynes-Cummings Systems (Mitte)

Wie Figur 2.4 zeigt beinhaltet jedes Paar von „angezogenen“ Zuständen einen Beitrag von zwei Feldzuständen, die sich um ein Photon unterscheiden, und von beiden atomaren Zuständen. Die Aufspaltung Ω zwischen diesen beiden Zuständen wächst mit der Wurzel aus der Anzahl Photonen, also mit der Feldstärke.



Figur 2.5: Energie der „dressed states“ als Funktion der atomaren Resonanzfrequenz.

Figur 2.5 stellt die Energie der „bekleideten“ Zustände als Funktion der Laser Verstimmung dar. Für große Verstimmungen sind diese Eigenzustände des gesamten Hamiltonoperators dieselben wie die Zustände des ungestörten Systems, d.h. der Einfluß der Wechselwirkung zwischen Atom und Feld verschwindet. In der Figur sind sie deshalb mit den Symbolen der ungestörten Zustände, also der Produktzustände, markiert. Auf der Resonanz verhindert der Kopplungsterm ein Kreuzen der beiden Zustände. Die Aufspaltung ist proportional zur Wurzel aus der Photonenzahl und somit zur Feldstärke. Interessanterweise verschwindet diese Aufspaltung auch dann nicht, wenn einer der beitragenden ungestörten Zustände $|e;0\rangle$ ist, wenn sich also kein Photon im Feld befindet, daß auch dann die Aufspaltung nicht verschwindet. Die übliche Interpretation dieser Tatsache ist, daß auch ein leerer Resonator an ein Atom koppelt, das sich im angeregten Zustand befindet. Dies ist die eigentliche Ursache für das Auftreten von spontaner Emission. Der



einzigem Zustand, der nicht gekoppelt wird ist der Zustand $|g,0\rangle$, welcher in der Zeichnung nicht berücksichtigt wurde.

2.2.3 Dynamik im resonanten Fall

Der Hamiltonoperator bestimmt nicht nur die Energie, sondern auch die zeitliche Entwicklung des Systems. Wir betrachten hier den Fall, wo das Atom zu Beginn im angeregten Zustand ist, während das Feld mit $n-1$ Photonen besetzt ist. Wir nehmen an, daß das Feld resonant ist, d.h. $\omega_0 = \omega_L$ und damit $\theta=0$. Wie vorher gezeigt koppelt dieser Zustand an den Zustand mit n Photonen im Feld und dem Atom im Grundzustand.

Zur Berechnung der Dynamik schreiben wir den Anfangszustand in der Eigenbasis des Hamiltonoperators als

$$\Psi(0) = |e;n-1\rangle = 1/\sqrt{2} (|n;\alpha\rangle + |n;\beta\rangle). \quad (10)$$

Damit können wir direkt die zeitliche Entwicklung hinschreiben:

$$\Psi(t) = |e;n-1\rangle = 1/\sqrt{2} (|n;\alpha\rangle e^{-iE_n;\alpha t} + |n;\beta\rangle e^{-iE_n;\beta t}). \quad (11)$$

wobei

$$E_{n;\alpha,\beta} = (n \omega_L \mp \omega_1 \sqrt{n}). \quad (12)$$

Wir transformieren diese Formel zurück in die Produktbasis und finden

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= 1/2 [-(|g;n\rangle + |e;n-1\rangle)e^{-iE_n;\alpha t} + (|g;n\rangle + |e;n-1\rangle)e^{-iE_n;\beta t}] = \\ &= 1/2 [|g;n\rangle (-e^{-iE_n;\alpha t} + e^{-iE_n;\beta t}) + |e;n-1\rangle (e^{-iE_n;\alpha t} + e^{-iE_n;\beta t})] = \\ &= [|g;n\rangle (-i) e^{-in\omega_L t} \sin(\omega_1 \sqrt{n} t) + |e;n-1\rangle e^{-in\omega_L t} \cos(\omega_1 \sqrt{n} t)] \end{aligned} \quad (13)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Atom im angeregten Zustand zu finden wird damit

$$|\langle \Psi(t) | e;n-1 \rangle|^2 = 1/2 (1 + \cos(2 \omega_1 \sqrt{n} t)). \quad (14)$$

Dieses Resultat beschreibt den oszillatorischen Austausch eines **Z: Oszillation** Energiequantums zwischen dem Atom und dem Feld. Dieses Verhalten entspricht der quantenmechanischen Version der Rabi-Oszillationen, die wir bei der halbklassischen Beschreibung kennenlernen werden. Auf dieser Stufe ist die quantenmechanische Beschreibung somit praktisch äquivalent zur halbklassischen Beschreibung.

Dies ändert sich wenn wir berücksichtigen, daß das Feld sich **Z: Feldzustände** nicht in einem Zustand mit bestimmter Photonenzahl befindet.

Das eigentliche Resultat hängt also davon ab, in welchem Zustand sich das Feld befindet.

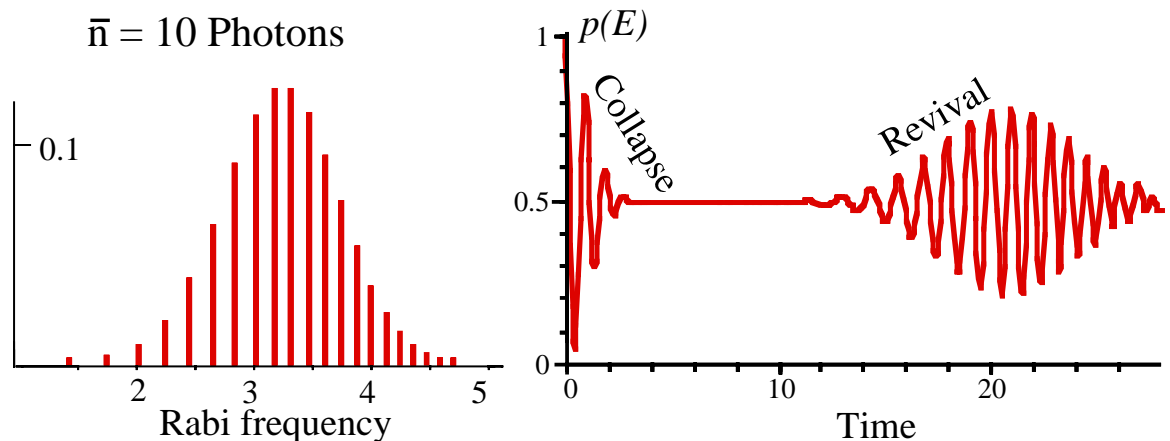
Für jede mögliche Photonenzahl erhält man eine Oszillation, deren Frequenz proportional zur Wurzel aus der Photonenzahl ist, und deren Amplitude durch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Photonenzahl gegeben ist. Bei einer Überlagerung von zwei Zahlzuständen erhalten wir also ein Schwebungssignal, das der Differenz der beiden Kopplungsstärken entspricht.

Z: Überlagerung

Für eine klassische Lichtquelle ist das Feld in einem thermischen Zustand. In diesem Fall klingt die Oszillation rasch ab und die Wahrscheinlichkeit, das Atom im angeregten Zustand zu finden wird $1/2$, d.h. das Photon ist zwischen dem Atom und der Mode mit gleicher Wahrscheinlichkeit verteilt. Im freien Raum findet diese „Teilung“ zwischen dem Atom und einer unendlichen Zahl von Moden statt, so daß die Wahrscheinlichkeit, daß es sich auf dem Atom befindet, verschwindet.

F: Thermischer Zustand

Kehren wir zum Fall einer einzelnen Mode zurück und betrachten den Fall eines kohärenten Zustandes, was der Wechselwirkung mit einem Laserstrahl entspricht.



Figur 2.6: Cummings Kollaps und „Revival“ für einen kohärenten Zustand mit einer mittleren Photonenzahl $n=10$. Die linke Seite stellt die Besetzungswahrscheinlichkeit der einzelnen Feldzustände dar, die rechte Seite die Wahrscheinlichkeit, das Atom im angeregten Zustand zu finden als Funktion der Zeit.

Figur 2.6 illustriert diesen Fall. Für einen kohärenten Zustand besitzt die Feldstärke keinen scharfen Wert, sondern eine Verteilung, dessen Breite proportional zur Quadratwurzel aus der mittleren Photonenzahl ist. Ein Atom, welches mit einem solchen Feld in Wechselwirkung tritt, erfährt eine zeitliche Entwicklung, die sich qualitativ von der oszillatorischen Entwicklung unterscheidet, die wir für den Fall eines Zahlzustandes erhielten. In diesem Fall erhält man eine Superposition aller möglichen Frequenzen, welche jeweils proportional zur Quadratwurzel aus der Photonenzahl sind. Diese Frequenzen sind auf der linken Seite von Figur 2.6 dargestellt, jeweils mit der entsprechenden Amplitude,

d.h. der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens in der Verteilung des kohärenten Zustandes. Die rechte Seite von Figur 2.6. zeigt dies zeitliche Entwicklung, dies sich aus der Überlagerung dieser Oszillationen ergibt. Aufgrund der Verteilung der Frequenzen ergibt sich eine Dämpfung der Oszillation, wobei die Zerfallszeit indirekt proportional zur Breite der Verteilung der Rabi-Frequenzen ist. Danach erreicht das System einen zeitunabhängigen Zustand, in dem die Hälfte der Atome sich im Grundzustand und die andere Hälfte im angeregten Zustand befindetet.

Die Verteilung der Rabi-Frequenzen ist aber nicht kontinuierlich, sondern diskret. Da nur eine endliche Zahl von Frequenzen zum Signal beiträgt kann es sich nicht um einen wirklich zeitunabhängigen Zustand handeln. Die Diskretisierung der Zustände führt deshalb zu einem Wiederaufleben der Oszillationen. Die Zeit bis zum Erscheinen dieses „Echos“ ist indirekt proportional zum Abstand zwischen den Rabi-Frequenzen [Rempe, 1987 #1758]. Der Zerfall und das Wiederaufleben dieser Oszillationen sind in der Literatur als „Cumings Kollaps“ und „revival“ bekannt. Sie stellen einen wesentlichen Unterschied zwischen den klassischen Voraussagen für die zeitliche Entwicklung und den quantenmechanischen Voraussagen dar und konnten vor wenigen Jahren erstmals beobachtet werden, und zwar in einem Mikrowellenresonator extrem hoher Güte ($Q \sim 10^{10}$) (G. Rempe, H. Walther, and N. Klein, '*Observation of Quantum Collapse and Revival in a One-Atom Maser*', Phys. Rev. Lett. 58, 353-356 (1987)).

2.3 Halbklassische Beschreibung: Das Modell

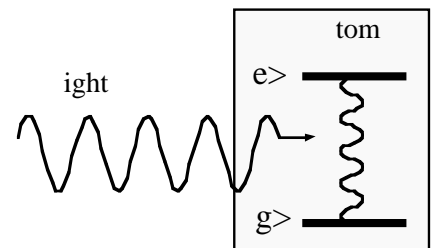
2.3.1 Übersicht

Der Ausgangspunkt für die halbklassische Beschreibung ist ein Zweiniveaumodell für das atomare System, wobei die beiden Zustände durch einen dipol-erlaubten Übergang verbunden sind. Dieses quantenmechanische Zweiniveausystem wird von einer klassischen elektromagnetischen Welle getrieben (R.G. Brewer, *Coherent optical spectroscopy*, in *Frontiers of Laser Spectroscopy*, Editor: R. Balian, S. Haroche, and S. Liberman, North Holland (1977); L. Allen and J.H. Eberly, 'Optical resonance and two-level atoms', Dover Publications, Mineola, NY (1987).). Dies ist das halbklassische Analog des klassischen Lorentz-Lorenz-Modells der Dispersion (H.A. Lorentz, '*Über die Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes und der Körperdichte*', Ann. Phys. Chem. 2, 641-665 (1880); L. Lorenz, '*Über die Refraktionsconstante*', Wiedem. Ann. 11, 70-103 (1881); M. Born and E. Wolf, 'Principles of optics', Pergamon Press, Oxford (1986).). Das halbklassische Modell gleicht dem klassischen weitgehend: in beiden Fällen treibt die elektromagnetische Welle einen schwingungsfähigen Dipol. Dieser ist selbst die Quelle einer elektromagnetischen Welle, welche mit der eingestrahnten Welle weiter läuft und sich ihr überlagert. Die in-, resp. außer Phase Komponente dieser Welle führt zu Absorption, resp. Dispersion.

Das Modell beschreibt das materielle System als ein einzelnes Atom. Experimentell verwendet man hingegen ein Ensemble von Atomen und das Signal stellt eine Summe über alle Beiträge der einzelnen Atome dar. In den meisten Fällen behandelt man sämtliche Atome als identisch und betrachtet nur einen Vertreter. Der Dichteoperator, resp. die Zustandsfunktion des Systems beschreiben deshalb ein gemittelt Atom. Solange die verschiedenen Atome gut voneinander isoliert sind und die gleiche Umgebung sehen ist diese Näherung sehr gut. Die wichtigsten Abweichungen sind Relaxationseffekte und Inhomogenitäten. Relaxation kommt durch die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilsystemen zustande, sowie durch die Wechselwirkung mit der Umgebung. Diese geschieht vor allem über elektromagnetische Felder und/oder über die translatorischen Freiheitsgrade. Die wichtigsten inhomogenen Effekte sind die Dopplerverbreiterung aufgrund der thermischen Geschwindigkeit der Atome.

Wie im quantenmechanischen Fall schreiben wir für die Zustände des Atoms $|g\rangle$ (Grundzustand) und $|e\rangle$ (angeregter Zustand, siehe Figur 2.7). Die beiden Zustände sind über einen elektrischen Dipol-Übergang verbunden.

Figur 2.7: Das Modellsystem: das Atom ist ein quantenmechanisches Zweiniveausystem, welches durch eine klassische elektromagnetische Welle getrieben wird.



Wir nehmen an, daß der Übergang elektrisch-Dipol erlaubt ist. Die beiden Zustände haben dann unterschiedliche Parität. Wenn wir die Phasenfaktoren geeignet wählen hat der Dipoloperator \hat{d} die Matrixelemente

$$\langle e|\hat{d}|g\rangle = \mu_E \quad \langle g|\hat{d}|e\rangle = \mu_E \quad \langle e|\hat{d}|e\rangle = \langle g|\hat{d}|g\rangle = 0 \quad , \quad (15)$$

wobei μ_E das reelle Matrixelement des Dipoloperators darstellt.

2.3.2 Basisoperatoren

Das System hat drei Freiheitsgrade, d.h. seine Operatoren können in einer Basis von 3 Operatoren aufgespannt werden, zusätzlich zum Einheitsoperator. Für diese Basis wählen wir die drei Spin-Operatoren S_x , S_y und S_z . Wenn wir die Einheiten so wählen daß $\hbar=1$, werden die Matrixelemente dieser Operatoren zu

$$\begin{aligned} \langle g|S_x|g\rangle &= 0 & \langle g|S_x|e\rangle &= 1/2 & \langle e|S_x|e\rangle &= 0 \\ \langle g|S_y|g\rangle &= 0 & \langle g|S_y|e\rangle &= -i/2 & \langle e|S_y|e\rangle &= 0 \\ \langle g|S_z|g\rangle &= 1/2 & \langle g|S_z|e\rangle &= 0 & \langle e|S_z|e\rangle &= -1/2 \end{aligned} \quad (16)$$

oder, in Matrixdarstellung

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Wie man leicht feststellen kann erfüllen diese Operatoren die folgenden Vertauschungsrelationen

$$[S_x, S_y] = i S_z \quad \text{und zyklische Permutationen .} \quad (18)$$

Die Bewegungsgleichungen eines solchen Zweiniveausystems wurden erstmals von Felix Bloch genau diskutiert (F. Bloch, *'Nuclear induction'*, Phys. Rev. 70, 460-485 (1946).), und zwar für die Beschreibung der magnetischen Resonanz. Die Zweiniveausysteme waren in diesem Zusammenhang Spin-1/2 Systeme. Die resultierenden Bewegungsgleichungen sind deshalb als Blochgleichungen bekannt. Etwa 10 Jahre später zeigten Feynman, Vernon and Hellwarth (FVH) daß jedes Zweiniveausystem den gleichen Bewegungsgleichungen gehorcht und deshalb mit Hilfe der Blochgleichungen diskutiert werden kann (R.P. Feynman, F.L. Vernon, and R.W. Helwarth, *'Geometrical representation of the Schrödinger equation for solving maser problems'*, J. Appl. Phys. 28, 49-52 (1957)). Aufgrund dieser Analogie bezeichnet man allgemein Zweiniveausysteme gerne als Pseudo-Spin 1/2 Systeme und diskutiert die Bewegungsgleichungen indem man Teile des Systems als Spin-Komponenten bezeichnet und die Wechselwirkung mit äusseren Feldern auf magnetische Wechselwirkungen zurückführt.

In diesem Bild entspricht der Grundzustand des Systems z.B. dem +1/2 Zustand des Pseudo-Spins, während der angeregte Zustand dem -1/2 Zustand entspricht. Die Energiedifferenz zwischen Grund- und angeregtem Zustand entspricht der Zeeman-Aufspaltung. Die z-Komponente des Pseudospins beschreibt die Populationsdifferenz zwischen den beiden Zuständen. Im Fall des optischen Zweiniveausystems beschreiben die x- und y-Komponenten die quantenmechanische Kohärenz zwischen den beiden Zuständen, welche physikalisch ein oszillierendes elektrisches Dipolmoment beschreibt. Dieser Pseudospin ist außerordentlich hilfreich für die Visualisierung der zeitlichen Entwicklung des Systems, welche exakt auf die Bewegung eines Drehimpulses zurückgeführt werden kann, der an ein magnetisches Moment gekoppelt ist.

2.3.3 Hamiltooperator

Der Hamiltonoperator eines Atoms, das von einem monochromatischen Feld

$$E = 1/2 \{ E_0 e^{i\omega L t} + c.c. \}$$

getrieben wird, kann geschrieben werden als

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{atom}} + \mathcal{H}_{\text{int}} = -\omega_0 S_z - 2\omega_x \cos(\omega_L t) S_x, \quad (19)$$

wobei ω_0 die elektronische Anregungsenergie beschreibt, ω_L die Laserfrequenz, und die Kopplungskonstante

$$\omega_x = E_0 \mu_E \quad (20)$$

die Wechselwirkung zwischen dem atomaren Dipolmoment μ_E und dem elektrischen Feld E_0 . In dieser Form des Hamiltonoperators, wie auch in allen folgenden Rechnungen schreiben wir Energieeinheiten in der Form von Frequenzen. Damit erhalten wir eine direkte Beziehung zu den entsprechenden Experimenten, wo Energiedifferenzen immer als Frequenzen erscheinen.

Im Hamiltonoperator von Gleichung (19) erscheint das elektrische Feld nicht als Vektor, sondern als ein Skalar. Dies ist ein inhärentes Problem des Zweiniveausystems, das nur gelöst werden kann indem man das Zweiniveaumodell aufgibt und eine vollständigere atomare Struktur mit einer größeren Zahl von Zuständen berücksichtigt. In der hier benutzten Form des Hamiltonoperators ist der Ursprung der Energieachse in der Mitte zwischen den beiden Zuständen. Diese Wahl des Ursprungs ist geeignet, die Symmetrie des Systems deutlich zu machen.

Wir benutzen die FVH-Analogie, um diesen Hamiltonoperator auf denjenigen eines Spin-1/2 Systems in einem Magnetfeld zurückzuführen. Die elektronische Anregungsenergie

$$\omega_0 = \mu_z B_z$$

entspricht der Zeeman Energie $\mu_z B_z$ aufgrund der Aufspaltung der Spinzustände in einem starken Magnetfeld, welches parallel zur z-Achse orientiert ist.

Die Kopplung an das oszillierende Laserfeld ist äquivalent zur Wechselwirkung eines Spins 1/2 mit einem oszillierenden Magnetfeld parallel zur x-Achse, wobei die Kopplungsstärke

Z / F : NMR

$$\omega_x = 1/2 \mu_x B_x$$

beträgt und B_x die Amplitude des magnetischen Wechselfeldes beträgt.

2.3.4 Dichteoperator

In vielen Experimenten, die in diesem Zusammenhang interessieren besteht das physikalische System aus einem Ensemble von Atomen, welches nicht mit Hilfe einer Wellenfunktion oder Zustandsfunktion beschrieben werden kann.

Dies sieht man z.B. wenn man ein thermisches Ensemble von **Z: Ensemble** Atomen betrachtet. Von einer Million Spins $1/2$ sind im thermischen Gleichgewicht unter typischen Bedingungen $500'001$ parallel und $499'999$ entgegengesetzt zum Feld ausgerichtet. die Magnetisierung beträgt deshalb

$$2 \cdot 10^{-6} \mu_z N ,$$

wobei N die Teilchendichte darstellt.

Frage: welche Wellenfunktion beschreibt diesen Zustand?

Es ist aber nicht möglich, diesen Zustand mit Hilfe einer Wellenfunktion darzustellen.

Für die Beschreibung eines solchen Ensembles benötigt man statt dessen den sogenannten Dichteoperator

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

(U. Fano, 'Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques', Rev. Mod. Phys. 29, 74-93 (1957)). Damit kann man Erwartungswerte berechnen als

$$\langle A \rangle = \text{Sp}\{\rho A\}$$

Wie jeder quantenmechanische Operator kann auch der Dichteoperator in einem geeigneten Satz von Basisoperatoren aufgespannt werden. Für das Zweispinsystem besteht ein besonders geeigneter Satz von Basisoperatoren aus den Drehimpulsoperatoren S_x , S_y und S_z die oben definiert wurden. Wir schreiben die Entwicklungskoeffizienten als s_x , s_y , and s_z , so daß der Dichteoperator folgende Form erhält

$$\rho' = a \mathbb{1} + s_x S_x + s_y S_y + s_z S_z .$$

Die Diagonalelemente des Dichteoperators stellen Populations- **Z: Populationen** wahrscheinlichkeiten dar, z.B. ρ_{11} die Wahrscheinlichkeit, daß sich das Atom im Grundzustand befindet. Die Summe der Diagonalelemente muß deshalb immer gleich 1 sein,

$$\sum_i \rho_{ii} = \sum_i p_i = 1 ,$$

da sich jedes System in irgendeinem Zustand befinden muß. Damit wird der Koeffizient a bestimmt als $1/2$ und der Dichteoperator wird

$$\rho' = 1/2 \mathbb{1} + s_x S_x + s_y S_y + s_z S_z .$$

Z: Matrixform

Der Einheitsoperator $\mathbb{1}$ ist zeitunabhängig und trägt zu keiner beobachtbaren Größe bei; Im Sinne einer Abkürzung ist es deshalb häufig einfacher, diesen Teil des Dichteoperators herauszulösen und den reduzierten Dichteoperator

$$\rho = s_x S_x + s_y S_y + s_z S_z, \quad (22)$$

zu betrachten, dessen Spur verschwindet.

Die Entwicklungskoeffizienten s_x , s_y , und s_z sind die Komponenten eines Spinvektors. Wenn wir ein Spin-1/2 System betrachten, so entspricht dies genau den 3 kartesischen Komponenten des Drehimpulsvektors.

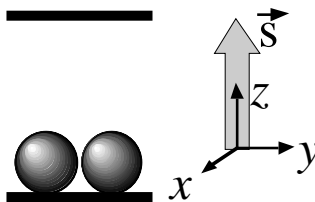
Handelt es sich um einen optischen Übergang, so gibt es keine solche Beziehung, aber, wie FVH gezeigt haben, können wir sie als die Komponenten eines Pseudo-Spins betrachten, welcher die Entwicklung des Systems beschreibt. Seine z-Komponente beschreibt die Populationsdifferenz: Für $s_z = 1$ sind alle Atome im Grundzustand $|g\rangle$, und die Energie des Systems erreicht ein Minimum,

Z: Pseudospin-Analogie

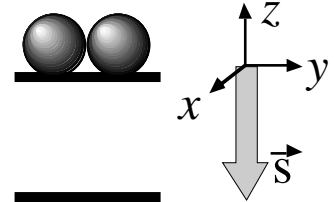
$$\text{Sp}\{\mathcal{H}\rho\} = -\omega_0/2.$$

Figur 2.8: Vergleich von Wellenfunktion und dichteoperator für Atome im Grundzustand und im elektronisch angeregten Zustand.

a) Atoms in ground state



b) Atoms in excited state



Figur 2.8 illustriert die Orientierung des Pseudospins \vec{s} und zeigt die entsprechende Wellenfunktion und den Dichteoperator, der diesen Zustand beschreibt. Da wir den Teil eliminiert haben, der proportional zum Einheitsoperator ist, wird der Dichteoperator spurfrei. Die transversalen Komponenten des Pseudo-Spins \vec{s} bezeichnen das optische Dipolmoment des Atoms und entsprechen dem quantenmechanischen Analogon der oszillierenden Dipolmomente der Lorentz-Lorenz Theorie. Wie in Figur 2.9 gezeigt bezeichnen sie eine kohärente Superposition der beiden Zustände.

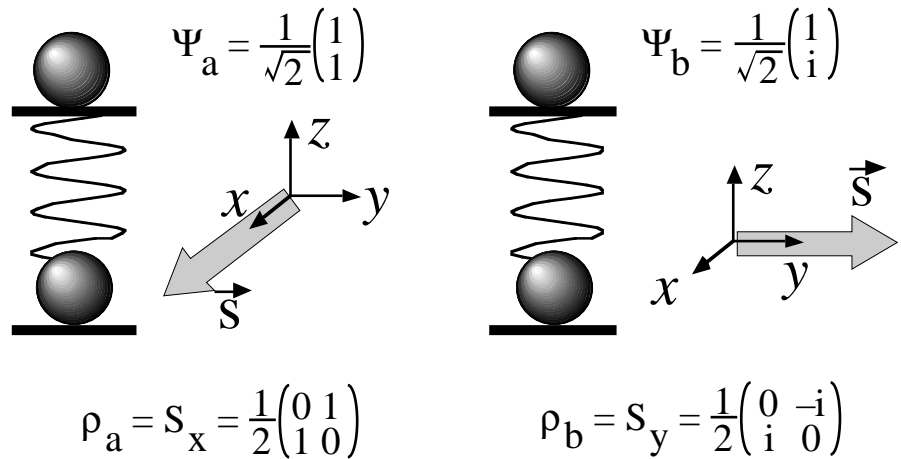
$$\Psi_a = |g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rho'_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_b = |e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho'_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_a = S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_b = -S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figur 2.9: Die transversalen Komponenten des pseudospins bezeichnen eine kohärente Superposition der beiden quantenmechanischen Zustände. Die Orientierung des Pseudospins gibt die Phase der optischen Polarisation an.



Die Orientierung des Pseudospins in der transversalen Ebene bezeichnet die Phase des oszillierenden Dipolmomentes, in direkter Analogie zur komplexen Notation für die Beschreibung des elektrischen Feldes.

Der wichtigste Unterschied zwischen dem klassischen und dem quantenmechanischen Dipolmoment ist die maximale Größe, die das induzierte Dipolmoment erreichen kann. Im klassischen Fall hatten wir gefunden, daß das induzierte Dipolmoment proportional zum elektrischen Feld ist,

$$P = \chi \epsilon_0 E .$$

Damit kann das induzierte Dipolmoment beliebig groß werden wenn nur das Anregungsfeld entsprechend stark ist. Im quantenmechanischen Fall hingegen kann das induzierte Dipolmoment eine maximale Größe nicht überschreiten. Mathematisch wird diese maximale Größe durch die Bedingung für die Spur des Dichteoperators gegeben

$$\text{Sp}\{\rho^2\} = 1/2(1+s_x^2+s_y^2+s_z^2) \leq 1 \text{ oder } s_x^2+s_y^2+s_z^2 \leq 1.$$

Im FVH-Bild impliziert diese Beziehung daß die Länge des Spinvektors beschränkt ist: Der Vektor muß in der Einheitskugel liegen. Endet er auf der Kugeloberfläche, so befindet sich das System in einem reinen Zustand, d.h. alle beteiligten Atome sind im gleichen quantenmechanischen Zustand. Dies sind genau diejenigen Zustände, die mit Hilfe eines Zustandsvektors beschrieben werden können. Für einen gemischten Zustand ($\text{tr}\{\rho^2\} < 1$), kann der Vektor kürzer sein, aber nie länger.

Der Unterschied kann auch auf die Struktur der Energieniveaus zurückgeführt werden: Auch in der Quantenmechanik können Oszillatoren beliebig große Auslenkung erfahren, sofern es sich z.B. um harmonische Oszillatoren handelt. Der Grund ist der, daß ein harmonischer Oszillator ein nach oben unbegrenztes Spektrum besitzt. Ein Zweiniveausystem, hingegen,

Z: Unterschiede / Modelle

ist sowohl nach unten wie nach oben beschränkt. Jedes Atom kann deshalb maximal ein Photon absorbieren, während ein harmonischer Oszillator immer ein weiteres Photon absorbieren und damit in einen höheren Zustand übergehen kann. Die Beschränkung der Energieaufnahme durch die quantenmechanische Struktur limitiert auch die Oszillationsamplitude. Für kleine Amplituden,

$$s_x, s_y \ll 1, s_z \approx 1,$$

bei denen sich das System hauptsächlich im Grundzustand befindet, verhält sich das quantenmechanische Zweiniveausystem wie ein klassischer Dipol. Dies ist der Bereich, in dem Störungsrechnung nützlich ist. Das Resultat der Störungsrechnung ist deshalb identisch zum Resultat des klassischen harmonischen Oszillators des Lorentz-Lorenz Modells (W. Heitler, 'The quantum theory of radiation', Dover Publications, New York (1953).). Bis zur Entwicklung des Lasers war es in der Optik selten möglich, diesen Bereich zu verlassen.

2.4 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung für den Dichteoperator lautet

$$\dot{\rho}(t) = -i[\mathcal{H}(t), \rho(t)] \quad (23)$$

Für diese Bewegungsgleichung existiert keine geschlossene Lösung wenn der Hamiltonoperator zeitabhängig ist. Eine solche Lösung würde in der Angabe der Zeitabhängigkeit aller vier Matrixelemente des Dichteoperators bestehen. Für die formale Beschreibung ist es aber nützlicher, nicht die eigentlichen Matrixelemente ρ_{ij} zu betrachten, sondern den Dichteoperator in einer Basis von Operatoren zu entwickeln.

Meistens benutzt man dafür die Basis der Spinoperatoren. Die Basis selbst bleibt zeitunabhängig, während die Entwicklungskoeffizienten als zeitabhängig betrachtet werden:

$$\rho(t) = s_x(t) S_x + s_y(t) S_y + s_z(t) S_z. \quad (24)$$

Diese Entwicklung erlaubt uns, die Schrödingergleichung in ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen umzuformen, dessen Variablen die Entwicklungskoeffizienten des Dichteoperators sind. Mit dem Hamiltonoperator aus Gleichung (19) erhalten wir für die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \dot{s}_x(t) S_x + \dot{s}_y(t) S_y + \dot{s}_z(t) S_z = \\ &= -i[\mathcal{H}, \rho(t)] = -i[-\omega_0 S_z - 2 \omega_x \cos(\omega_L t) S_x, s_x(t) S_x + s_y(t) S_y + s_z(t) S_z]. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 &= -i\{-\omega_0 (s_x(t) [S_z, S_x] + s_y(t) [S_z, S_y] + s_z(t) [S_z, S_z]) \\
 &- 2 \omega_x \cos(\omega_L t) (s_x(t) [S_x, S_x] + s_y(t) [S_x, S_y] + s_z(t) [S_x, S_z])\} . \\
 &= -i\{-\omega_0 i (s_x(t) S_y - s_y(t) S_x) - 2 \omega_x \cos(\omega_L t) i (s_y(t) S_z - s_z(t) S_y)\} . \\
 &= \{-\omega_0 (s_x(t) S_y - s_y(t) S_x) - 2 \omega_x \cos(\omega_L t) (s_y(t) S_z - s_z(t) S_y)\} .
 \end{aligned}$$

Für die Entwicklungskoeffizienten erhalten wir damit eine Bewegungsgleichung, die in Matrixschreibweise folgende Form hat:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 2\omega_x \cos(\omega_L t) \\ 0 & -2\omega_x \cos(\omega_L t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \quad (26)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der klassischen Bewegungsgleichung für einen Drehimpuls. Die drei Entwicklungskoeffizienten sind die Komponenten eines Drehimpulsvektors im dreidimensionalen Raum. Die Matrix, welche dessen zeitliche Entwicklung bestimmt, entspricht somit einem Drehmoment. Die statische Komponente ω_0 wirkt entlang der z-Achse und die zeitabhängige ($2 \omega_x \cos(\omega_L t)$) entlang der x-Achse. Die beiden Komponenten haben üblicherweise eine sehr unterschiedliche Größenordnung. Die statische Komponente beträgt in der Optik etwa 10^{14} - 10^{15} Hz, die oszillierende ist üblicherweise kleiner als 10^9 Hz. In der Kernspinresonanz liegt die statische bei etwa 10^8 Hz, die oszillierende ist $< 10^5$ Hz.

Die einzige triviale Lösung finden wir für den Fall verschwindender Kopplung,

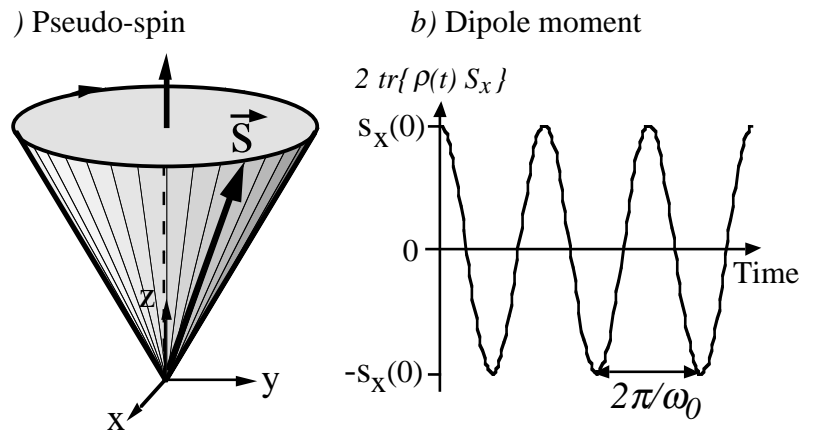
$$\omega_x = 0 ,$$

d.h. für freie Atome. In diesem Fall ist die Lösung

$$\begin{aligned}
 s_x(t) &= s_x(0) \cos(\omega_0 t) + s_y(0) \sin(\omega_0 t) \\
 s_y(t) &= s_y(0) \cos(\omega_0 t) - s_x(0) \sin(\omega_0 t) \\
 s_z(t) &= s_z(0) ,
 \end{aligned} \quad (27)$$

was der Präzession des Spins um die z-Achse entspricht, d.h. um das virtuelle Magnetfeld, wie in Figur 2.10 gezeigt.

Figur 2.10: (a) Freie Evolution des Pseudospins. (b) Zugehörige zeitliche Entwicklung des Dipolmoments.



Für die optische Polarisation des Systems,

$$2 \mu_E \text{Sp}\{\rho(t) S_x\} = \mu_E s_x(t),$$

entspricht diese Präzession einer Oszillation mit der Frequenz ω_0 , wie in der rechten Hälfte von Figur 2.10 dargestellt. Diese Oszillation ist das quantenmechanische Analogon des oszillierenden Dipols der Lorentz-Lorenz Theorie.

2.5 Rotierendes Koordinatensystem

Die vorliegende Form der Bewegungsgleichung ist in zwei Beziehungen unbefriedigend: Im Fall verschwindender Kopplung finden eine Präzession des Pseudo-Spins mit der atomaren Resonanzfrequenz $\omega_0/2\pi$, welche im sichtbaren oder infraroten Teil des Spektrums von der Größenordnung von 10^{14} - 10^{15} Hz ist. Diese Präzessionsfrequenz ist nicht direkt beobachtbar. Hingegen maskiert sie langsamere Bewegungsprozesse, die eigentlich interessanter sind.

Das zweite Problem ist die Zeitabhängigkeit des Hamiltonoperators - dadurch erhält man keine analytische Lösung für die Bewegungsgleichung. Beide Probleme können eliminiert werden wenn wir eine Koordinatentransformation auf die Bewegungsgleichungen anwenden, so daß sie nicht mehr im Laborsystem geschrieben werden. Dieses neue Koordinatensystem rotiert gegenüber dem Laborsystem um die z-Achse. Indem wir uns mit diesem System mitdrehen klammern wir die schnelle Bewegung des pseudo-spins aus der Betrachtung aus. Die selbe Transformation eliminiert gleichzeitig die Zeitabhängigkeit des Hamiltonoperators und ermöglicht es damit, eine analytische Lösung der Bewegungsgleichungen zu finden. Mathematisch entspricht diese Koordinatentransformation einer unitären Transformation, welche wir unten im Detail diskutieren. Physikalisch erhält man diese Transformation über eine Rotation des Koordinatensystems um die z-Achse. Weil ein rotierendes Koordinatensystem kein Inertialsystem ist, erwarten wir, daß die Bewegungsgleichungen korrigiert werden müssen wenn wir sie im rotierenden Koordinatensystem schreiben. Dies geschieht durch die Einführung eines zusätzlichen Terms, ähnlich wie der Zentrifugalkraft, resp. der Corioliskraft.

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen im rotierenden Koordinatensystem schreiben wir zunächst den Hamiltonoperator in der neuen Basis. Anstelle der üblichen Basis $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ benutzen wir eine zeitabhängige Basis

$$|\alpha^r\rangle = |\alpha\rangle e^{i\omega_L t/2} \quad |\beta^r\rangle = |\beta\rangle e^{-i\omega_L t/2} . \quad (28)$$

In Vektorschreibweise entspricht dies einer Transformation

$$\begin{pmatrix} |\alpha^r\rangle \\ |\beta^r\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_L t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_L t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha\rangle \\ |\beta\rangle \end{pmatrix} = U(t) \begin{pmatrix} |\alpha\rangle \\ |\beta\rangle \end{pmatrix} . \quad (29)$$

Wir können den Transformationsoperator U schreiben als

Tutorial: Funktion eines Operators

$$U(t) = e^{i\omega_L t S_z} , \quad (30)$$

was einer Rotation um die z-Achse mit der Frequenz ω_L des Laserfeldes entspricht.

Diese Wechselwirkungsdarstellung wird deshalb als rotierendes Koordinatensystem bezeichnet.

Beweis: Anfangszustand = (1,1)

Ein quantenmechanischer Zustand

$$\Psi(t) = c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle = c_\alpha |\alpha^r\rangle e^{-i\omega_L t/2} + c_\beta |\beta^r\rangle e^{i\omega_L t/2} \quad (31)$$

besitzt die beiden Darstellungen

$$\Psi^{\text{lab}}(t) = \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} \quad \Psi^r(t) = \begin{pmatrix} c_\alpha e^{-i\omega_L t/2} \\ c_\beta e^{i\omega_L t/2} \end{pmatrix} = U^{-1} \Psi^{\text{lab}}(t) . \quad (32)$$

Der obere Index bezeichnet die Basiszustände, welche für die entsprechende Darstellung verwendet wurden. Die Transformation der Zustandsfunktion ist deshalb das Inverse der Transformation der Basiszustände. Die Transformation der Zustandsfunktion impliziert für die Transformation des Dichteoperators

$$\rho^r = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)^r = U^{-1} |\Psi\rangle\langle\Psi| U = U^{-1} \rho U . \quad (33)$$

Die gleichen Transformationseigenschaften müssen auch für alle Observablen gelten, da die Erwartungswerte unabhängig von der Basis sein müssen, in der sie berechnet werden :

$$\langle A \rangle = \text{Sp}\{\rho A\} = \text{Sp}\{\rho^r A^r\} .$$

Wir benutzen die Transformation für den Dichteoperator

$$\langle A \rangle = \text{Sp}\{\rho^r A^r\} = \text{Sp}\{U^{-1} \rho U A^r\} = \text{Sp}\{\rho U A^r U^{-1}\} ,$$

wobei im letzten Schritt die Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen verwendet wurde. Somit muß gelten

$$A = U A^r U^{-1} \quad \text{oder} \quad A^r = U^{-1} A U$$

Diese Beziehung gilt für alle Observablen. Lediglich der Hamiltonoperator ist eine Ausnahme, da er nicht nur eine Observable ist, sondern gleichzeitig der Erzeuger der Bewegung des Systems.

2.6 Transformation des Hamiltonoperators

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung im rotierenden Koordinatensystem betrachten wir die zeitliche Ableitung des Zustandes

$$\frac{d}{dt} \Psi^r(t) = \frac{d}{dt} (U^{-1}(t) \Psi^{\text{lab}}(t)) = \dot{U}^{-1}(t) \Psi^{\text{lab}}(t) + U^{-1}(t) \frac{d}{dt} \Psi^{\text{lab}}(t) . \quad (34)$$

Wir benutzen die Schrödingergleichung im Laborsystem und schreiben den Zustand im rotierenden Koordinatensystem. Damit finden wir

$$\frac{d}{dt} \Psi^r(t) = \left(\dot{U}^{-1}(t) U(t) - U^{-1}(t) i \mathcal{H}^{\text{lab}} U(t) \right) \Psi^r(t) . \quad (35)$$

Der Hamiltonoperator soll der Erzeuger der zeitlichen Entwicklung bleiben. Deshalb müssen wir fordern, daß seine Darstellung im rotierenden Koordinatensystem gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^r = U^{-1} \mathcal{H}^{\text{lab}} U + i \dot{U}^{-1} U . \quad (36)$$

Dies ist die allgemeine Form der Transformation des Hamiltonoperators. Zusätzlich zur üblichen Transformation eines Operators

$$U^{-1} \mathcal{H}^{\text{lab}} U$$

erhalten wir einen Korrekturterm

$$i \dot{U}^{-1} U ,$$

welcher nicht verschwindet wenn der Transformationsoperator U zeitabhängig ist.

- Er berücksichtigt die Tatsache, daß das rotierende Koordinatensystem kein Inertialsystem darstellt und kann als eine Analogie zur Corioliskraft der klassischen Mechanik gesehen werden.
- Er hängt nicht vom Hamiltonoperator ab, sondern lediglich vom Transformationsoperator U .

Wir wenden diese allgemeine Form auf den Hamiltonoperator von Gleichung (19) an und finden

$$\mathcal{H}^r = U^{-1}(t) \mathcal{H}_{\text{atom}} U(t) + U^{-1}(t) \mathcal{H}_{\text{int}} U(t) + i \dot{U}^{-1} U(t)$$

Detailrechnung

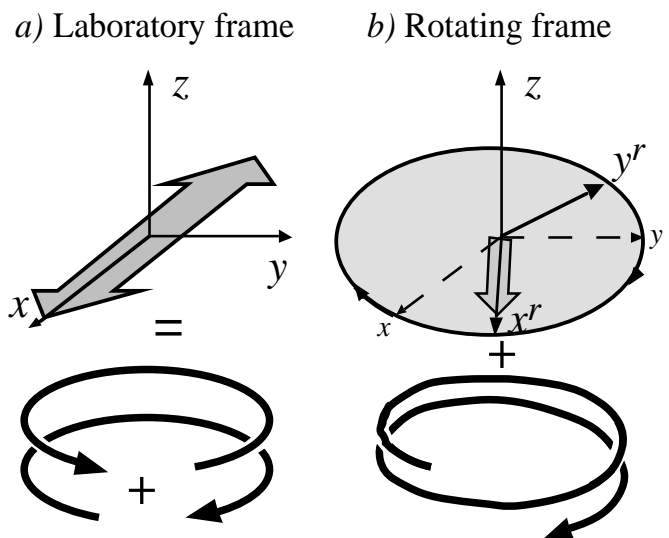
$$= -\Delta\omega_0 S_z - \omega_x S_x - \omega_x S_x \cos(2\omega_L t) - \omega_x S_y \sin(2\omega_L t) \quad (37)$$

mit

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_L \quad (38)$$

Die Wechselwirkungsenergie mit dem statischen Magnetfeld ist somit um eine Photonenenergie reduziert. Der Wechselwirkungsterm besteht aus zwei Teilen, einem zeitunabhängigen und einem zeitabhängigen Teil, der mit der doppelten Laserfrequenz um die z-Achse rotiert. Diese Aufteilung hat auch eine physikalische Interpretation: Die beiden Beiträge entsprechend den zirkular polarisierten Komponenten eines linear polarisierten Feldes..

Figur 2.11: Die Wechselwirkung zwischen einem Zweiniveaumatom und einem Laserfeld erscheint als ein oszillierendes Feld im Laborsystem, d.h. als eine Superposition zwischen zwei gegenläufig rotierenden zirkular polarisierten Feldern. Im rotierenden Koordinatensystem erscheint diejenige zirkular polarisierte Komponente, die parallel zum Koordinatensystem rotiert statisch, während die gegenläufige Komponente mit der doppelten Frequenz rotiert.



Diejenige Komponente, welche im Laborsystem in die gleiche Richtung rotiert wie das Koordinatensystem wird im rotierenden System zeitunabhängig, während die andere Komponente hier mit der doppelten Frequenz rotiert. Störungsrechnung zeigt, daß

diese gegenläufige Komponente in niedrigster Ordnung vernachlässigt werden kann, also dann wenn das Wechselfeld klein ist im Vergleich zum statischen Feld. Diese Näherung ist die direkte Analogie zur Vernachlässigung derjenigen Terme des Jaynes-Cummings Operators, die nicht energieerhaltend sind, also z.B. denjenigen Term, der gleichzeitig das Atom anregt und ein Photon erzeugt.

Der Hamiltonoperator für das rotierende Koordinatensystem wird dann

$$\mathcal{H}^r \approx -\Delta\omega_0 S_z - \omega_x S_x \quad (39)$$

Diese Näherung, bei der wir die gegenläufig rotierende Komponente vernachlässigt haben, wird als „Rotating wave approximation“ bezeichnet. In zweiter Ordnung erzeugt die gegenläufige Komponente eine Verschiebung der Resonanzfrequenz um den Betrag

$$\omega_x^2/(4\omega_L),$$

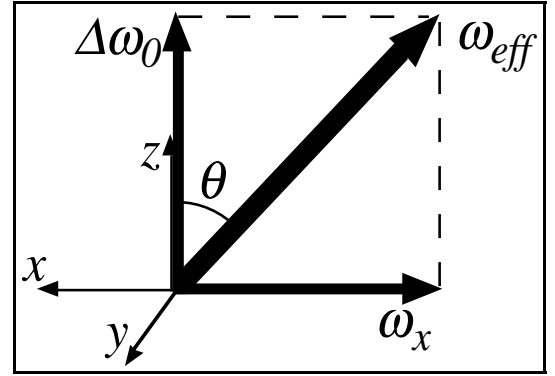
welche in der magnetischen Resonanz als Bloch-Siegert shift bezeichnet wird (F. Bloch and A. Siegert, *Magnetic resonance for nonrotating Fields*, Phys. Rev. 57, 522-527 (1940).) und in der Laserspektroskopie als dynamischer Stark-Effekt. Dieser nichtresonante Effekt skaliert invers proportional zur Resonanzfrequenz und direkt proportional mit der Intensität. Er ist vor allem dann wichtig wenn bei hohen Intensitäten mit hoher Auflösung gearbeitet wird.

Rein mathematisch gesehen ist die Transformation ins rotierende System wie wir sie oben definiert haben nicht eindeutig, da die Laserfrequenz ω_L positives oder negatives Vorzeichen haben kann. Physikalisch hingegen ist nur diejenige Variante sinnvoll, bei der die verbleibende longitudinale Komponente $\Delta\omega_0$ minimiert wird. Dies bedeutet daß das Koordinatensystem bezüglich dem Laborsystem in die gleiche Richtung rotiert wie der Pseudospin unter dem Einfluß des internen Hamiltonoperators. Im rotierenden Koordinatensystem präzediert der Pseudospin ebenfalls, aber mit einer reduzierten Frequenz $\Delta\omega_0$, die gegenüber der Präzessionsfrequenz im Laborsystem um die Laserfrequenz reduziert wurde. Diese Frequenz kann auch verschwinden oder negativ werden.

2.7 Geometrische Analyse

Das Feynman-Vernon-Hellwarth Bild des Zweiniveausystems liefert die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Problems über rein geometrische Überlegungen, ohne eine eigentliche Diagonalisierung des Hamiltonoperators.

Figur 2.12: Richtung des effektiven Feldes.



Wie Figur 2.12 zeigt kann der Hamiltonoperator als eine Wechselwirkung mit einem effektiven Feld interpretiert werden, dessen Komponenten entlang der x- und z-Achse orientiert sind. In Frequenzeinheiten ist die z-Komponente durch die Frequenzverstimmung $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_L$ gegeben und die x-Komponente ω_x entspricht der Wechselwirkung zwischen dem atomaren Dipolmoment und dem Laserfeld. Das effektive Feld ω_{eff} , die Vektorsumme der beiden Komponenten, liegt in der xz Ebene, unter einem Winkel

$$\theta = \tan^{-1} (\omega_x / \Delta\omega_0) \quad (42)$$

von der z-Achse. Dies ist der gleiche Mischwinkel wie wir im Falle des Jaynes-Cummings Modells gefunden hatten. Die Stärke dieses Feldes ist

$$\omega_{eff} = (\Delta\omega_0^2 + \omega_x^2)^{1/2}, \quad (43)$$

wie Figur 2.12 zeigt.

Um dieses System in die Eigenbasis zu bringen rotieren wir die Quantisierungsachse in die Richtung von ω_{eff} ,

$$\mathcal{H}^d = e^{i\theta S_y} \mathcal{H}^r e^{-i\theta S_y} = -\omega_{eff} S_z' \quad (44)$$

Die beiden Exponentialoperatoren rotieren die Quantisierungsachse des Hamiltonoperators um einen Winkel θ von der z-Achse in die Richtung des effektiven Feldes. Der obere Index d zeigt an, daß der Hamiltonoperator in dieser Basis diagonal ist.

2.8 Eigenwerte und Eigenvektoren

In dieser Basis ist der Hamiltonoperator diagonal und wir finden für die Eigenwerte

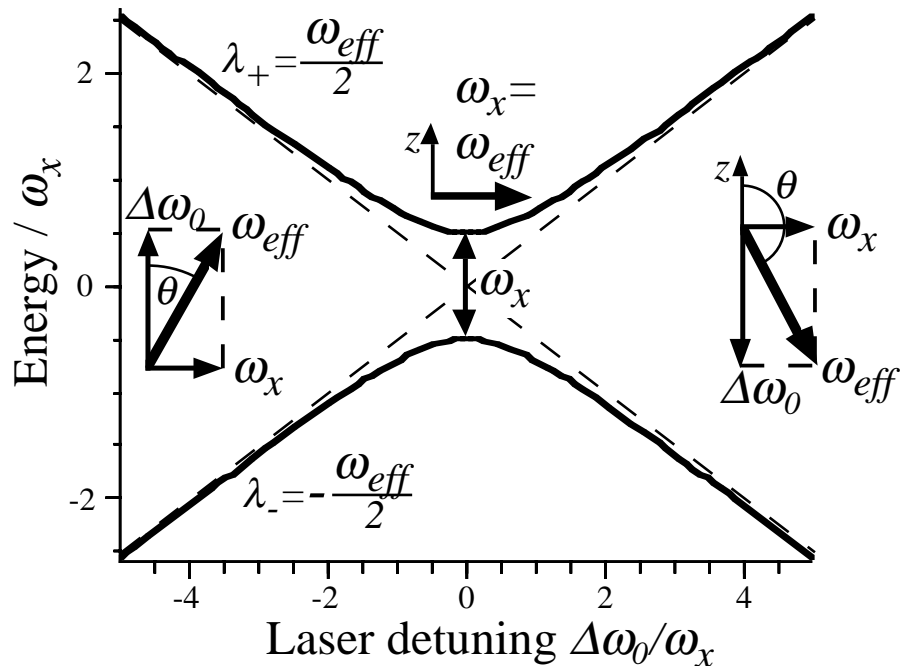
$$\lambda_{\pm} = \pm 1/2 \omega_{eff} = \pm 1/2 (\omega_x^2 + \Delta\omega_0^2)^{1/2}. \quad (45)$$

Die Eigenvektoren sind parallel, resp. antiparallel zur Richtung des effektiven Feldes. In der Basis des rotierenden Koordinatensystems ist ihre Darstellung

$$\xi_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \xi_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Diese Zustände sind Superpositionszustände zwischen Grund- und angeregtem Zustand. In einem quantenmechanischen Bild ist das Photon aufgrund der Wechselwirkung teilweise an das Atom gebunden, aber es wird nicht vollständig absorbiert. Man bezeichnet diese Zustände häufig als „dressed states“, also bekleidete Zustände, in Analogie zur Situation die wir beim Jaynes-Cummings Modell diskutiert haben. Die Energie dieses Zustandes hängt nicht nur vom internen Hamiltonoperator des Atoms, sondern auch von der Frequenz und der Amplitude des Laserfeldes ab.

Figur 2.13: Energie der bekleideten Zustände als Funktion der Laserverstimmung. Die gestrichelten Linien zeigen den Verlauf für den Fall verschwindender Kopplungsstärke. Die kleinen Bilder zeigen die Richtung des effektiven Feldes für unterschiedliche Laserverstimmungen.



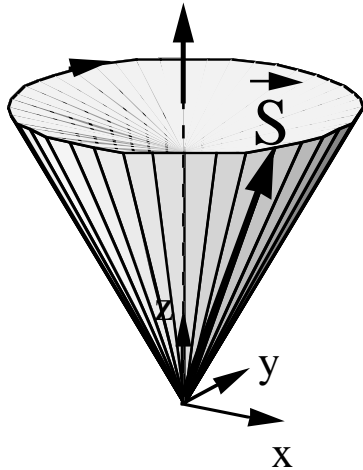
Figur 2.13 zeigt die Abhängigkeit der Energien der bekleideten Zustände von der Laserfrequenz. Die Wechselwirkung mit dem äußeren Feld ist offensichtlich dann am stärksten wenn dieses resonant ist, also dann wenn die beiden Zustände in der Abwesenheit eines Feldes entartet wären. Dieser Fall wird durch die gestrichelten Linien markiert. Die Einfügungen zeigen die Richtung des effektiven Feldes für negative, verschwindende, und positive Laserverstimmung.

Die doppelten Pfeile markieren ein verhindertes Überkreuzen der Zustände aufgrund der Kopplung an das Feld. An diesem Punkt besteht das Feld lediglich aus der x-Komponente ω_x und der Mischwinkel θ wird $\pi/2$. Die Eigenzustände sind dann Linearkombinationen mit identischem Gewicht. Für zunehmende Laserverstimmung nähern sich die bekleideten Zustände den nackten Basiszuständen an. Der Unterschied zwischen den ungekoppelten Zuständen und den bekleideten Zuständen wird durch den Mischwinkel θ parametrisiert, welcher von 0 bis π zunimmt wenn die Verstimmung von links nach rechts zunimmt. Die Abhängigkeit der bekleideten Zustände von der Laserverstimmung ist ähnlich wie diejenige, die wir beim Jaynes-Cummings Modell diskutiert hatten.

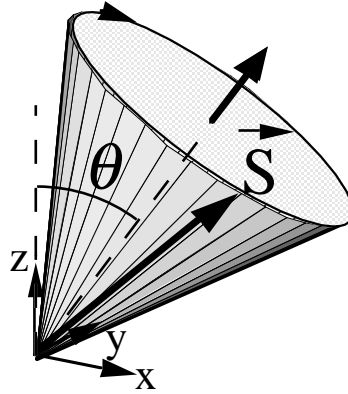
Die zeitliche Entwicklung des Systems ist damit beinahe trivial. Wie wir beim freien Atom gesehen hatten erhalten wir in einem statischen Feld eine Präzessionsbewegung des Spinvektors um dieses Feld. Dies entspricht aber gerade der jetzigen Situation. Das Feld

ω_{eff} ist hier um den Winkel θ von der z-Achse geneigt, so daß die Präzessionsbewegung um diese Richtung erfolgen muß.

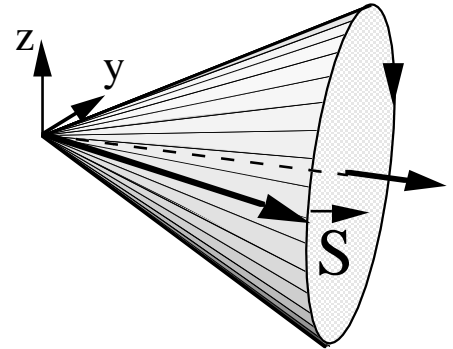
a) $\Delta\omega_0 \neq 0$
 $\omega_x = 0$



b) $\Delta\omega_0 \neq 0$
 $\omega_x \neq 0$



c) $\Delta\omega_0 = 0$
 $\omega_x \neq 0$



Die Anfangsbedingungen bestimmen die Details dieser Präzessionsbewegung.

2.9 Relaxation

Für die Berechnung der Zeitabhängigkeit und des Gleichgewichtszustandes des Systems müssen wir auch die Relaxationsprozesse berücksichtigen. Darunter faßt man alle Prozesse zusammen, die nicht im Hamiltonoperator enthalten sind. Wir gehen hier nicht auf die physikalischen Hintergründe ein, sondern beschreiben sie mit Hilfe der beiden phänomenologischen Parameter Γ_1 und Γ_2 (siehe Figur 2.14).

Figur 2.14: Relaxationsraten Γ_1 , Γ_2 für ein Zweiniveuaatom: Γ_1 beschreibt den Populationsübertrag, Γ_2 , die Relaxation der Kohärenz.

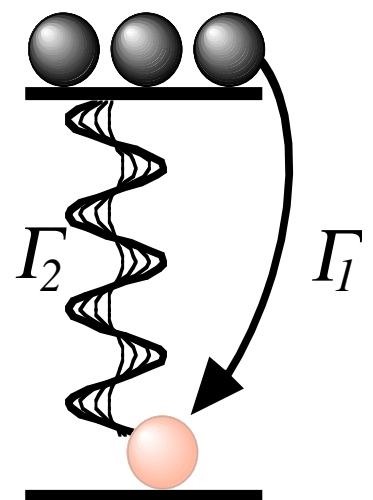
Γ_1 ist die reziproke Lebensdauer des angeregten Zustandes und beschreibt den Transfer von Population vom angeregten Zustand zum Grundzustand

$$\dot{\rho}_{11} = -\dot{\rho}_{22} = \Gamma_1 \rho_{22} .$$

Mit der Pseudospin Komponente

$$s_z = (\rho_{11} - \rho_{22}) = ((1 - \rho_{22}) - \rho_{22}) = 1 - 2\rho_{22}$$

erhalten wir



$$\rho_{22} = (1-s_z)/2 .$$

Damit wird der Beitrag von Γ_1 zur Bewegungsgleichung

$$\dot{s}_z = \dot{\rho}_{11} - \dot{\rho}_{22} = 2 \Gamma_1 \rho_{22} = \Gamma_1(1-s_z) . \quad (47)$$

In freien Atomen wird dieser Prozeß durch die spontane Emission getrieben, aber die Wechselwirkung mit der Umgebung kann ebenfalls zu Relaxationsprozessen führen. Darunter fallen z.B. die Wechselwirkung mit anderen Atomen oder räumliche Bewegungen, wie z.B. Phononen in Festkörpern.

Die transversalen Komponenten zerfallen mit der Rate Γ_2

$$\dot{s}_x = -\Gamma_2 s_x \quad \dot{s}_y = -\Gamma_2 s_y , \quad (48)$$

welche ebenfalls einen Beitrag der spontanen Emission beinhaltet. In freien Atomen beträgt die transversale Relaxationsrate die Hälfte der longitudinalen Rate, $\Gamma_2 = \Gamma_1/2$. Zusätzliche Beiträge stammen von der Wechselwirkung mit der Umgebung. Da bei der Relaxation der transversalen Komponenten keine Energieübertragung erfolgt, sind diese Prozesse meist effizienter als für die Populationen, so daß die transversale Relaxationsrate meistens größer ist als die longitudinale, $\Gamma_2 > \Gamma_1$. Insbesondere führen auch inhomogene Wechselwirkungen wie der Dopplerschift zum Zerfall der Kohärenz.

Um die vollständige Lösung zu erhalten schreiben wir die Schrödingergleichung als

$$\dot{\rho} = -i[\mathcal{H}, \rho] = -i[-\Delta\omega_0 S_z - \omega_x S_x, s_x(t) S_x + s_y(t) S_y + s_z(t) S_z] . \quad (49)$$

Wenn wir zusätzlich die Relaxationsprozesse berücksichtigen erhalten wir die folgenden Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten des Dichteoperators:

$$\begin{aligned} \dot{s}_x &= \Delta\omega_0 s_y - \Gamma_2 s_x \\ \dot{s}_y &= -\Delta\omega_0 s_x + \omega_x s_z - \Gamma_2 s_y \\ \dot{s}_z &= -\omega_x s_y + \Gamma_1(1-s_z) . \end{aligned} \quad (50)$$

Diese Bewegungsgleichung für das quantenmechanische Zweiniveausystem war von Felix Bloch untersucht worden, als er die magnetische Resonanz von Spin-1/2 Systemen betrachtete (F. Bloch, *'Nuclear induction'*, Phys. Rev. 70, 460-485 (1946).). In der optischen Spektroskopie sind die entsprechenden Gleichungen als die optischen Blochgleichungen bekannt (L. Allen and J.H. Eberly, *'Optical resonance and two-level atoms'*, Dover Publications, Mineola, NY (1987).).

Die Relaxationsraten definieren eine natürliche Frequenzskala für das System. Es ist deshalb manchmal nützlich, die Bewegungsgleichungen in skalierten, dimensionslosen Frequenzen zu schreiben. Wir schreiben

$$\delta = \Delta\omega_0/\Gamma_2 \text{ und } \kappa = \omega_x/\Gamma_2,$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \dot{s}_x &= \Gamma_2(\delta s_y - s_x) \\ \dot{s}_y &= \Gamma_2(-\delta s_x - \kappa s_z - s_y) \\ \dot{s}_z &= \Gamma_2(\kappa s_y - (\Gamma_1/\Gamma_2)(s_z-1)). \end{aligned} \quad (51)$$

2.10 Stationäre Lösung

Gleichung (51) hat die folgende stationäre Lösung:

Detailrechnung

$$(s_x, s_y, s_z)_\infty = (1/(1+\delta^2+\kappa^2\Gamma_2/\Gamma_1)) (\delta \kappa, \kappa, 1 + \delta^2). \quad (52)$$

Mit dimensionsbehafteten Größen erhalten wir dafür

$$(s_x, s_y, s_z)_\infty = 1/(\Gamma_2^2 + \Delta\omega_0^2 + \omega_x^2\Gamma_2/\Gamma_1) (\Delta\omega_0 \omega_x, \omega_x \Gamma_2, \Gamma_2^2 + \Delta\omega_0^2). \quad (53)$$

In freien Atomen beträgt die transversale Relaxationsrate die Hälfte der longitudinalen. In diesem Fall vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$(s_x, s_y, s_z)_\infty = 1/(\Gamma_1^2 + 4 \Delta\omega_0^2 + 2 \omega_x^2) (4\Delta\omega_0 \omega_x, 2\omega_x \Gamma_1, \Gamma_1^2 + 4\Delta\omega_0^2). \quad (54)$$

Wie bei der Diskussion des Lorentz-Lorenz Modells diskutiert beschreiben die transversalen Komponenten zu Absorption, resp. Dispersion des Mediums.

Eine weitere Form erhält man als Funktion des Sättigungsparameters

$$s = \frac{2\omega_x^2}{\Gamma_1^2 + 4\Delta\omega_0^2} \quad (55)$$

Damit wird der stationäre Zustand

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}_\infty = \frac{s}{1+s} \begin{pmatrix} 2 \Delta\omega_0 / \omega_x \\ \Gamma_1 / \omega_x \\ 1/s \end{pmatrix} \quad (56)$$

Der dimensionslose Sättigungsparameter ist ein Maß für die Anzahl Atome im angeregten Zustand. Für $s=1$ verringert sich die longitudinale Komponente auf $1/2$, so daß ein Viertel der Atome sich im angeregten Zustand befinden. Für freie Atome wird dieser Wert erreicht wenn

$$\kappa^2 = 2(1+\delta^2) \quad (57)$$

oder

$$\omega_x^2 = 1/2 \Gamma_1^2 + 2 \Delta\omega_0^2. \quad (58)$$

Für noch höhere Intensität nimmt die Populationsdifferenz weiter ab, doch sie verschwindet erst für unendlich hohe Intensität. Für alle endlichen Intensitäten bleibt die Population des angeregten Zustandes unter derjenigen des Grundzustandes.

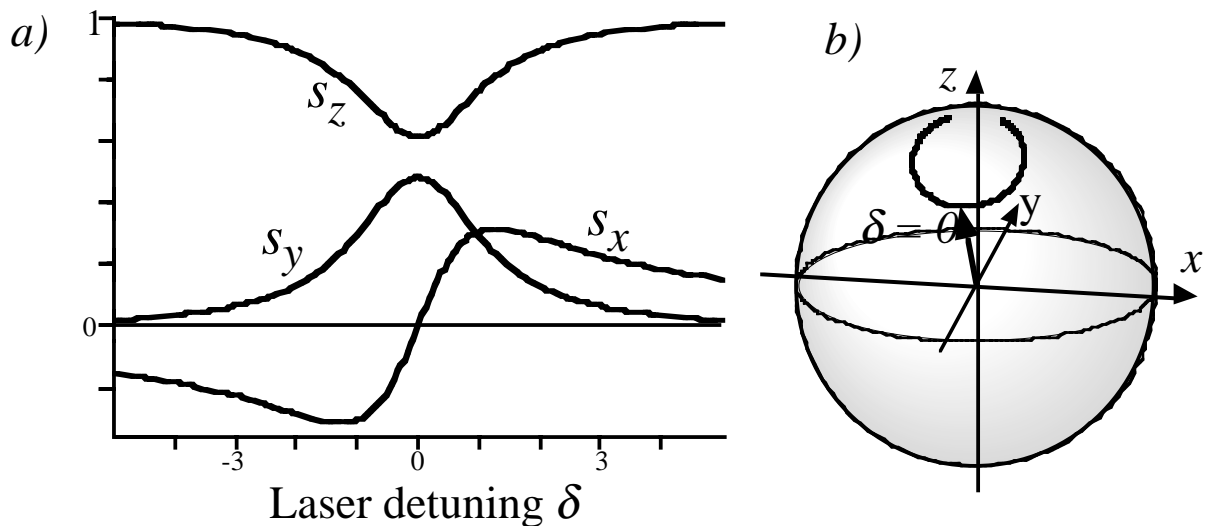
Eine weitere interessante Größe ist die Rate r , mit der Photonen gestreut werden. Wir berücksichtigen hier nur die spontane Emission aus dem angeregten Zustand. Die Zahl der Atome im angeregten Zustand beträgt

$$\rho_{22} = 1/2(1-s_{z\infty})$$

Diese multiplizieren wir mit der spontanen Emissionsrate Γ_1 und erhalten

$$r = 1/2(1-s_{z\infty}) \Gamma_1 = (\kappa^2 \Gamma_2 / 2(1+\delta^2 + \kappa^2 \Gamma_2 / \Gamma_1)) = (\omega_x^2 \Gamma_2 / 2(\Gamma_2^2 + \Delta\omega_0^2 + \omega_x^2 \Gamma_2 / \Gamma_1)). \quad (59)$$

Energieerhaltung erfordert daß diese Rate auch die Rate ist, mit der Photonen aus dem Laserstrahl entfernt werden, d.h. mit der sie absorbiert werden. Die Abhängigkeit von der Laserverstimmung $\Delta\omega_0$ zeigt das bekannte Lorentz-Linienprofil der Breite Γ_2 . Der dritte Term im Nenner beschreibt den Effekt einer Leistungsverbreiterung, also einer Verbreiterung der Resonanzlinie bei hohen Leistungen.



Figur 2.15: Stationäre Lösung der Bewegungsgleichung eines Zweiniveausystems als Funktion der normierten Laserverstimmung δ . a) die drei Komponenten als Funktion der Verstimmung. b) Der stationäre Zustand auf der Resonanz ($\delta=0$, Pfeil) und als Funktion der Verstimmung (durchgezogene Linie) auf der Einheitskugel.

Figur 2.15 zeigt die Abhängigkeit der drei Komponenten des Pseudospins von der Laserverstimmung. Die linke Seite stellt das Verhalten der drei Komponenten einzeln dar. Die rechte Seite zeigt das Verhalten der drei Komponenten in Vektorform auf der Einheitskugel. Der Pfeil zeigt den Gleichgewichtszustand auf der Resonanz als Funktion der Laserverstimmung (Kurve). Die transversalen Komponenten beschreiben Absorption und Dispersion des Mediums. Im Grenzfall geringer Intensität ($s \rightarrow 0$), sind diese Resultate identisch wie diejenigen der Lorentz-Lorenz Theorie. die z-Komponente, welche die Populationsdifferenz darstellt, strebt für große Verstimmung gegen 1, was zeigt, daß sich die Atome dann hauptsächlich im Grundzustand aufhalten. In der Nähe der Resonanz hingegen nimmt die Population des angeregten Zustandes mit zunehmender Laserintensität zu.