

5. Realität und Lokalität der Quantenmechanik

5.	Realität und Lokalität der Quantenmechanik	1
5.1	Die Unvollständigkeit der Quantenmechanik	2
5.1.1.	Einsteins Forderungen an physikalische Theorien	2
5.1.2.	Ist die Quantenmechanik realistisch?	2
5.1.3.	Realität von Ort und Impuls	3
5.1.4.	EPR für Drehimpulskomponenten	4
5.1.5.	Diskussion	5
5.1.6.	Verborgene Variablen	6
5.1.7.	Ein Modell für verborgene Variablen	7
5.2	Bell's Ungleichungen	9
5.2.1.	Bell's Theorem	9
5.2.2.	Die Bell'schen Ungleichungen	10
5.2.3.	Vergleich mit der Quantenmechanik	12
5.2.4.	Experimente	12
5.2.5.	Korrelierte Photonenpaare	14
5.2.6.	Diskussion der Experimente	14

5.1 Die Unvollständigkeit der Quantenmechanik

5.1.1 Einsteins Forderungen an physikalische Theorien

Dass Einstein mit der Quantenmechanik nicht zufrieden war ist hinlänglich bekannt, besonders seine Hoffnung "Gott würfeln nicht", aber auch die Klage in einem Brief an Max Born "Der Gedanke dass ein einem Strahl ausgesetztes Elektron aus freiem Entschluss den Augenblick und die Richtung wählt in die es fortspringen will ist mir unerträglich. Wenn schon, dann möchte ich lieber Schuster oder gar Angestellter in einer Spielbank sein als Physiker". Er versuchte dieses Unbehagen in wissenschaftliche Form zu bringen. Die berühmteste daraus resultierende Publikation ist diejenige mit Podolsky und Rosen (A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, 'Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete?', Phys. Rev. 47, 777 (1935)). Die Originalarbeit ist sehr einfach zu lesen, doch gibt es auch populärwissenschaftliche Erläuterungen dazu, z.B. (B. d'Espagnat, 'The quantum theory and reality', Scientific American Nov. 1979, 128-140 (1979); A. Shimony, 'The reality of the quantum world', Scientific American Jan. 1988, 46-53 (1988)).

Das Grundpostulat, welches hinter dem Titel steht, ist dass jede Theorie nur dann vollständig ist, wenn sie für jedes Element der physikalischen Realität eine Entsprechung besitzt. Ein Element der physikalischen Realität ist für eine physikalische Größe gemäß EPR dann vorhanden wenn es möglich ist, sie mit Sicherheit vorherzusagen ohne das System zu stören.

5.1.2 Ist die Quantenmechanik realistisch?

In der Quantenmechanik enthält die Zustandsfunktion Ψ , respektive der Dichteoperator ρ alle Information, welche über das System vorhanden ist. Befindet sich ein Teilchen im Eigenzustand eines Operators A ,

$$A \Psi = a_i \Psi ,$$

wobei a_i einen Eigenwert von A darstellt, so würde jede Messung von A den Wert a_i ergeben. Gemäß obiger Definition existiert demnach ein 'Element von physikalischer Realität', welche der Größe A entspricht. Gemäß EPR ist es dabei unerheblich ob die Messung wirklich durchgeführt wird oder nicht.

Falls sich das System nicht in einem Eigenzustand von A befindet, eine Messung also kein scharfes Resultat liefert, so würde dieser Größe keine physikalische Realität entsprechen. Als ein konkretes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$\Psi(x) = e^{ip_0x/\hbar} .$$

Offenbar ist dies eine Eigenfunktion des Impulsoperators zum Eigenwert p_0 und ist deshalb über den ganzen Raum verteilt. Gemäß obiger Definition beschreibt diese

Funktion ein Element physikalischer Realität in Bezug auf den Impuls, nicht aber bezüglich des Ortes des entsprechenden Teilchens.

Da eine Zustandsfunktion nie gleichzeitig eine Eigenfunktion von nicht vertauschenden Variablen, wie z.B. Ort und Impuls sein kann, existiert somit kein quantenmechanischer Zustand, der gleichzeitig Elemente der Realität für Ort und Impuls beschreibt. Daraus folgt:

- (i) Die quantenmechanische Beschreibung, welche durch die Zustandsfunktion gegeben wird, ist nicht vollständig.
- oder
- (ii) Wenn die Operatoren, welche zwei physikalische Größen beschreiben, nicht vertauschen, so können die entsprechenden Größen nicht gleichzeitig physikalischen Realitäten entsprechen.

5.1.3. Realität von Ort und Impuls

Um diese beiden Möglichkeiten zu untersuchen, wollten EPR zunächst abklären ob Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig Elemente der Realität bilden können, d.h. ob es möglich sei, das Ergebnis entsprechender Messungen mit Sicherheit vorherzusagen ohne das System zu stören.

Dafür betrachteten Sie ein System, in dem das zu diskutierende Teilchen für eine gewisse Zeit an ein anderes Teilchen gekoppelt war, sodass sich Korrelationen zwischen den beiden Teilchen entwickeln konnten. Nach der Kontaktzeit werden die beiden Systeme getrennt, sodass keine Wechselwirkung mehr möglich war. Speziell betrachteten sie einen korrelierten Zustand

Z: Teilchenpaar

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 - x_2)p/\hbar} dp .$$

Die beiden Teilchen bewegen sich somit auseinander.

Wird zu einem Zeitpunkt, an dem sich die beiden Teilchen weit genug voneinander entfernt haben, an Teilchen 1 eine Impulsmessung durchgeführt, so tritt in der Kopenhagener Interpretation eine Zustandsreduktion auf. Danach muss das Teilchen 1 in einem Eigenzustand des Impulsoperators sein, d.h.

$$\Psi(x_1, x_2) = e^{-ix_2 p/\hbar} e^{ix_1 p/\hbar} .$$

Offenbar ist somit das Teilchen 2 gleichzeitig in einem Eigenzustand des Impulses mit Eigenwert $-p$. Somit kennen wir nach einer Messung des Impulses von Teilchen 1 exakt den Impuls des Teilchens 2, ohne dieses gestört zu haben.

Wenn wir am Teilchen 1 statt einer Impulsmessung eine Ortsmessung durchführen so zwingen wir das System in den Zustand

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_2 - x) \delta(x_1 - x) dx .$$

In diesem Fall ist das Teilchen 2 somit in einem Eigenzustand des Ortsoperators, d.h. wir kennen exakt seinen Ort, ohne dass eine Wechselwirkung mit ihm stattgefunden hätte.

Für den gewählten Anfangszustand des Systems kann man somit jede der beiden Variablen messen, ohne das System zu stören. Da es gemäß EPR nicht relevant ist ob diese möglichen Messungen wirklich durchgeführt werden entspricht gemäß obiger Definition beiden Variablen ein 'Element physikalischer Realität'. Da Ort und Impuls nicht vertauschen existiert aber keine Zustandsfunktion, die gleichzeitig Eigenfunktion beider Observablen ist. Somit gibt es keinen Zustand der beide Elemente der Realität beschreibt und die Quantenmechanik erfüllt das Kriterium von EPR für eine vollständige Beschreibung der Realität nicht.

5.1.4. EPR für Drehimpulskomponenten

Die bekannteste Version des EPR-Paradoxes stammt von Bohm und Aharonov (D. Bohm, and Y. Aharonov, "Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky", Phys. Rev. 108, 1070-1076 (1957).) Sie folgt den gleichen Weg, betrachtet aber statt Ort und Impuls eines Teilchens zwei verschiedene Spinkomponenten. Der Vorteil dieses Schemas liegt darin, dass es besser für experimentelle Überprüfungen geeignet ist.

Um die Beweisführung zu verstehen, benötigen wir zunächst eine Beschreibung von Singulett Zuständen. Grundsätzlich benutzt man diesen Ausdruck für quantenmechanische Zustände von Systemen mit einem Spin $S=0$, also isotrope Zustände. Für das EPR-Paradox benötigen wir Singulett Zustände von Systemen aus zwei Spin-1/2 Teilchen,

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\beta\rangle - |\beta\alpha\rangle) .$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, verschwindet der Erwartungswert für eine beliebige Spin-Komponente $S_{1\eta} + S_{2\eta}$ für diesen Zustand,

$$S_{\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = x, y, z \quad .$$

Dieses Resultat gilt nicht nur für den Mittelwert eines Ensembles, sondern für jede einzelne Messung: da der Gesamtspin dieses Systems verschwindet, kann keine ideale Messung jemals ein Resultat ergeben, das von Null abweicht.

Wenn wir ein einzelnes Teilchen betrachten handelt es sich um Spin-1/2 Teilchen. Somit muss jede Messung entweder den Wert +1/2 oder -1/2 ergeben. Da der Gesamtdrehimpuls durch die Summe der Drehimpulse der einzelnen Teilchen gegeben ist muss jedoch die Summe der Messungen an Komponenten beider Teilchen verschwinden:

$$S^{(1)}_{\alpha} + S^{(2)}_{\alpha} = 0 ; \quad \alpha = (x, y, z)$$

Dies bedeutet dass die Resultate von Messungen an den beiden Teilchen eines Paares zu 100% antikorreliert sind. **Z: Antikorrelation**

Wir setzen auch hier voraus dass die beiden Teilchen räumlich so weit getrennt sind, dass eine Messung an einem Teilchen das andere Teilchen nicht beeinflussen kann. Damit eröffnet die Antikorrelation der beiden Teilchen die Möglichkeit, aus der Messung einer Spinkomponente an einem Teilchen die selbe Spinkomponente des anderen Teilchens mit Gewissheit zu bestimmen ohne das andere Teilchen zu beeinflussen.

Da es dem Experimentator freigestellt ist, welche der verschiedenen Spinkomponenten er messen will, müssten wir somit allen drei Komponenten eine 'physikalische Realität' zugestehen. Andererseits wissen wir aber, dass die Quantenmechanik keine scharfen Erwartungswerte für alle drei Komponenten liefern kann.

Experimentell können solche korrelierten Paare von Spin-1/2 Teilchen am besten in der Form von Photonen erzeugt werden.

Eine Möglichkeit sind Annihilationsreaktionen, wie z.B. e^+e^- Annihilation. Dabei werden zwei Photonen (γ -Quanten) mit entgegengesetztem Impuls und orthogonaler Polarisation (z.B. σ_+/σ_-) erzeugt. **Z: Annihilation**

Eine andere Möglichkeit bieten sogenannte atomare Kaskaden, bei denen praktisch gleichzeitig Photonen im sichtbaren Spektralbereich freigesetzt werden. Durch geeigneter Wahl der beteiligten Zustände (z.B. $J=0 \rightarrow J=1 \rightarrow J=0$) kann wiederum sichergestellt werden, dass die beiden Photonen orthogonal polarisiert sind. **Z: Atomare Kaskade**

5.1.5. Diskussion

Die Tatsache dass man das Resultat einer einzelnen Messung z.B. einer Drehimpulskomponente an einem Teilchen nicht mit Sicherheit voraussagen kann was schon vor EPR bekannt.

Wenn der Spin vor der Messung senkrecht zur Messrichtung orientiert ist, kann man sich **Z: Stern-Gerlach für \perp Spin**

vorstellen, dass der Messapparat das Teilchen in eine der beiden möglichen Orientierungen 'zwingt', wobei die resultierende Ausrichtung von Details der Messapparatur abhängen, die der Experimentator nicht kontrollieren kann.

Diese Interpretationsmöglichkeit erklärt aber nicht die Korrelation von zwei Teilchen bei gleichzeitigen Messungen an beiden Teilchen. Die Rückwirkung des Messapparates 1 auf das gemessene Teilchen 1 kann gemäß Voraussetzung das zweite Teilchen nicht beeinflussen. Die möglichen Erklärungen sind damit praktisch auf verborgene Variablen reduziert.

Da die Probleme nur auftreten wenn die beiden Teilchen weit voneinander entfernt sind, hat Einstein auch die Möglichkeit in Betracht gezogen, dass die Quantenmechanik nicht mehr gilt, wenn der Abstand zu groß ist. Diese Interpretation würde allerdings voraussetzen, dass gleichzeitige Messungen einer Spinkomponente bei großen Distanzen nicht mehr vollständig antikorreliert sind und steht damit im Widerspruch zu experimentellen Beobachtungen.

Ob es eine übergeordnete Theorie gibt, welche diese Entsprechung enthält und aus der die Quantenmechanik hergeleitet werden kann, ist damit nicht entschieden. EPR sagen dazu:

"Während wir somit gezeigt haben, dass die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung der Realität liefert, lassen wir die Frage offen, ob eine solche Beschreibung existiert oder nicht. Wir glauben jedoch dass eine solche Theorie möglich ist".

Eine erste Antwort auf das EPR Paper kam von Bohr (N. Bohr, '*Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*', Phys. Rev. **48**, 696-702 (1935)). Er erläuterte insbesondere das Prinzip der Komplementarität und betonte, dass die Quantenmechanik nur die Wechselwirkung von mikroskopischen Systemen mit makroskopischen Apparaten beschreibe und nicht den intrinsischen Charakter. Quantenmechanische Beschreibungen müssen deshalb immer auch den experimentellen Aufbau einbeziehen. Dadurch würden solche scheinbaren Inkonsistenzen gelöst.

5.1.6. Verborgene Variablen

Ein Versuch, das EPR Problem zu lösen, der wohl von EPR selber vorgesehen war, ist eine Theorie mit "verborgenen Variablen". Darunter kann man sich Variablen vorstellen, welche bisher nicht bekannt sind, aber den Ausgang der Messung bestimmen. Falls die Quantenmechanik durch verborgene Variablen ergänzt werden könnte wäre die Zustandsfunktion Ψ ein Ensemble darstellen, welches durch die Präparation definiert ist.

Jedes Element dieses Ensembles wäre im Rahmen einer solchen Theorie durch Variablen v charakterisiert, welche für alle Messungen von einzelnen Observablen oder Gruppen von vertauschenden Observablen A, B, C, \dots bestimmen, welche Werte erhalten werden.

Z: verborgene Variablen

Die Theorie müsste natürlich sicherstellen, dass die Verteilung der einzelnen Messresultate mit der Voraussage der Quantenmechanik übereinstimmt.

Von Neumann hatte schon 1932, also vor dem Erscheinen des EPR Papers, scheinbar bewiesen, dass verborgene Variablen keine Möglichkeit waren, die Quantenmechanik zu einer vollständigen, deterministischen Theorie zu machen. Allerdings zeigte Grete Hermann 1935 (G. Hermann, *'Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik'*, Abhandlungen der Freis'schen Schule 6, 75-152 (1935).), dass von Neumann bei seinem Beweis einen Fehler gemacht hatte. Diese Arbeit wurde aber kaum zur Kenntnis genommen. Es folgten hingegen weitere Arbeiten, welche in ähnlicher Weise wie von Neumann "bewiesen" dass verborgene Variablen nicht mit der Quantenmechanik vereinbar waren (A.M. Gleason, *'Measures on the closed subspaces of a Hilbert space'*, J. Math. & Mech. 6, 885-893 (1957); J.M. Jauch and C. Piron, *Helv. Physica Acta* 36, 827 (1963)).

David Bohm hatte seine Interpretation der Quantenmechanik (Quantenpotential; D. Bohm, *'A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables. I'*, Phys. Rev. 85, 166-179 (1952); D. Bohm, *'A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables. II'*, Phys. Rev. 85, 180-193 (1952).) als Modell mit verborgenen Variablen bezeichnet. Er erwähnte spezifisch den Beweis von von Neumann und zeigte, dass die Einwände auf sein Modell nicht zutrafen, da seine "verborgenen Variablen" sowohl vom System wie auch vom Messapparat abhängen und somit nicht die Annahmen erfüllen, die von Neumann's über verborgene Variablen gemacht hat. Er kannte offenbar die Arbeit von Grete Hermann nicht.

5.1.7. Ein Modell für verborgene Variablen

1964 zeigte John Bell wo die Beweise von von Neumann, Gleason und Jauch und Piron fehlerhaft waren. Das Manuskript erschien allerdings erst 2 Jahre später (J. Bell, *'On the problem of hidden variables in quantum mechanics'*, Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1966).). Er entwickelte auch gleich ein Modell verborgener Variablen für einen Spin 1/2 (J.S. Bell, *'On the Einstein Podolsky Rosen paradox'*, Physics 1, 195-200 (1964).). Das Ziel eines solchen Modells besteht darin, für eine beliebige Richtung des Analysators das Resultat der Messung mit Bestimmtheit vorauszusagen, wobei das Teilchen durch seinen Zustandsvektor Ψ und zusätzliche verborgene Variablen beschrieben wird.

In einem Spin-1/2 System kann jede spurfreie Observable A als Vielfaches eines Spinoperators in die betreffende Richtung \vec{a} geschrieben werden. Somit kommen als Resultate beliebiger Messungen nur die beiden Werte $\pm|\vec{a}|$ vor. Jeder quantenmechanische Zustand $|\Psi_n\rangle$ kann außerdem als Einheitsvektor \vec{n} in eine bestimmte Richtung geschrieben werden. Der von der Quantenmechanik vorhergesagte Mittelwert für das Re-

sultat einer Messung der Observablen A (d.h. einer Spinkomponente in Richtung \vec{a}) eines Spins $|\Psi_n\rangle$ ist dann

$$\langle A \rangle = \vec{a} \cdot \vec{n}.$$

Eine Theorie verborgener Variablen muss die Resultate von einzelnen Messungen mit Sicherheit voraussagen. Außerdem muss sie für Messreihen an Ensembles die Statistik der Quantenmechanik reproduzieren.

Bei einem Spin-1/2 System ist es leicht möglich, eine solche Theorie verborgener Variablen zu konstruieren. Wir verwenden als verborgene Variable einen weiteren Einheitsvektor \vec{m} , und verwenden als Regel zur Bestimmung beliebiger Messresultate dass das Resultat einer Messung der Observablen A den Wert

$$\begin{array}{lll} +a & \text{falls} & (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} > 0 \\ -a & \text{falls} & (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} < 0 \end{array}$$

annehmen soll.

Mit geometrischen Argumenten oder mit Integration über eine gleichmäßige Verteilung läßt sich leicht zeigen dass diese Regel eine Statistik erzeugt, welche mit der Quantenmechanik übereinstimmt. Da sie zugleich vollständig deterministisch und lokal ist stellt sie genau diejenige Art von Theorien verborgener Variablen dar wie EPR sie wohl erhofft hatten.

Z: Vektoren

5.2 Bell's Ungleichungen

5.2.1. Bell's Theorem

Die Schwierigkeiten der früheren Arbeiten zu verborgenen Variablen lagen bei der Annahme der physikalischen Bedingungen an eine solche Theorie. John Bell (J.S. Bell, 'On the Einstein Podolsky Rosen paradox', Physics 1, 195-200 (1964).) ersetzte die früheren Annahmen durch die Bedingung dass die beiden Teilsysteme räumlich getrennt sein sollten, dass also die Einstellung des einen Messapparates die Ergebnisse der zweiten Messung nicht beeinflussen kann. Damit fällt die Bohm'sche Theorie nicht unter die Klasse von Theorien die Bell diskutierte. Da er für ein Spin-1/2 System gezeigt hatte dass hier lokale Theorien verborgener Variablen möglich sind, blieb nur noch die Diskussion größerer Systeme.

Für den Fall von mehr als zwei Zuständen gelang es Bell zu zeigen dass keine solchen Theorien mehr möglich sind (J. Bell, 'On the problem of hidden variables in quantum mechanics', Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1966).). Der gleiche Beweis wurde auch von Kochen und Specker erbracht (S. Kochen and E.P. Specker, 'The problem of hidden variables in quantum mechanics', J. Math. Mech. 17, 59-87 (1967).). Es existiert eine große Sekundärliteratur zu diesem Thema. Anstelle einer langen Liste soll an dieser Stelle nur auf die Arbeit (N.D. Mermin, 'Hidden variables and the two theorems of John Bell', Rev. Mod. Phys. 65, 803 (1993).) hingewiesen werden.

Als Beispiel betrachten wir das nächst komplexere System, einen Spin $S=1$. Wir verwenden die drei Operatoren

$$S_x^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & & 1/2 \\ & 1 & \\ 1/2 & & 1/2 \end{pmatrix}, \quad S_y^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & & -1/2 \\ & 1 & \\ -1/2 & & 1/2 \end{pmatrix}, \quad S_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Alle drei Operatoren vertauschen paarweise und können somit alle gleichzeitig scharf definiert sein. Es gilt aber $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S(S+1) = 2$. Da die einzelnen Operatoren jeweils den Eigenwert 0 oder 1 haben müssen, kommen als mögliche Messresultate nur die Reihen (0, 1, 1), (1, 0, 1), und (1, 1, 0) in Frage. Diese Bedingung müsste für beliebige Wahl des Koordinatensystems, d.h. für eine beliebige Kombination von drei orthogonalen Richtungen gelten.

Bell suchte nun einen Satz von Richtungen von denen er zeigen konnte, dass es nicht möglich ist, auf konsistente Weise für alle möglichen Messungen Eigenwerte zuzuweisen so dass von drei orthogonalen Vektoren immer zwei den Eigenwert 1 und einer den Eigenwert 0 erhielten. Details der Rechnung sollen hier nicht reproduziert werden, lediglich eine Skizze des Weges: Man zeigt zunächst dass für Richtungen, die weniger als 22.5° ($\tan 22.5^\circ = 1/2$) auseinander liegen, die Resultate gleich sein müssen (d.h. entweder alle = 1 oder alle = 0). Dies be-

Z: Richtungen

deutet, dass alle Resultate für Richtungen innerhalb eines Kegels von 22.5 Grad um die z-Achse identisch sein müssen. Es müssen aber auch alle Resultate, die weniger als 22.5 Grad vom Kegelmantel entfernt sind, identisch sein. Damit kann man zeigen dass alle Richtungen identische Resultate ergeben müssen. Dies ist aber wie oben gezeigt nicht möglich.

5.2.2. Die Bell'schen Ungleichungen

Ein zweites Theorem von John Bell ist wesentlich besser bekannt (J.S. Bell, 'On the Einstein Podolsky Rosen paradox', Physics 1, 195-200 (1964)). Der wesentliche Fortschritt bei seiner Arbeit war der, dass er von den lokalen Variablen nur verlangte dass sie lokal seien, d.h. dass sie gemäß der Relativitätstheorie nicht von Ereignissen beeinflusst werden können, welche raumartig entfernt sind. Allein mit dieser Voraussetzung gelingt es ihm, eine Voraussage in der Form einer Ungleichung zu machen, welche für alle Theorien dieser Art gelten muss. Diese Voraussage ist nicht vereinbar mit den Voraussagen der Quantenmechanik, was den Schluss zuläßt dass die Quantenmechanik nicht durch eine Theorie, welche nur lokale Wechselwirkungen zuläßt und den Ausgang jeder Messung exakt voraussagt (sog. realistische lokale Theorien) vollständig gemacht werden kann.

Die erwähnte Ungleichung, welche allgemein als Bell'sche Ungleichung bekannt ist, kann experimentell überprüft werden. Somit ist es möglich, experimentell zu entscheiden welche der beiden nicht vereinbaren Möglichkeiten gilt:

- 1) Die Bell'schen Ungleichungen gelten, d.h. die Physik ist lokal und realistisch.
- 2) Die Quantenmechanik ist korrekt und somit nicht gleichzeitig realistisch und lokal.

Die Möglichkeit, die Bell'schen Ungleichungen experimentell zu testen wurde vor allem von Clauser, Horne, Shimony und Holt (J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, and R.A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969).) erkannt, welche die Ungleichungen etwas in eine Form brachten, die für experimentelle Tests besser geeignet war.

Ausgangspunkt für diese Ungleichungen sind Messungen von Spin-Komponenten zweier korrelierter Teilchen. Dabei wählt man für die beiden Teilchen unterschiedliche Orientierungen der Analysatoren. Wir bezeichnen die Richtungen der beiden Achsen mit \vec{a} und \vec{b} . Für jede Orientierung kann das Teilchen den Wert +1 oder -1 annehmen (entsprechend der Polarisation \uparrow oder \rightarrow).

Z: rotierte Analysatoren

Im Rahmen einer Theorie verborgener Variablen ist der Ausgang einer solchen Messung bestimmt durch eine Funktion $A(\vec{a}, \lambda)$ für Teilchen 1 und $B(\vec{b}, \lambda)$ für Teilchen 2. λ stellt hier die verborgene(n) Variable(n) dar mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\lambda)$.

Sie sind für die beiden Teilchen i.a. korreliert, da diese früher miteinander in Kontakt waren. Wir gehen aber davon aus, dass es möglich ist, die Stellung der Analysatoren erst nach der Trennung der beiden Teilchen festzulegen, so dass die verborgenen Variablen λ unabhängig sind von den experimentellen Parametern \vec{a} und \vec{b} . Aus dem gleichen Grund soll $A(\vec{a}, \lambda)$ nicht von \vec{b} abhängen und umgekehrt. Gemäß Voraussetzung gilt für jede Einzelmessung

$$\boxed{\mathbf{Z}: \rho(\lambda)}$$

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1,$$

d.h. ± 1 sind die einzigen möglichen Messresultate.

5.2.3. Korrelationen

Wie wir gesehen hatten müssen bei identischer Orientierung der beiden Polarisatoren die Teilchen immer antikorreliert sein. Dies gilt nicht wenn die beiden Polarisatoren unterschiedlich orientiert sind.

Wir bezeichnen die Häufigkeit dafür, dass bei der Stellung \vec{a}, \vec{b} der beiden Polarisatoren beide Messungen den Wert +1 ergeben mit $P_{++}(\vec{a}, \vec{b})$, und definieren entsprechend die Größen $P_{\pm\pm}$. Da dies das Resultat einer Messung am Ensemble ist erhalten wir es durch Mittelung über die Verteilung $\rho(\lambda)$ der verborgenen Variablen. Für den Erwartungswert des Produktes gilt z.B.

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda).$$

Weiter definieren wir den Korrelationskoeffizienten

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b})$$

für die Messungen an den zwei Teilchen: es stellt die Differenz zwischen der Anzahl Resultate "parallel" minus die Häufigkeit "antiparallel" dar.

Die entscheidende Größe erhalten wir aus der Summe von vier solchen Korrelationskoeffizienten für verschiedene Achsenorientierungen. Wir definieren

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}').$$

Hier stellen \vec{a}, \vec{a}' zwei unterschiedliche Orientierungen des Analysators 1 und \vec{b}, \vec{b}' entsprechende Orientierungen des Analysators 2 dar.

$$\boxed{\mathbf{Z}: \text{Orientierungen}}$$

Ohne die Herleitung hier wiederzugeben soll das wesentliche Resultat von Bell hier gezeigt werden. Es lautet

$$-2 \leq S \leq 2,$$

unabhängig von der Wahl der Orientierung der Polarisatoren.

5.2.4. Vergleich mit der Quantenmechanik

Dass dies nicht mit allen Voraussagen der Quantenmechanik übereinstimmt sieht man am besten an einem Beispiel:

Wir betrachten als Teilchenpaar Photonen, welche durch einen polarisierenden Strahlteiler transmittiert werden. Dann lautet die Voraussage für die Korrelationskoeffizienten

Z: Polarisator

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(2\phi_{ab}),$$

Z: Korrelation

wobei ϕ_{ab} den Winkel zwischen den beiden Orientierungen \vec{a} und \vec{b} darstellt.

Wir können jetzt als Beispiel die folgenden Orientierungen betrachten:

Z: Orientierung der Polarisatoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0^\circ, & \vec{a}' &= 45^\circ, \\ \vec{b} &= 22.5^\circ, & \vec{b}' &= 67.5^\circ. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir als quantenmechanische Voraussage für S

$$S_{QM} = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}') = -\sqrt{2}/2 (1 + 1 + 1 + 1) = -2\sqrt{2} < -2.$$

Die quantenmechanische Voraussage stimmt somit nicht mit der Bell'schen Ungleichung überein.

Damit besteht ein Widerspruch zwischen der Quantenmechanik und den Voraussagen jeder möglichen Theorie mit lokalen verborgenen Variablen. Das bedeutet, dass es nicht möglich ist, die Quantenmechanik als Ensemblemittelwert einer solchen allgemeineren Theorie herzuleiten. Dies lässt uns zwei mögliche Lösungen, zwischen denen man experimentell unterscheiden kann: es ist einerseits möglich, dass die Quantenmechanik falsch ist, dass also die experimentellen Resultate in Übereinstimmung mit Bell's Ungleichung sind, oder die experimentellen Daten bestätigen die Quantenmechanik und zeigen somit, dass die angestrebte Verallgemeinerung für Einzelsysteme auf dem gewählten Weg nicht gefunden werden kann.

5.2.5. Experimente

Ein einfaches Experiment zur Unterscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten besteht darin, die gesamte Abhängigkeit von der Winkeldifferenz zwischen den beiden

Polarisatoren messen. Wichtigste Voraussetzung dafür ist eine Quelle für perfekt anti-korrelierten Photonenpaare.

Ein mögliches System wird durch Paare von Gammaquanten gegeben, welche über Positron-Annihilation erzeugt und über Compton-Streuung detektiert wurden (L.R. Kasday, J.D. Ullman, and C.S. Wu, "Angular correlation of Compton-scattered annihilation photons and hidden variables", *Nuovo Cimento* **25B**, 633- (1975).). Aus den räumlichen Korrelationen der gestreuten Photonen konnte die Polarisation berechnet werden. Die Resultate waren in Übereinstimmung mit der Quantenmechanik. Da die Abhängigkeit von der Polarisation der Photonen aber sehr schwach ist, konnte keine eindeutige Verletzung der Bell-Ungleichungen bewiesen werden.

Z: Annihilation

Dafür waren optische Photonen besser geeignet (S.J. Freedman, and J.F. Clauser, "Experimental test of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938-941 (1972); J.F. Clauser, "Experimental investigation of polarization correlation anomaly", *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1223-1226 (1976); E.S. Fry, and R.C. Thompson, "Experimental test of local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **37**, 465-468 (1976).). Die ersten wirklich überzeugenden Arbeiten wurden zu Beginn der 80er Jahre von Alain Aspect und Mitarbeitern publiziert (A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental tests of realistic local theories via Bell's Theorem", *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460-463 (1981); A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91-94 (1982); P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, "Experimental evidence for a photon-anticorrelation effect on a beam splitter: a new light on single-photon interferences", *Europhys. Lett.* **1**, 173-179 (1986).).

Um solche korrelierten Photonen zu erzeugen verwendete die Gruppe eine atomare Kaskade, d.h. ein Atom, das sich zunächst in einem doppelt angeregten Zustand befindet. Wenn der direkte Übergang in den Grundzustand verboten ist und der mittlere Zustand nur eine kurze Lebensdauer hat führt die Emission eines Photons unmittelbar zur Emission eines zweiten Photons. Haben alle drei Zustände definierten Drehimpuls so führt die Drehimpulserhaltung dazu dass der Spin und somit die Polarisation der beiden Photonen korreliert sind.

Z: atomare Kaskade

Wenn sie je durch einen Polarisator geschickt und anschließend mit einem Photonenzähler detektiert werden, findet man eine strenge Korrelation zwischen den Zählimpulsen, welche direkt den oben diskutierten Korrelationen für Spin-1/2 Teilchen entsprechen.

Z: Exp. Aufbau

Beim Experiment musste vor allem gezeigt werden, dass diese Korrelationen genau der von der Quantenmechanik vorausgesagten Abhängigkeit von der Orientierung der beiden Polarisatoren entspricht. Dabei erwartet (und beobachtet) man, dass die Korrelation nur vom relativen Winkel zwischen den beiden Polarisatoren entspricht.

F: Exp. Resultate

Weitere Experimente und experimentelle Vorschläge: J.P. Paz and G. Mahler, '*Proposed test for temporal Bell inequalities*', *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3235-3239 (1993). D.V. Strekalov, T.B.

Pittman, A.V. Sergienko, Y.H. Shih, and P.G. Kwiat, 'Postselection-free energy-time entanglement', Phys. Rev. A 54, R1-R4 (1996). S.F. Huelga, M. Ferrero, and E. Santos, 'Loophole-free test of the Bell inequality', Phys. Rev. A 51, 5008-5011 (1995). M. Czachor, 'Bell theorem without inequalities: a single-particle formulation', Phys. Rev. A 49, 2231-2240 (1994).

5.2.6. Korrelierte Photonenpaare

Korrelierte Photonen können sehr effizient mit parametrischer Konversion erzeugt werden:

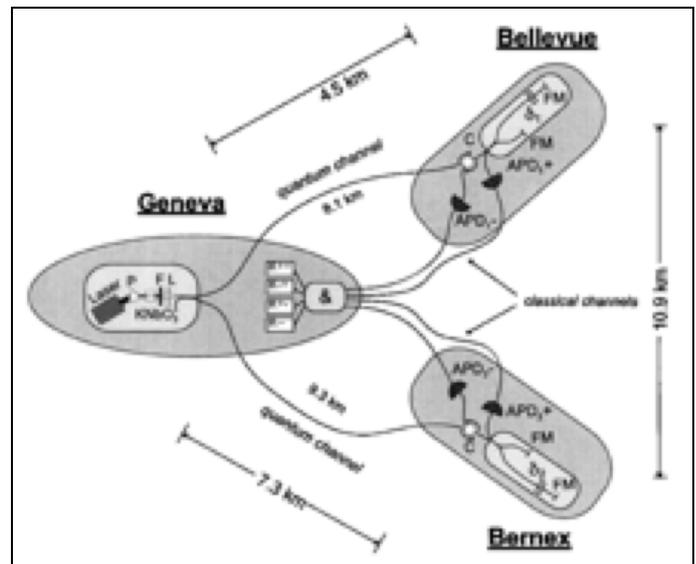
parametrische Konversion

dabei wird ein Photon in zwei Photonen geringerer Energie und Impuls aufgeteilt. Hier entstehen Korrelationen durch die folgenden Bedingungen:

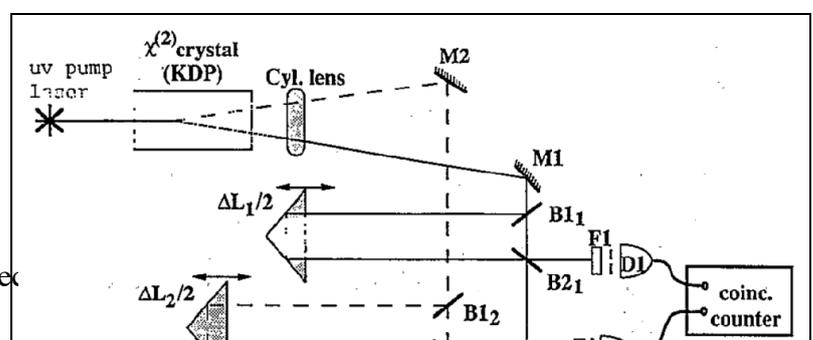
- Der Zeitpunkt der Entstehung eines Photonenpaares ist zufällig; beide sind aber exakt zur gleichen Zeit entstanden.
- Der Impuls der beiden Photonen ist zufällig. Ihre Summe muß aber genau dem Impuls des einfallenden Photons entsprechen.
- Die Energie der beiden Photonen ist zufällig. Ihre Summe muß aber genau der Energie des einfallenden Photons entsprechen.
- Der Drehimpuls, d.h. die Polarisierung der Photonen ist durch die Erhaltung des Drehimpulses bei der Konversion und die Symmetrie des Kristalls bestimmt.

Aufgrund der hohen Konversionseffizienz und der gerichteten Abstrahlung ist dies heute die Standardmethode für die Erzeugung korrelierter Photonenpaare.

Solche Photonenpaare können deshalb über große Distanzen nichtklassische Korrelationen zeigen (W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, 'Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart', Phys. Rev. Lett. 81, 3563-3566 (1998)).



Außerdem kann man den Aufbau so wählen kann dass unterschiedliche Paare von konjugierten Variablen relevant sind. Anstelle von Ort / Impuls oder or-



5) Die Unvollständigkeit der Quantenmechanik

thogonalen Drehimpulskomponenten kann man z.B. auch das Paar Energie / Zeit diskutieren (P.G. Kwiat, A.M. Steinberg, and R.Y. Chiao, '*High-visibility interference in a Bell-inequality experiment for energy and time*', Phys. Rev. A 47, R2472-R2475 (1993).).

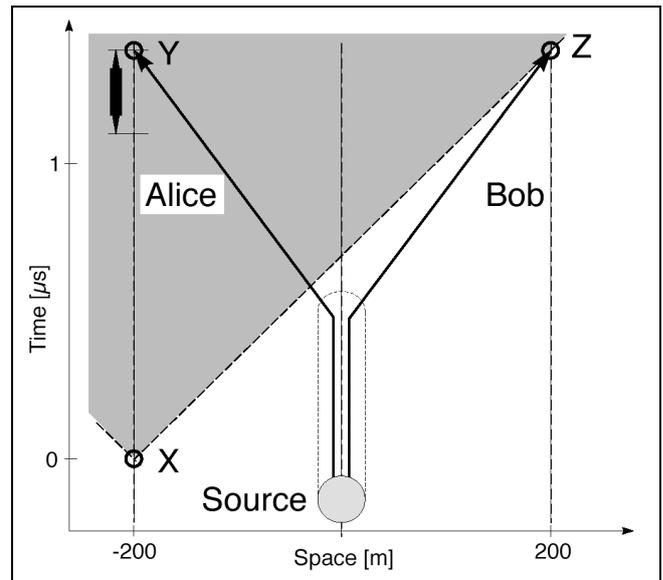
5.2.7. Diskussion der Experimente

Alle diese Experimente haben die Voraussagen der Quantenmechanik bestätigt, aber die Limiten der Bell'schen Ungleichungen verletzt. Allerdings gibt es immer noch 'Schlupflöcher' für Modelle mit 'versteckten Variablen'. So können nach wie vor Modelle aufgestellt werden, welche nichtlokale verborgene Variablen enthalten. Dies würden sich aber nur noch wenig von der Standardversion der Quantenmechanik unterscheiden.

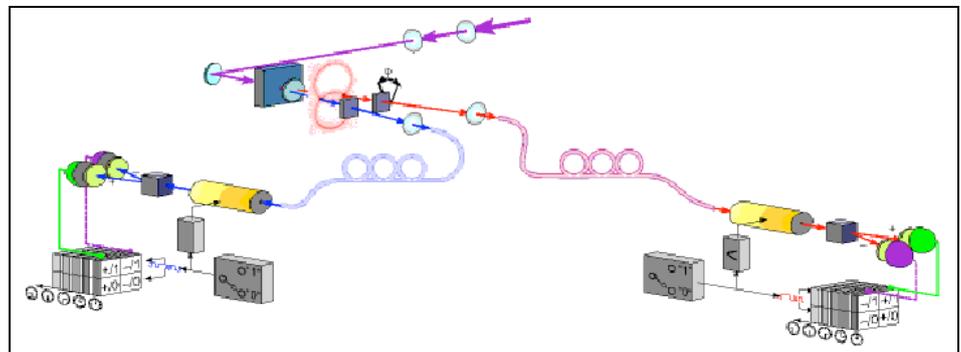
Es gibt aber auch am experimentellen Ansatz Diskussionsmöglichkeiten. So muss man bei jedem Experiment für die theoretische Beschreibung gewisse Annahmen treffen, da Experimente nie ideale Realisierungen der Theorie darstellen. Deshalb wären bei den EPR Experimenten immer auch Auswege denkbar, über die lokale realistische Theorien doch noch zu retten wären (P.G. Kwiat, P.H. Eberhard, A.M. Steinberg, and R.Y. Chiao, '*Proposal for a loophole-free Bell inequality experiment*', Phys. Rev. A 49, 3209-3220 (1994).). So hat man bei der Verwendung von korrelierten Photonen aus atomaren Kaskaden das Problem dass man Photonen aus einem relativ großen Raumwinkel sammeln muss. Da diese somit unterschiedliche Richtungen aufweisen und die Polarisation senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sein muss werden die Korrelationen erniedrigt. Man verwendet deshalb heute nur mehr Photonen die durch parametrische Prozesse erzeugt wurden.

Ein weiteres Problem besteht darin, dass nicht alle Photonen detektiert werden. Man könnte somit argumentieren dass ein Dämon es schafft, gerade diejenigen Photonen vom Detektor fernzuhalten, die für die Erfüllung der Bell'schen Ungleichungen nötig sind. Dieser Ausweg kann nur umgangen werden indem man Detektoren mit genügend hoher Quantenausbeute verwendet. So lange dies nicht möglich ist bleibt nur die Annahme dass die detektierten Photonen die gleiche Statistik aufweisen wie die nicht detektierten. Ein anderer Dämon könnte die verborgenen Variablen einstellen nachdem der Experimentator die Orientierung der Analysatoren eingerichtet hat.

Um diesen Ausweg zu schließen kann man Experimente durchführen, bei denen die Analysatoren erst eingestellt werden nachdem die beiden Photonen getrennt wurden (G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, 'Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions', Phys. Rev. Lett. 81, 5039-5043 (1998)). Auf diese Weise kann man erreichen dass ein solcher Dämon nur dann das Experiment stören kann wenn er sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt.



Dafür wurde ein experimenteller Aufbau verwendet, bei dem zunächst zwei korrelierte Photonen erzeugt wurden, welche über zwei optische Fasern in zwei getrennt Labors geführt wurden.



Die Einstellung der Analysatoren erreicht man über einen Zufallsgenerator in Kombination mit elektrooptischen Modulatoren. Die Modulatoren wandeln die Polarisation der Photonen so um, dass sie von einem polarisierenden Strahlteiler auf einen der beiden hochempfindlichen Detektoren geschickt werden.

