

## 4. Quantenmechanische Messungen

<b>4.</b>	<b>Quantenmechanische Messungen</b>	<b>1</b>
<b>4.1</b>	<b>Kollaps der Wellenfunktion</b>	<b>3</b>
4.1.1.	Projektion eines Zustandes	3
4.1.2.	Biographisches	4
4.1.3.	Die Kopenhagener Interpretation	6
4.1.4.	Kritik der Kopenhagener Interpretation	6
4.1.5.	von Neumann's Modell des Messprozesses	7
<b>4.2</b>	<b>Schrödinger's Katze</b>	<b>10</b>
4.2.1.	Zitat	10
4.2.2.	Interpretation	10
4.2.3.	Wann kollabiert die Wellenfunktion?	12
4.2.4.	Spinmodell	13
4.2.5.	Zeitumkehr	14
4.2.6.	Kopplung an die Umgebung	15
4.2.7.	Grenzen des Superpositionsprinzips	16
4.2.8.	Superauswahlregeln	17
<b>4.3</b>	<b>Verschränkte Zustände in Modellsystemen</b>	<b>19</b>
4.3.1.	Freie Atome	19
4.3.2.	Gebundene Systeme	19
4.3.3.	Optische Modellsysteme	21
4.3.4.	Dekohärenz	22
4.3.5.	Dekohärenz in räumlich getrennten Systemen	23
4.3.6.	Experimentelle Beobachtung der Dekohärenz	23
<b>4.4</b>	<b>Weitere Interpretationen und Modelle</b>	<b>26</b>
4.4.1.	Statistische Interpretation	26
4.4.2.	Statistische Beschreibung des Messprozesses	26
4.4.3.	Vergleich und Bewertung	27
4.4.4.	Experimente an Einzelsystemen	28
4.4.5.	Pilotwelle / Quantenpotential	29
4.4.6.	Herleitung der Bewegungsgleichung	30
4.4.7.	Diskussion	31
4.4.8.	Die Interpretation von Everett	32
<b>4.5</b>	<b>Der Quantenmechanische Zeno Effekt</b>	<b>35</b>
4.5.1.	Zeno's Paradoxa	35
4.5.2.	Wiederholte QM Messungen	35
4.5.3.	Experimente	37
4.5.4.	Diskussion	38
4.5.5.	Literatur	38
<b>4.6</b>	<b>Rückwirkungsfreie (QND) Messungen</b>	<b>40</b>

4.6.1.	Wiederholte Positionsmessungen an freien Teilchen	40
4.6.2.	QND Variablen	41
4.6.3.	Beispiel: QND Messung von optischen Intensitäten	42
4.6.4.	Diskussion	44
4.6.5.	Literatur:	46
<b>4.7</b>	<b>Wechselwirkungsfreie Messungen</b>	<b>47</b>
4.7.1.	Das Konzept	47
4.7.2.	Diskussion	47
4.7.3.	Wiederholte Messungen	48
4.7.4.	Experiment	49
4.7.5.	Literatur:	50

## 4.1 Kollaps der Wellenfunktion

### 4.1.1. Projektion eines Zustandes

Die Heisenberg - Schrödinger Quantenmechanik kennt zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten auf die sich ein quantenmechanischer Zustand ändern kann: Einerseits die Schrödingergleichung

$$\frac{d}{dt} \Psi = -i \mathcal{H} \Psi ,$$

welche eine unitäre und damit reversible, kausale und kontinuierliche Zeitentwicklung definiert.

Ganz im Gegensatz dazu die Zeitentwicklung bei einer "Messung der ersten Art": Aus einem Zustand

$$\Psi = c_a \Psi_a + c_b \Psi_b ,$$

welcher eine Superposition von zwei (oder mehr) Eigenzuständen  $\Psi_{a,b}$  eines Operators  $A$  darstellt, wird bei einer Messung einer der beiden Zustände  $\Psi_a$  oder  $\Psi_b$ . Die Quantenmechanik macht keine deterministische Aussage darüber, welcher der beiden Zustände realisiert wird, sie gibt lediglich Wahrscheinlichkeiten für die beiden Möglichkeiten. Der Messprozess ist damit irreversibel und im Einzelfall stochastisch.

Dieser Übergang von einem Superpositionszustand zu einem Eigenzustand der Observablen gehört zu den merkwürdigsten Besonderheiten der Quantenmechanik. Er wird als Projektion oder Reduktion des Wellenpaketes bezeichnet.

Wenn wir die technischen Details zunächst beiseite lassen stellen sich an dieser Stelle zwei Interpretationsprobleme:

- A. Befindet sich das System nach einer Messung in einem definierten Zustand (z.B.  $\Psi_a$  oder  $\Psi_b$ )? Die Schrödingergleichung sagt nein, das Reduktionspostulat ja.
- B. Ist es reiner Zufall, welcher der beiden möglichen Messresultate realisiert wird?

Hier zunächst zwei Aussagen über das Messproblem: Eugene Wigner (amerikanischer Physiker ungarischer Herkunft, \* 1902, † 1995) sagt: The orthodox interpretation of QM describes two different types of evolution: the Schrödinger equation and the measurement. The two are not compatible, but there is no alternative to the orthodox view. (E.P. Wigner, 'The problem of measurement', Am. J. Phys. 31, 6 (1963).)

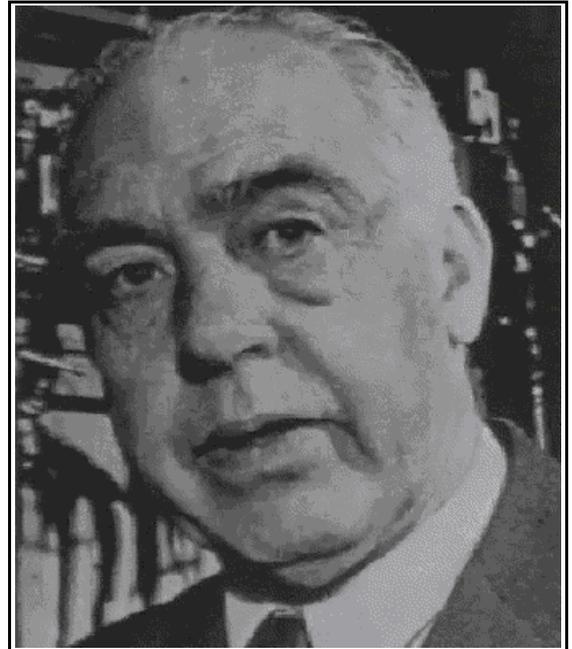
Anthony Leggett beschreibt dieses Problem folgendermaßen: The quantum measurement paradox is about the question whether the system IS in a definitive state at a given time. The Schrödinger equation says no, but the result of the measurement says yes. Accordingly, one may ask, whether the act of the measurement is indeed compatible with the quantum mechanical predictions. The statistical interpretation, which maintains that QM predicts only probabilities, i.e. averages over long sequences of identical experiments is irrefutable, but not satisfactory. (Aus A.J. Leggett, 'Reflections

on the quantum measurement paradox', in *Quantum implications*, Editor: B.J. Hiley and F. D. Peat, Routledge & Kegan Paul, London (1987).).

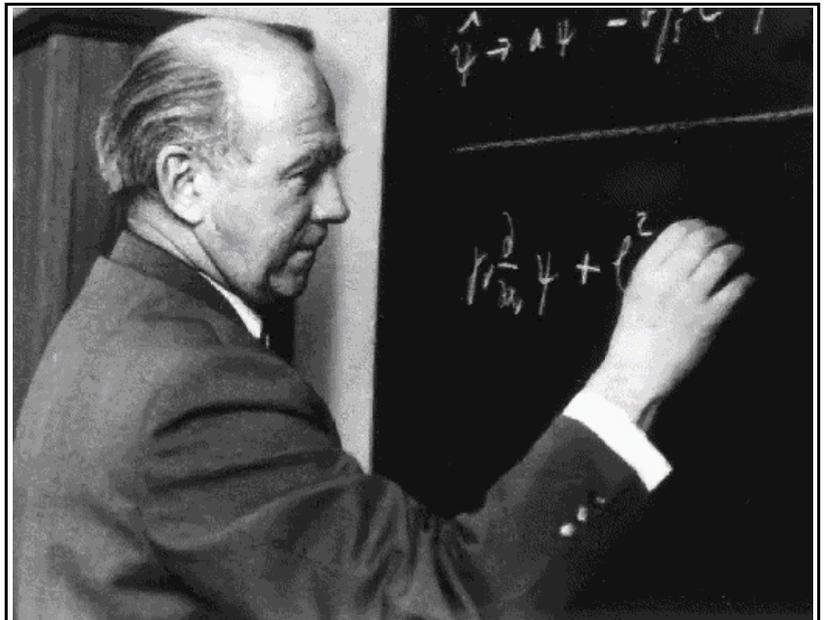
Die Diskontinuität und scheinbare (?) Unvorhersagbarkeit dieses Prozesses gehört zu den wichtigsten unverstandenen Aspekten der Quantenmechanik. Es wurden viele Möglichkeiten vorgeschlagen, aber keine kann wirklich befriedigen. Im folgenden sollen einige dieser Vorschläge diskutiert werden.

#### **4.1.2. Biographisches**

Niels Bohr (7.10.1885 – 18.11.1962); Ausbildung an der Universität Kopenhagen; Dissertation über die Theorie von Elektronen in Metallen. Forschungsaufenthalte in Cambridge und Manchester bei Ernest Rutherford, der 1911 seine Theorie der Struktur der Atome (Kern plus Elektronenhülle) publiziert hatte. 1913, nach seiner Rückkehr nach Kopenhagen, publizierte er seine Theorie der Struktur von Atomen. 1916 wurde er Professor für theoretische Physik an der Uni Kopenhagen und 1922 erhielt er den Nobelpreis. 1943 Flucht vor den Nazis in die USA, Mitarbeit am Manhattan Projekt. Nach dem Krieg Rückkehr nach Kopenhagen.



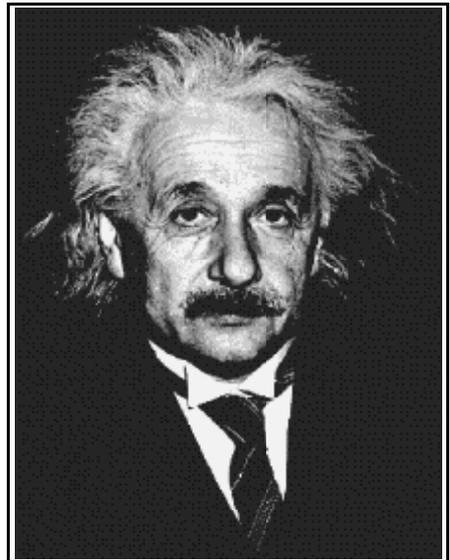
Werner Karl Heisenberg (5.12.1901 – 1.2.1976). Studium in München, bei Arnold Sommerfeld; Arbeit bei Bohr in Kopenhagen, dann in Göttingen, wo er 1925 den Matrixformalismus der Quantenmechanik entwickelte. 1927 formulierte er das Unschärfeprinzip und wechselte an die Uni Leipzig. 1932 erhielt er den Nobelpreis. Während dem 2. Weltkrieg arbeitete er am deutschen Atomwaffenprogramm. Nach dem Krieg wurde er Direktor des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik.



Heisenberg wurde am 5. Dezember 1901 in Würzburg als Sohn des Gymnasiallehrers August Heisenberg geboren. 1910 erhielt der Vater einen Ruf an die Universität München; er wurde Ordinarius für mittel- und neugriechische Philosophie. Die Familie zog in die bayerische Landeshauptstadt, der sich Werner Heisenberg sein Leben lang eng verbunden fühlte. Nach dem Besuch des Maximilian Gymnasiums studierte er in München theoretische Physik bei Arnold Sommerfeld,

mit ihm Wolfgang Pauli. 1922 lernt er in Göttingen Niels Bohr kennen, 1923 promoviert er in München, 1924 habilitiert er sich an der Universität Göttingen; im Winter 1924/25 schließt sich sein Studienaufenthalt bei Bohr in Kopenhagen an. Hier beginnen die ersten Denkansätze zur Quantenmechanik. 1927 wird er zum Ordinarius für theoretische Physik an der Universität Leipzig ernannt. Hier entsteht die berühmte Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation, welche die Wissenschaft grundlegend erweitert. 1933 wird Heisenberg die Max-Planck-Medaille verliehen; im selben Jahr wird ihm der Nobelpreis für Physik des Jahres 1932 zugesprochen. Am 29. April 1937 heiratet er Elisabeth Schumacher; um die gleiche Zeit beginnen auch die Angriffe der Nazi gegen ihn, die ihn als weißen Juden verunglimpfen, weil er das Gedankengut Einsteins verbreite und nicht deutsche Wissenschaft betreibe. Seine Berufung nach München als Nachfolger Sommerfelds wird kategorisch abgelehnt. 1939 entschließt er sich endgültig, nicht zu emigrieren, was bei einigen emigrierten Wissenschaftlern auf Unverständnis stößt. Er wird zum Heereswaffenamt nach Berlin einberufen. Otto Hahn und Fritz Straßmann hatten Ende 1938 die Spaltung des Uranatoms entdeckt; die technische Nutzung der Kernenergie rückte aus dem Bereich des Utopischen in den des Möglichen. Physiker waren rar geworden in Deutschland; man brauchte Heisenberg. Im Kaiser-Wilhelm-Institut in Berlin Dahlem begann das Uran-Projekt. 1943 wurde das Institut nach Hechingen in Württemberg ausgelagert, und in Haigerloch in einem Felsenkeller ein Atomreaktor aufgebaut. Der sog. Atommeiler erreichte aber nicht die kritische Phase, in der die Kettenreaktion sich selbst unterhält. Nach dem Krieg wurden Heisenberg und neun Kollegen in England interniert; im Februar 1946 kehrten sie nach Deutschland zurück. Die folgenden Jahre in Göttingen sind dem Wiederaufbau gewidmet; 1949 wird Heisenberg Präsident des Deutschen Forschungsrates, 1953 der Alexander-von-Humboldt-Stiftung. Am 13. April unterschreibt er mit achtzehn Physikern das Göttinger Manifest gegen die Rüstungspolitik Adenauers und die Ausrüstung der Bundeswehr mit taktischen Atomwaffen. 1958 zieht Heisenberg mit seinem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik nach München um. Im gleichen Jahr publiziert er seine Einheitliche Theorie der Elementarteilchen, die als Weltformel ungeheure Publizität findet. Die Hoffnungen erfüllen sich aber (jedenfalls nach der Meinung der führenden Physiker) nicht; Heisenberg selbst bleibt optimistisch. 1969 erreichen seine philosophischen Publikationen in der Herausgabe seines Werkes *Der Teil und das Ganze* seinen Höhepunkt. Im Dezember 1970 erfolgt die Emeritierung; am 1. Februar 1976 ist er in München gestorben.

Albert Einstein (14.3.1879 – 18.4.1955). Jugend in Ulm, München und Mailand; Studium an der ETH Zürich (Diplom 1900); Arbeit am Schweizer Patentbüro in Bern (1902-09). 1905 Arbeiten zum photoelektrischen Effekt, zur speziellen Relativitätstheorie, zur Äquivalenz von Energie und Masse und zur Brown'schen Bewegung. Promotion an der Uni Zürich 1905. 1907 Grundlagen zur allgemeine Relativitätstheorie; endgültige Form 1915. 1908 Habilitation an der Uni Bern. 1909 Professor an der Uni Zürich, danach Uni Prag und ETH Zürich. 1914 bei der Kaiser-Wilhelm Gesellschaft in Berlin. 1921 Nobelpreis zum photoelektrischen Effekt. 1933 Emigration und Arbeit am Institute for Advanced Study in Princeton, N.J. Dieses wurde 1930 mit einer Spende von Louis Bamberger gegründet und der „Usefulness of useless knowledge“ gewidmet.



Johann von Neumann (28.12.1903 – 8.2.1957). 1925 Diplom in Chemietechnik (ETH); 1926 Promotion in Mathematik an der Universität Budapest. 1932: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. 1931 Professor in Princeton, 1933 Institute of Advanced Study in Princeton. In den 40er und 50er Jahren Arbeiten zur Theorie der Computer.



### **4.1.3. Die Kopenhagener Interpretation**

Die wohl am weitesten verbreitete Interpretation der Quantenmechanik, und insbesondere des Messprozesses, ist eine Sichtweise, die sich über mehrere Jahrzehnte entwickelt hat. Die wichtigsten Exponenten waren Bohr und Heisenberg. Ihre ersten Publikationen zu diesem Thema erschienen 1927 und 1928, die endgültige Version 1958. Allerdings sind sich Bohr und Heisenberg keineswegs in allen Punkten einig. So sagt Bohr „es gibt keine Quantenwelt“. Damit meint er, dass es eigentlich keinen Sinn macht, über quantenmechanische Systeme zu sprechen; nur die klassisch beobachtbaren Resultate von Messungen an quantenmechanischen Systemen stellen Realität dar.

W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. 43, 172-198 (1927).

N. Bohr, *The quantum postulate and the recent development in atomic theory*, Nature 121, 580-590 (1928).

W. Heisenberg, *Physik und Philosophie*, Hirzel, Stuttgart (1958).

N. Bohr, *Erkenntnisfragen der Quantenphysik*, Naturwissenschaftliche Rundschau 13, 252-255 (1960).

Die wichtigsten Postulate der Kopenhagener Interpretation sind

- Die Quantenmechanik behandelt Einzelsysteme.
- Die Wahrscheinlichkeiten der Quantenmechanik sind primär, d.h. sie können nicht wie bei der statistischen Mechanik auf eine deterministische Theorie zurückgeführt werden.
- Die Welt wird in zwei Teile geteilt. Der eine Teil ist das beobachtete Objekt, welches quantenmechanisch beschrieben wird, der andere Teil die Messapparatur, welche klassisch beschrieben werden muss. Der Schnitt zwischen dem Objekt und dem Messapparat kann an beliebiger Stelle gemacht werden.
- Der Beobachtungsprozess ist irreversibel.
- Komplementäre Eigenschaften können nicht gleichzeitig beobachtet werden.

### **4.1.4. Kritik der Kopenhagener Interpretation**

Vielleicht der größte Vorteil der Kopenhagener Interpretation ist, dass sie intern konsistent ist. Einstein formulierte dies in einem Brief an Schrödinger so:

*"Die Heisenberg-Bohr'sche Beruhigungsphilosophie – oder Religion? – ist so fein ausgeheckt, dass sie dem Gläubigen ein sanftes Ruhekissen liefert, von dem er sich nicht so leicht aufscheuchen lässt."*

Damit sind zwei Punkte angesprochen: zum einen anerkennt Einstein, dass die Kopenhagener Interpretation intern konsistent ist (deshalb kann sie als Ruhekissen dienen), zum anderen macht er klar dass ihn die Situation nicht befriedigt. Der Grund dafür ist im wesentlichen dass für die interne Konsistenz ein hoher Preis bezahlt

wird: Sie wird nur dadurch erreicht, dass man die Quantenmechanik im wesentlichen auf einen Satz von Algorithmen reduziert; ein eigentliches Verständnis für die Eigenschaften der Materie ist auf dieser Basis nicht möglich. Durch die strikte Trennung in einen quantenmechanischen und einen klassischen Bereich wird die Möglichkeit verneint, klassische Aspekte von Quantensystemen als Grenzfälle einer mikroskopischen Theorie herzuleiten.

Der Zustandsvektor entspricht laut Kopenhagener Interpretation dem Wissen über das quantenmechanische System. Unterschiedliche Beobachter, welche unterschiedliches Wissen haben, werden deshalb unterschiedliche Zustandsvektoren verwenden. Damit ist aber nicht klar, weshalb die Schrödingergleichung in beiden Fällen Gültigkeit haben sollte.

Zu den wichtigsten Kritikern der Kopenhagener Interpretation gehörte Einstein. So hat er darauf bestanden, dass die Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems nur Ensembles korrekt beschreiben. Diese statistische Interpretation wird im folgenden noch getrennt diskutiert.

Ein weiterer wichtiger Kritiker war Johann von Neumann. Er war der Ansicht, dass die Quantenmechanik prinzipiell alle Naturphänomene korrekt beschreibt, also z.B. auch den Messapparat. Dieser Ansatz macht die Quantenmechanik zu einer universell gültigen Theorie, von der die klassische Mechanik als Grenzfall abgeleitet werden kann. In dieser Hinsicht ist sie sehr viel befriedigender als die Kopenhagener Interpretation. Allerdings erhält man aus dieser Annahme das Messproblem der Quantenmechanik: es erfolgt keine Reduktion des Zustandsvektors.

Auch Schrödinger hat sich an der Kritik beteiligt, allerdings eher aus ästhetischen Überlegungen. Er sagte:

*"Wenn diese Quantenspringerei nicht aufhört tut es mir leid, mich jemals damit befasst zu haben"*

#### **4.1.5. von Neumann's Modell des Messprozesses**

Einen alternativen Ansatz machte Johann von Neumann indem er versuchte, die Trennung in ein quantenmechanisches Objekt und einen klassischen Messapparat aufzuheben. Zu diesem Zweck entwickelte er ein rein quantenmechanisches Modell für den Messprozess.

Darin wird ein System  $S$  durch einen Wechselwirkungsoperator an **Z: Modell** eine Messapparatur  $A$  gekoppelt. Das System soll die beiden Basiszustände  $\Psi_a$  und  $\Psi_b$  besitzen, welche Eigenzustände einer Systemobservablen  $O_S$  seien. Es soll nun mit Hilfe einer Messung bestimmt werden, ob sich das System im Zustand  $\Psi_a$  oder  $\Psi_b$  befindet.

Um eine quantenmechanische Beschreibung des Messvorgangs zu erhalten muss auch die Messapparatur quantenmechanisch beschrieben werden. Wir verwenden die einfachste mögliche Beschreibung: Die Messapparatur soll nur zwei mögliche Zustände

de haben, von denen der eine anzeigt, dass sich das System im Zustand  $\Psi_a$  befindet, der andere Zustand zeigt an, dass sich das System im Zustand  $\Psi_b$  befindet. Wir schreiben für diese beiden Zustände der Messapparatur  $\xi_a$  und  $\xi_b$ . Die entsprechende Observable soll mit  $O_a$  bezeichnet werden.

Die Annahme von Neumanns ist, dass das System sich zu Beginn des Messprozesses in einem Zustand befindet, der keine Korrelationen zwischen Objekt und Messapparatur besitzt. Objekt und Apparat seien jeweils in einem reinen Zustand  $\Psi$ , resp.  $\xi$ , welche nicht bekannt sind. Das Gesamtsystem ist dann im Produktzustand  $\Psi \otimes \xi$ . Wenn wir den Ausgangszustand des Objekts in der Basis der beiden Eigenzustände der Observablen  $A$  schreiben lautet der Produktzustand

$$\Psi(0) = (c_a \Psi_a + c_b \Psi_b) \otimes \xi .$$

Das System muss nun so an den Messapparat gekoppelt werden, dass der Systemzustand  $\Psi_a$  auf den Zustand  $\xi_a$  des Messapparates abgebildet wird:

$$\Psi_a \otimes \xi \rightarrow \Psi_a \otimes \xi_a .$$

$$\Psi_b \otimes \xi \rightarrow \Psi_b \otimes \xi_b .$$

Wenn wir einen Superpositionszustand an diesen Apparat ankoppeln wird aufgrund der Linearität der Schrödingergleichung daraus der Gesamtzustand

$$\Psi(t) = (d_a \Psi_a \otimes \xi_a + d_b \Psi_b \otimes \xi_b)$$

entstehen.

Der Messprozess führt somit nicht zu einer Zustandsreduktion, sondern zu einem verschränkten Zustand. Über das System und über die Messapparatur weiß man somit weniger als vorher. Erst wenn der Zeiger der Messapparatur abgelesen und dadurch der Zustand auf eines der beiden möglichen Messresultate  $\Psi_a \otimes \xi_a$  oder  $\Psi_b \otimes \xi_b$  reduziert wird erhalten wir wieder einen einfachen Zustand. Allerdings ist dann der Messapparat seinerseits zu einem System geworden an dem eine Messung durchgeführt wird.

Damit erhält man eine Art unendlichen Regress: solange der Messprozess quantenmechanisch beschrieben wird findet keine Zustandsreduktion statt. Von Neumanns Modell, welches später von London und Bauer expliziter gemacht und von Wigner übernommen wurde, geht davon aus, dass die Reduktion des Zustandsvektors durch das Bewusstsein des Beobachters zustand kommt. Somit ist die Quantenmechanik auch hier nicht allgemein gültig, nämlich nicht für das Bewusstsein des Beobachters. Als Hinweis darauf, weshalb dies gerechtfertigt sein soll führen London und Bauer an, dass der Beobachter als einziges Objekt im Universum die Möglichkeit zur Selbstbeobachtung habe. Trotzdem stellt sich natürlich die Frage, ob die physiologischen Prozesse im Gehirn noch quantenmechanisch beschrieben werden dürfen.

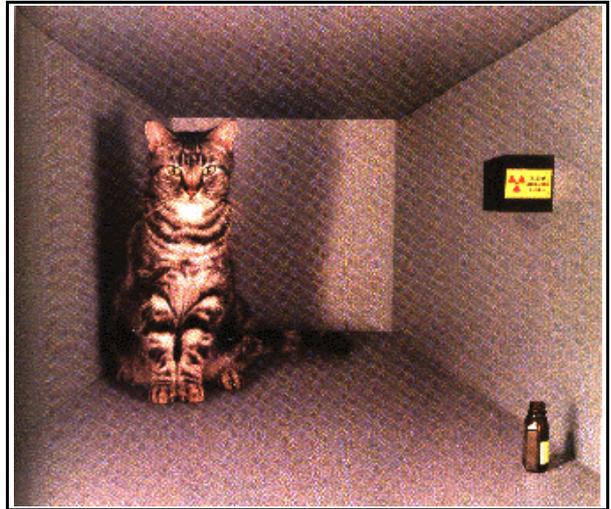
Man sollte sich allerdings der Grenzen dieser Beschreibung bewusst sein: Wir haben hier für jedes mögliche Messresultat einen einzelnen Quantenzustand für den Messapparat geschrieben. Dabei kann es sich aber nicht um einen Eigenzustand des Hamiltonoperators handeln. Dies sieht man wenn man abschätzt, dass ein makroskopischer Messapparat rund  $10^{50}$  (D. Bohm, 'Quantum Theory', Prentice-Hall, New York (1951).) Energie-Eigenzustände besitzt. Dadurch liegen diese so dicht dass kein Experiment in der Lage ist, das System in einen einzelnen Eigenzustand zu bringen. Damit ist der resultierende Zustand immer auch zeitabhängig.

## 4.2 Schrödinger's Katze

### 4.2.1. Zitat

Im Jahre 1935 beschrieb Schrödinger folgendes Gedankenexperiment: (Bilder aus B. d'Espagnat, *'The quantum theory and reality'*, Scientific American November '79, 128-140 (1979).)

Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muss): in einem Geigerischen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, dass im Laufe einer Stunde vielleicht ein Atom zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses System eine Stunde lang sich selber überlassen, so wird man sich sagen, dass die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben. Die  $\Psi$  Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, dass in ihr die lebende und die tote Katze zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.



Literatur:

E. Schrödinger, *'Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik'*, Die Naturwissenschaften 23, 807-812, 823-828, 844-849 (1935).

A. Peres, *'The classic paradoxes of quantum theory'*, Found.Phys. 14, 1131-1145 (1984).

B. d'Espagnat, *'The quantum theory and reality'*, Scientific American November '79, 128-140 (1979).

### 4.2.2. Interpretation

Die beiden klassisch möglichen Endzustände würden quantenmechanisch jeweils als eine Wellenfunktion geschrieben:

$$\Psi_1 \xi_0 \quad \text{und} \quad \Psi_t \xi_1 .$$

Hier beschreiben  $\Psi_1$  und  $\Psi_t$  die lebende und die tote Katze und  $\xi_{0,1}$  die Anzahl Zerfälle des radioaktiven Isotops.

Wenn wir die übliche Interpretation der Quantenmechanik verwenden befindet sich das System vor einer Messung im Zustand

$$\Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 \xi_0 + \Psi_t \xi_1) .$$

Solche Zustände sind in der Quantenmechanik als "verschränkte Zustände" bekannt und spielen eine wichtige Rolle z.B. in der Quantenkryptographie oder bei einem Quantencomputer. Hier stellt der Zustand aber eine Superposition einer lebenden Katze mit einer toten Katze dar, was natürlich mit unserer täglichen Erfahrung nicht vereinbar ist.



Durch die Messung (d.h. die Öffnung der Stahlkammer) wird das System in einen der beiden Zustände  $\Psi_1$  oder  $\Psi_t$  projiziert:

$$\Psi_+ = \Psi_1 \xi_0 \quad \text{oder} \quad \Psi_+ = \Psi_t \xi_1 .$$

Offensichtlich ist die oben beschriebene Zustandsfunktion aber nicht die einzige, die mit den erwarteten Messresultaten in Übereinstimmung ist. Die Projektion ist nicht empfindlich auf die relative Phase im Superpositionszustand. Die Funktion

$$\Psi_{-, \phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 \xi_0 + e^{i\phi} \Psi_t \xi_1)$$

führt zu den gleichen Messresultaten. Allgemein hängt das Messresultat bei Messungen dieser Art nicht von der relativen Phase der beteiligten Zustände ab.

Schrödinger's Gedankenexperiment wurde auch immer wieder graphisch wiedergegeben.

**F: Katze aus Baumann / Sexl**

Offensichtlich ist diese Beschreibung im Widerspruch zu unserer alltäglichen Erfahrung: Wir kennen lebende Katzen und tote Katzen, aber ein Superpositionszustand zwischen beiden ist nicht vorstellbar. Es scheint also dass das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik nicht allgemein anwendbar ist.

Auch klassisch ist die Unterscheidung zwischen einer lebenden und einer toten Katze nicht exakt, sondern muss definiert werden. Die heute juristisch und medizinisch akzeptierte Definition beinhaltet eine Reihe von Kriterien, wie z.B. Herzschlag und Gehirnaktivität. Sie ist aber mit Sicherheit abhängig von den Möglichkeiten der Medizin.

### 4.2.3. Wann kollabiert die Wellenfunktion?

In rein quantenmechanischen Fällen kommt es nie zu einem Kollaps. Hier ist jede Evolution prinzipiell auch umkehrbar, da zu jedem Zeitentwicklungsoperator auch der inverse existiert. Wenn die Zeitevolution, welche die Katze in der Stahlkammer durchmacht, durch den Operator  $U$  beschrieben wird, so ist es prinzipiell möglich, diese rückgängig zu machen indem man den Evolutionsoperator  $U^{-1}$  anwendet.

Wir betrachten zunächst als einfaches Modell eines Messprozesses, eine Erweiterung des Stern-Gerlach Versuchs bei dem nicht nur eine Spinkomponente gemessen wird. Da die Komponenten eines Drehimpulses nicht miteinander vertauschen können sie nicht gleichzeitig gemessen werden. Wenn bei einem Spin-1/2 Teilchen z.B. die vertikale Komponente gemessen wird, und anschließend von allen Teilchen, welche Spin up hatten, die horizontale Komponente gemessen wird, so erhält man beide möglichen Resultate mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Wird anschließend nochmals bei allen Teilchen mit Spin nach rechts die vertikale Komponente gemessen, so findet man wieder beide Möglichkeiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

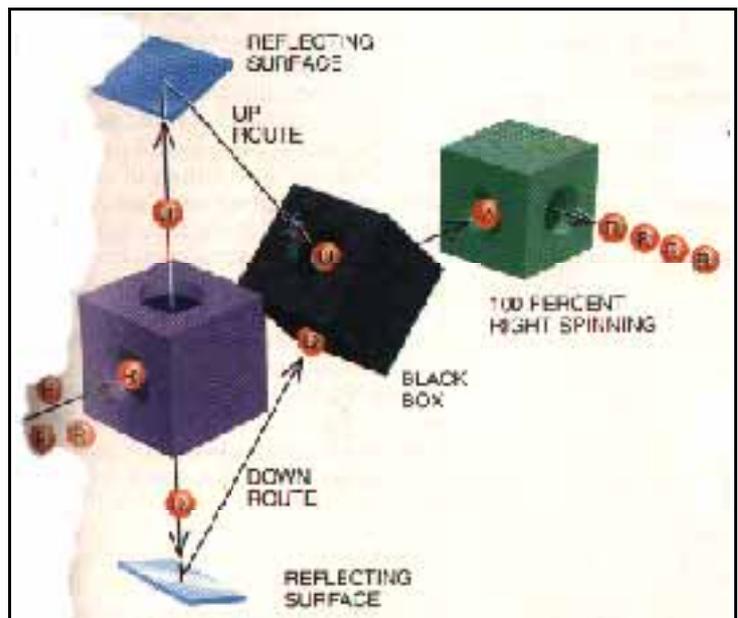
#### Z: Stern-Gerlach Experiment

Ein interessantes Gedankenexperiment erhält man aus diesem durch eine kleine Erweiterung: bringt man nicht nur die Spin-up Teilchen in die Messung der horizontalen Komponente, sondern die up- und down-Teilchen und erzeugt daraus eine Superposition mit geeigneter relativer Phase,

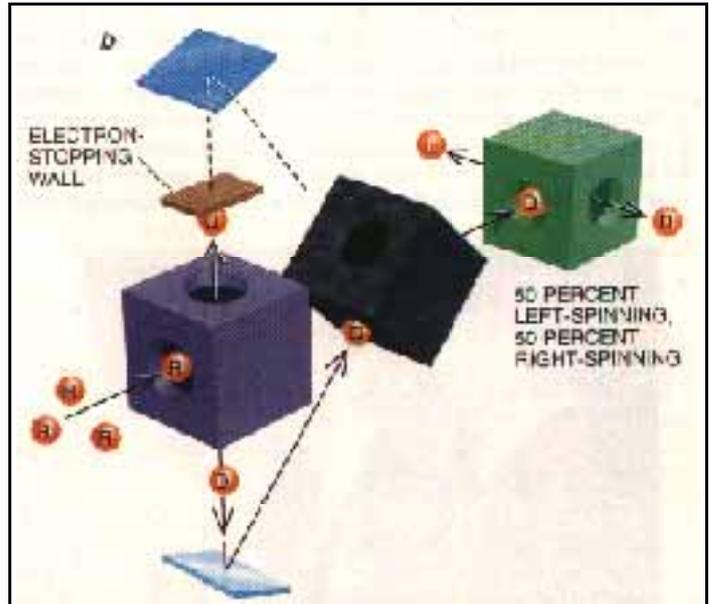
$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle),$$

so findet man vollständig deterministisch nur die eine horizontale Komponente (z.B. rechts). Dies kann als Beispiel eines „Quantum Eraser“s,

d.h. eines „Quanten-Radiergummi“ betrachtet werden: Durch das Erzeugen der Superposition wird die Information über die Orientierung des Spins bei der ersten Messung gelöscht und dadurch die Möglichkeit wieder hergestellt, ein deterministisches Resultat für die Messung der horizontalen Komponente zu erhalten. Anders ausgedrückt wurde in diesem Experiment die vertikale Komponente nie gemessen, so dass keine Änderung der horizontalen Komponente erzwungen wird.



Wenn das Experiment jetzt modifiziert wird indem einer der beiden Teilstrahlen unterbrochen wird, so erhält man wieder die ursprüngliche 50 / 50 Verteilung. Dies ist ein Beweis dafür, dass quantenmechanische Systeme nicht einfach als klassische Ensembles betrachtet werden dürfen: dann könnte eine Vorselektion einer Verteilung nicht zu einer größeren Streuung führen.



#### 4.2.4. Spinmodell

Um ein physikalisch etwas präziseres und einfacheres Beispiel zu verwenden gehen wir über zu einem Spin 1/2, von dem wir bestimmen möchten, ob sein Spin nach oben oder unten zeigt. Die entsprechenden Zustände bezeichnen wir mit  $|u\rangle$  und  $|d\rangle$ . Wir verwenden als Messinstrument einen Eisenmagneten mit  $10^{20}$  Spins, welche alle gleich ausgerichtet sein sollen. Dies stellt eine gute Näherung für ein klassisches Messinstrument dar, ist aber doch noch quantenmechanisch beschreibbar. Sind alle Spins nach oben gerichtet so bezeichnen wir den entsprechenden Zustand mit  $|U\rangle$ , alle nach unten mit  $|D\rangle$ . Wir führen die Messung so durch dass der Eisenmagnet sich zunächst im  $|U\rangle$  Zustand befindet. Danach werden der Spin und der Magnet für eine Zeit  $T$  gekoppelt. Die Kopplung soll so konstruiert werden dass der Magnet sich anschließend im  $|D\rangle$  Zustand befindet fall der Spin zu Beginn im  $|d\rangle$  Zustand war, dass er aber im  $|U\rangle$  Zustand bleibt falls der Spin zu Beginn im  $|u\rangle$  Zustand war. Als Kopplungsoperator können wir dann den Hamiltonoperator

#### Z: Spin, Messapparat

$$\mathcal{H} = P (1 - \sigma_z)$$

verwenden. Hier stellt  $P$  den Projektionsoperator

$$P = \frac{1}{2} (|U\rangle - |D\rangle) (\langle U| - \langle D|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dar, welcher nur auf den Eisenmagneten wirkt. In Matrixschreibweise erhalten wir für diesen Operator in der Basis  $(|u, U\rangle, |u, D\rangle, |d, U\rangle, |d, D\rangle)$  die Darstellung

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Dauer der Kopplung wird  $\pi/2$  gewählt. Damit wird der resultierende Transformationsoperator

$$U = \exp(i \tau \mathcal{H}) = \exp(i \pi/2 \mathcal{H}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit wird für den Fall dass der Spin im Zustand  $u$  ist der Eisenmagnet nicht beeinflusst, seine Polarisation wird aber invertiert wenn der Spin zu Beginn im  $d$  Zustand ist. Falls der Magnet zu Beginn der Operation im  $U$  Zustand ist wird somit das gewünschte Messresultat ermittelt. **Z: Messprozess**

Befindet sich der Spin zu Beginn in einem Superpositionszustand  $|u\rangle + |d\rangle$  so endet auch der Eisenmagnet in einem Superpositionszustand

$$U (|u\rangle + |d\rangle) = |u,U\rangle + |d,D\rangle ,$$

welcher der Superposition zwischen der lebenden und der toten Katze entspricht.

#### 4.2.5. Zeitumkehr

Das Schöne an diesem Beispiel ist, dass sich leicht zeigen lässt, dass die Zeitentwicklung hier umkehrbar ist: offensichtlich ist  $U^2 = \mathbb{1}$ , d.h. eine zweite Anwendung des gleichen Zeitentwicklungsoperators bringt das System wieder in den Ausgangszustand zurück – die Katze lebt wieder.

Das Beispiel kann auch eine Idee geben weshalb dies mit einer echten Katze so schwierig ist. Voraussetzung für die Zeitumkehr ist, dass die Phasenbeziehung zwischen den beiden Basiszuständen fest ist. Im vorliegenden Beispiel wird ein Zustand

$$|u,U\rangle + e^{i\phi} |d,D\rangle ,$$

der die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung für die beiden möglichen Messresultate  $\uparrow$  und  $\downarrow$  aufweist, durch Multiplikation mit der Matrix  $U$  in den Zustand

$$(|u,U\rangle + e^{i\phi} |d,U\rangle) = (|u\rangle + e^{i\phi} |d\rangle) \otimes |U\rangle$$

übergehen. Offenbar steht dieser Zustand für  $\phi = \pi$  gerade orthogonal zum Ausgangszustand.

Liegt eine statistische Mischung von Einzelsystemen vor, welche jeweils unterschiedliche Phasen aufweisen, so merken wie dies bei einer Messung der  $z$ -Komponente des Spins nicht. Wenn wir hingegen versuchen, die Zeitentwicklung umzudrehen indem wir nochmals den Zeitentwicklungsoperator  $U$  anwenden, so erhalten wir eine Mischung, die keine Kohärenz mehr aufweist zwischen den beiden Basiszuständen. Nach der versuchten Zeitumkehr finden wir ein Ensemble von Spins, die mit der Zustandsfunktion

$$|u\rangle + e^{i\phi_i} |d\rangle$$

beschrieben werden können, wobei  $\phi_i$  eine Zufallsvariable darstellt. Offenbar entspricht jeder dieser Zustände einem Spin, der in der xy-Richtung orientiert ist; die Verteilung ist jedoch in dieser Ebene isotrop, so dass der Mittelwert verschwindet.

Diese Betrachtung kann eine Idee geben weshalb die Zeitumkehr im Fall der Schrödingerkatze nicht funktioniert, d.h. weshalb Superpositionszustände zwischen makroskopisch unterscheidbaren Zuständen so extrem fragil sind. Voraussetzung für eine effektive Zeitumkehr wäre offenbar dass die Phasen der beteiligten Zustände exakt dem mathematischen Wert entsprechen. Dass dies praktisch nicht möglich ist kann man leicht am Beispiel des Eisenmagneten zeigen: die Energie der beiden entgegengesetzten Spinzustände hängt stark von einem äußeren Magnetfeld ab:

$$\Delta\mathcal{E} = N \cdot 6 \cdot 10^{10} \text{ Hz/T} .$$

In einem typischen Labor findet man Felder in der Größenordnung von  $10^{-4}$  T, aber wir wollen optimistischerweise annehmen dass wir sie bis auf  $10^{-10}$  T reduzieren können. Für die angenommene Zahl von  $N = 10^{20}$  Spins erhält man dann eine Verschiebung von

$$\Delta\mathcal{E} = 6 \cdot 10^{20} \text{ Hz} .$$

Dies bedeutet, dass schon nach  $10^{-20}$  Sekunden die Phase des experimentellen Superpositionszustandes sich völlig von derjenigen des theoretischen Zustandes unterscheidet. Dies bedeutet, dass die zweite Anwendung des Operators U das System in einen anderen Zustand bringt als den Ausgangszustand. Diese extreme Empfindlichkeit auf externe Störungen ist eine allgemeine Eigenschaft von makroskopischen Systemen. Sie führt dazu, dass eine wirkliche Zeitumkehr in solchen Systemen ausgeschlossen ist.

#### **4.2.6. Kopplung an die Umgebung**

Die Quantenmechanik geht immer davon aus, dass das betrachtete System vom Rest des Universums unabhängig ist. Es ist aber tatsächlich nicht möglich, ein System vollständig von der Umgebung zu isolieren. Im obigen Beispiel kam diese Kopplung durch magnetische Streufelder zustande. Es gibt aber noch sehr viele weitere Kopplungen die nicht nur in der Praxis, sondern auch fundamental nicht zu eliminieren sind. So koppelt jedes System ans Strahlungsfeld und Gravitationseffekte können nicht abgeschirmt werden. Da es nicht möglich ist, den Einfluss der Umgebung exakt zu beschreiben soll an dieser Stelle nur wiederum anhand eines einfachen Modells gezeigt werden, wie sich diese Wechselwirkung auf die diskutierten Zustände auswirkt.

Man kann sich aber trotzdem einmal überlegen, was passieren würde, wenn es möglich wäre, ein quantenmechanisches System vollständig von der Umgebung zu isolieren, abgesehen von der Kopplung an den Messapparat. Von dieser nehmen wir

an, dass sie durch den Formalismus von von Neumann beschrieben werden kann, also durch einen Wechselwirkungsoperator, der einen verschränkten Zustand

$$|u,U\rangle + |d,D\rangle$$

zwischen System und Messapparat erzeugt. Dieser Messapparat ist nun notwendigerweise an die Umgebung gekoppelt. Wir gehen davon aus, dass die Umgebung in der gleichen Weise koppelt wie ein weiterer Messapparat und beschreiben sie wiederum durch ein Zweiniveausystem mit den Zuständen  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$ . Befindet sie sich zunächst im Zustand  $|\alpha\rangle$ , d.h. das Gesamtsystem ist im Zustand

$$(|u,U\rangle + |d,D\rangle) \otimes |\alpha\rangle$$

so erzeugt die Wechselwirkung daraus einen Zustand

$$(|u,U,\alpha\rangle + |d,D,\beta\rangle) ,$$

bei dem der Spin nicht nur mit dem Messapparat, sondern auch mit der Umgebung verschränkt ist.

Da diese Umgebungsvariable nicht kontrollierbar ist und auch nicht beobachtet wird macht allerdings diese Zustandsfunktion letztlich keinen Sinn. Man ist deshalb gezwungen, die Badvariablen  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta\rangle$  zu eliminieren. Dies ist im Formalismus der Zustandsvektoren allerdings nicht möglich, man benötigt dafür den Dichteoperatorformalismus. Wir können an dieser Stelle lediglich qualitativ beschreiben dass dies grob einem System entspricht, in dem eine Reihe von Einzelsystemen sich durch die relative Phase zwischen den beiden Basiszuständen unterscheiden:

$$\Psi_i = |u,U\rangle + e^{i\phi_i} |d,D\rangle .$$

$\phi_i$  ist hier eine Zufallsvariable, die von Einzelatom zu Einzelatom variiert. Die Resultate der Messung werden somit durch die Kopplung ans Bad nicht verändert; wie oben gezeigt funktioniert allerdings die Zeitumkehr nicht mehr.

In der Basis  $|u\rangle$ ,  $|d\rangle$  des zu messenden Spins betrachtet ist somit die relative Phase zwischen den beiden Zuständen verloren gegangen, obwohl wir hier angenommen haben, dass der Spin nur auf eine deterministische, exakte Weise an den Messapparat gekoppelt wurde uns sonst vollständig von der Umgebung abgekoppelt war. Es ist aber letztlich die unvermeidbare Kopplung des Messapparates an die Umgebung, welche aufgrund der Tatsache dass es sich um einen verschränkten Zustand handelt, auch die Spin-Variablen beeinflusst.

#### **4.2.7. Grenzen des Superpositionsprinzips**

Offenbar gilt das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik nicht uneingeschränkt. Prinzipiell scheinen Zustände verboten zu sein, welche Superpositionen von makroskopisch unterscheidbaren Zuständen darstellen.

Um besser zu verstehen, warum solche Zustände verboten sind versucht man sie spezifisch zu erzeugen. Sie werden dann entweder als "Schrödinger-Katze Zustände" oder, vielleicht etwas sachlicher, als makroskopische Quantenkohärenz (macroscopic quantum coherence, MQC) bezeichnet. Im folgenden Kapitel werden einige experimentelle Beispiele diskutiert.

Man kann sich jetzt natürlich auch die Frage stellen, was denn passieren würde wenn wir am angenommenen Superpositionszustand nicht die Messung (tot / lebendig) durchführen würden, sondern gerade auf einen Superpositionszustand getestet hätten. Formal ausgedrückt kann die Messung (tot / lebendig) in seiner Eigenbasis mit dem Operator  $\sigma_z$  beschrieben werden, wobei der Eigenwert +1 z.B. dem Resultat lebendig, tot dem Eigenwert -1 zugeordnet werden kann. Rein formal wäre es dann auch möglich, einen Operator  $\sigma_x$  zu verwenden. Das Resultat einer Messung mit diesem Operator wäre ein Eigenwert +1 zum Superpositionszustand  $\Psi_1 + \Psi_t$ , resp. -1 zum Zustand  $\Psi_1 - \Psi_t$ . Eine Reihe von solchen Messungen würden immer wieder bestätigen dass die Katze sich in einem Superpositionszustand befindet, sie würde also immer in diesem Zustand verharren.

Man kann eigentlich noch weiter gehen: für makroskopische Systeme sind nicht nur Superpositionszustände nicht erlaubt, sie können streng genommen nicht mit einer Wellenfunktion beschrieben werden. Dies liegt im wesentlichen am geringen Energieunterschied zwischen den Eigenzuständen, welcher dazu führt, dass jede Wechselwirkung mit der Umgebung größer ist als der Abstand zwischen zwei Energieniveaus. Somit ist Störungsrechnung nicht mehr anwendbar, und auch von Neumanns Theorie des Messprozesses ist nicht anwendbar.

#### **4.2.8. Superauswahlregeln**

Dass es nicht möglich ist, eine Messung des Zustandes  $\Psi_1 + \Psi_t$  durchzuführen liegt daran, dass keine Messapparatur konstruiert werden kann, die diesem Operator entspricht. Diese Tatsache, welche festlegt, welche Größen klassisch beobachtbar sind ( $\sigma_z$ , nicht  $\sigma_x$ ) wird z.T. als "Superauswahlregel" bezeichnet. Es gibt allerdings vorläufig nur einzelne Modelle, die versuchen aufzuzeigen, weshalb gerade die eine oder die andere Variable von der Natur "gewählt" wird.

Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die Vorstellung, dass Messungen nicht nur von einem dafür hergestellten Apparat, sondern auch durch die "natürliche" Umgebung durchgeführt werden: jede Kopplung an die Umgebung hat eine Form die grundsätzlich ähnlich aussieht wie der von Neumann'sche Messprozess. Umgebungsvariablen, die hierbei eine Rolle spielen, sind insbesondere diejenigen des Strahlungsfeldes.

Offenbar sind es gerade diejenigen Variablen, die wir aus der klassischen Physik kennen, welche diese Superauswahlregeln erfüllen. Eine solche klassische Variable, die wir mit einem experimentellen Aufbau messen können, muss bestimmte Bedingungen erfüllen. So muss offenbar der Apparat robust sein gegen die Kopplung an die Umgebung (das "Bad"). Das kann man leicht im quantenmechanischen Formalis-

mus festhalten wenn man für den Operator der Kopplung zwischen Messapparat und Bad  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  schreibt. Dann muss gelten

$$[A, \mathcal{H}_{\text{int}}] = 0$$

damit die Kopplung ans Bad nicht das Resultat der Messung stört.

Literatur: W.H. Zurek, '*Pointer basis of quantum apparatus: into what mixture does the wave packet collapse?*', Phys. Rev. D 24, 1516-1525 (1981); W.H. Zurek, '*Environment-induced superselection rules*', Phys. Rev. D 26, 1862-1880 (1982).

Dieses scheinbare Paradox kann auch leicht an Molekülen diskutiert werden: Da der Hamiltonoperator eines Moleküls in guter Näherung gerade Parität aufweist würde man erwarten dass die Grundzustände der Moleküle ebenfalls gerade Parität aufweisen. Dies ist aber in vielen Fällen nicht der Fall, so z.B. bei fast allen Biomolekülen (Proteine, DNS etc.). Dies kann vereinfacht darauf zurückgeführt werden, dass die Wechselwirkung mit der Umgebung, insbesondere dem Strahlungsfeld, eine bevorzugte Basis festlegt, nämlich diejenige mit lokalisierten Kernkoordinaten (E. Joos and H.D. Zeh, '*The emergence of classical properties through interaction with the environment*', Z. Phys. B 59, 223-243 (1985)). Man kann sich dies in grober Analogie zu einem klassischen System vorstellen, bei dem die Wechselwirkung mit der Umgebung zur Brown'schen Bewegung führt; hier führen die Stöße mit den Photonen zu einer Lokalisierung (A.O. Caldeira and A.J. Leggett, '*Path integral approach to quantum Brownian motion*', Physica 121 A, 587-616 (1983)).

Die Tatsache dass die Positionsvariable in der klassischen Physik eine herausragende Rolle spielt kann letztlich darauf zurückgeführt werden, dass die Wechselwirkungen mit der Distanz abnehmen (W.H. Zurek and J.P. Paz, '*Decoherence, Chaos, and the Second Law*', Phys. Rev. Lett. 72, 2508-2511 (1994); J.P. Paz, S. Habib, and W.H. Zurek, '*Reduction of the wave packet: Preferred observable and decoherence time scale*', Phys. Rev. D 47, 488-500 (1993)).

## 4.3 Verschränkte Zustände in Modellsystemen

### 4.3.1. Freie Atome

In den letzten Jahren gab es viele Arbeiten, welche zum Ziel hatten, Superpositionszustände zu erzeugen und zu beobachten, welche die Eigenschaften von Schrödinger's Katze annähern. Dies stellt experimentell sehr hohe Anforderungen, da wie bereits erwähnt diese Zustände sehr empfindlich sind. Es gibt im wesentlichen zwei Ansätze die zu Erfolgen geführt haben: zum einen einzelne Atome oder Ionen, zum anderen Photonen.

Wenn bei Atomen die Welleneigenschaften ausgenutzt werden ist es möglich, sie wie Photonen in zwei Teilstrahlen zu teilen, die räumlich getrennt sind. Der Superpositionszustand zwischen den beiden Teilstrahlen kann zu einer Art "Schrödinger-Katze" werden wenn er mit einer inneren Variablen verschränkt wird. **Z: Strahlteiler**

Dies ist z.B. dann der Fall wenn ein Atom mit einem Laserpuls angeregt wird und der Puls so gewählt wird, dass das Atom gerade 50% Wahrscheinlichkeit aufweist, in den angeregten Zustand überzugehen. Ausgehend von einem Grundzustandsatom  $|g\rangle$  erzeugt der Laserpuls dann einen Zustand **Z: Puls als Strahlteiler**

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|g;0\rangle + |e;\hbar k\rangle ,$$

d.h. einen verschränkten Zustand von eines Atoms im Grundzustand in Ruhe und eines angeregten Zustandes mit Impuls  $\hbar k$ . Der unterschiedliche Impuls führt dazu, dass der Zustand zu einem späteren Zeitpunkt einem verschränkten Zustand aus einem Grundzustandsatom im Ursprung und einem angeregten Atom am Ort  $\hbar kt/M$  entspricht ( $M$  = Masse des Atoms).

### 4.3.2. Gebundene Systeme

Da es sich hier um einen freien Zustand handelt erhält man i.a. eine Dispersion, d.h. ein Zerfließen des Wellenpaketes. Dies kann man vermeiden indem man entsprechende Zustände in gebundenen Systemen erzeugt. (C. Monroe, D.M. Meekhof, B.E. King, and D.J. Wineland, 'A "Schrödinger Cat" superposition state of an atom', Science 272, 1131-1136 (1996). ). Monroe und Mitarbeiter verwendeten dafür ein  ${}^9\text{Be}^+$  Ion, das in einer Radiofrequenz-Falle gespeichert war.

Die angelegten RF Felder erzeugen ein effektives Potential, welches in guter Näherung dem eines harmonischen Oszillators entspricht. In einem harmonischen Oszillator kann man Superpositionen der Eigenzustände erzeugen, welche in guter Näherung einem klassischen lokalisierten Wellenpaket entsprechen. Sie waren in diesem Fall verschränkt mit einer internen Zustandsvariablen: es handelte sich um unterschiedliche Hyperfeinzustände. **Z: Harmonischer Oszillator**

Mit einer geeigneten Sequenz von Laserpulsen erzeugten Sie eine Superposition von zwei solchen Wellenpaketen, welche räumlich um etwa 80 nm getrennt waren, während die einzelnen Wellenpakete eine Ausdehnung von etwa 7 nm hatten. Sie waren somit räumlich klar getrennt, nicht nur im Vergleich zum Atomdurchmesser von etwa 0.1 nm.

### **Z: Wellenpakete**

Superpositionszustände dieser Art können wieder in einen lokalisierten Zustand gebracht werden, z.B. über Zeitumkehr in den Ausgangszustand. (Wie dies experimentell realisiert werden kann soll hier nicht diskutiert werden.) Dies ist möglich solange es sich um eine vollständig kohärente Superposition zwischen den beiden Basiszuständen handelt, d.h. solange die Phasenbeziehung für alle Atome identisch erhalten bleibt. Wenn diese zerfällt, d.h. wenn es sich nicht mehr um eine kohärente Superposition, sondern um eine statistische Mischung handelt, so verschwinden diese Interferenzterme. Wie können somit überprüfen, ob es sich (noch) um einen kohärenten Überlagerungszustand handelt, d.h. ob die Zeitentwicklung noch umkehrbar ist, wenn wir die Interferenzterme suchen.

Um die Interferenz zu beobachten muss man die beiden Wellenpakete überlagern. Zu diesem Zweck wurden jeweils ein Zustand mit Amplitude  $\alpha$  und Phase  $\pm\phi$  überlagert und die resultierende Aufenthaltswahrscheinlichkeit gemessen. Der resultierende Superpositionszustand

### **Z: Amplitude $\alpha$ und Phase $\pm\phi$**

$$\frac{1}{\sqrt{2}} ( |\alpha e^{i\phi/2}\rangle - |\alpha e^{-i\phi/2}\rangle )$$

zeigt für verschwindende Phase  $\phi$  negative Interferenz, d.h. die Wahrscheinlichkeit, das Ion in diesem Zustand zu finden verschwindet.

Aufgetragen ist die Wahrscheinlichkeit, das Atom zu finden als Funktion der Phase  $\phi$ , welche als eine Abstandskoordinate der beiden Teile im Phasenraum verstanden werden kann. Die Resultate wurden so skaliert dass 0.5 einer statistischen Mischung der beiden getrennten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten entspricht; eine Abweichung nach oben zeigt konstruktive Interferenz, eine Abweichung nach unten negative Interferenz, d.h. Auslöschung.

### **F: Interferenz**

Offenbar findet man für  $\phi=0$  immer Interferenz. In den hier gezeigten Resultate ist sie negativ, was auf die relative Phase zwischen den beiden Teilzuständen zurückzuführen ist. Für größere Phasenwinkel nimmt die Interferenz ab. Nimmt auch die Amplitude  $\alpha$  des harmonischen Oszillators zu, so findet man eine oszillatorische Abhängigkeit der Interferenz von der Phase  $\phi$ . Je größer die Amplitude  $\alpha$  desto kürzer wird die Periode dieser Oszillation. Bei einem makroskopischen Zustand wie einer Katze wäre die Oszillationsperiode so kurz dass sie nicht mehr beobachtbar wäre. In diesem experimentellen Beispiel nimmt die Sichtbarkeit der Interferenz bereits bei einer Anregung von  $\alpha = 2.97$  deutlich ab.

### 4.3.3. Optische Modellsysteme

Abgesehen von einzelnen Atomen oder Ionen eignen sich optische Systeme gut als Modellsysteme: Photonen sind einerseits relativ gut von der Umgebung isoliert und können damit gegen Wechselwirkungen geschützt werden, welche zum Kollaps der Wellenfunktion führen. Außerdem sind sie leicht zu erzeugen und nachzuweisen.

Optische Zustände, die klassisch unterscheidbar sind, sind z.B. Zustände mit gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Phase. Man kann dies gut in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen, in dem die Amplitude des Feldes durch den Radius  $r$  gegeben ist, die Phase durch den Winkel  $\phi$ . Aufgrund der quantenmechanischen Unschärfe ist ein Feldzustand in dieser Darstellung nie durch einen Punkt, sondern typischerweise durch einen Kreis dargestellt, welcher die Unschärfe des Zustandes darstellt. Ein Laserfeld z.B. wird durch einen kohärenten Zustand beschrieben, welcher die minimal erlaubte Unschärfe besitzt.

#### **Z: Zustand in xy-Ebene**

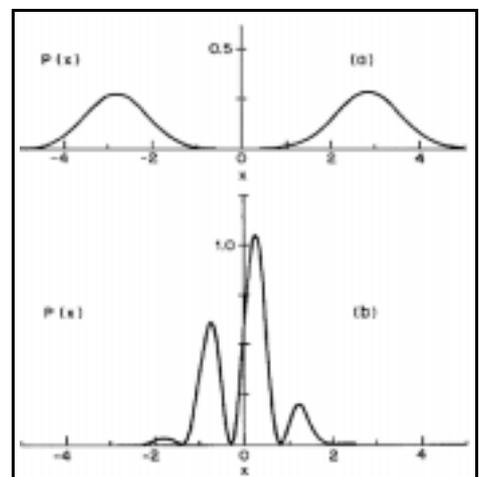
Einen Superpositionszustand zwischen zwei Zuständen mit (annähernd) gleicher Amplitude und entgegengesetzter Phase kann man erzeugen indem man einen solchen Zustand durch ein optisch nichtlineares Medium schickt, welches eine Phasenverschiebung erzeugt, die proportional zur Amplitude des Lichtes ist. Man kann somit prinzipiell die Länge des Kristalls so wählen, dass die Phase der Zustände mit ungerader Photonenzahl gerade um 180 Grad ändert, während die Phase der Zustände mit gerader Photonenzahl sich um 360 Grad ändert (B. Yurke and D. Stoler, 'Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion', Phys. Rev. Lett. 57, 13-16 (1986)). Ist die Zahl der beteiligten Zustände genügend groß, so erhält man somit eine kohärente Superposition von zwei Zuständen die sich im wesentlichen durch ihre Phase unterscheiden.

Eine Möglichkeit, diese Interferenzterme darzustellen ist die Wigner-Verteilung, die eine Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustandsfunktion in Abhängigkeit von Ort und Impuls darstellt. Für eine Superposition von räumlich getrennten Zuständen findet man zwischen den beiden eine oszillatorische Abhängigkeit, bei der negative Pseudowahrscheinlichkeiten auftreten.

#### **F: Wigner Verteilung**

Man kann solche Zustände mit einem sogenannten Homodyn Detektor messen. Dies ist im wesentlichen ein phasenempfindlicher optischer Detektor (im Gegensatz zu einem einfachen Detektor, welcher nur die Intensität misst). Je nach Wahl der Phase erwartet man entweder zwei getrennte Peaks oder ein Interferenzmuster zwischen den beiden.

Diese Zustände weisen charakteristische Interferenzmuster auf.



### 4.3.4. Dekohärenz

Allerdings sind diese Interferenzen extrem empfindlich auf Rauschen oder Verluste, d.h. sie zerfallen sehr rasch (W.H. Zurek, 'Decoherence and the transition from quantum to classical', Physics Today October 1991, 36-44 (1991.)). Dies ist letztlich ein Teil der Lösung (der einfache Teil) für das Messproblem der Quantenmechanik.

Dies ist letztlich der Grund dafür dass sie so schwer zu beobachten sind. Für einen Superpositionszustand mit einer mittleren Photonenzahl  $n = 5$  verschwinden die Interferenzmuster schon wenn mehr als 5% Verluste (z.B. durch einen nicht perfekten Detektor) vorhanden sind. Jede Art von Rauschen oder Verlusten führt zu einer raschen Zerstörung der Kohärenz.

Der Grund dafür dass solche Zustände normalerweise nicht auftreten ist die sogenannte Dekohärenz. Sie führt dazu, dass Zustände, die eine Superposition von klassisch unterscheidbaren Zuständen darstellen, rasch zerfallen, dass also die makroskopische Quantenkohärenz verloren geht. Wesentlich für die Geschwindigkeit dieses Zerfalls ist der "klassische Abstand", welcher bestimmt wie gut die beiden Zustände klassisch unterscheidbar sind.

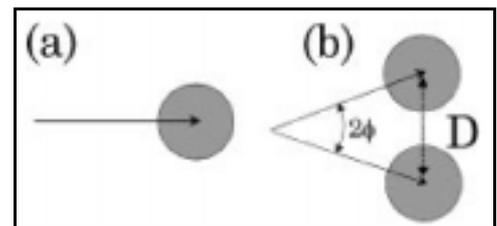
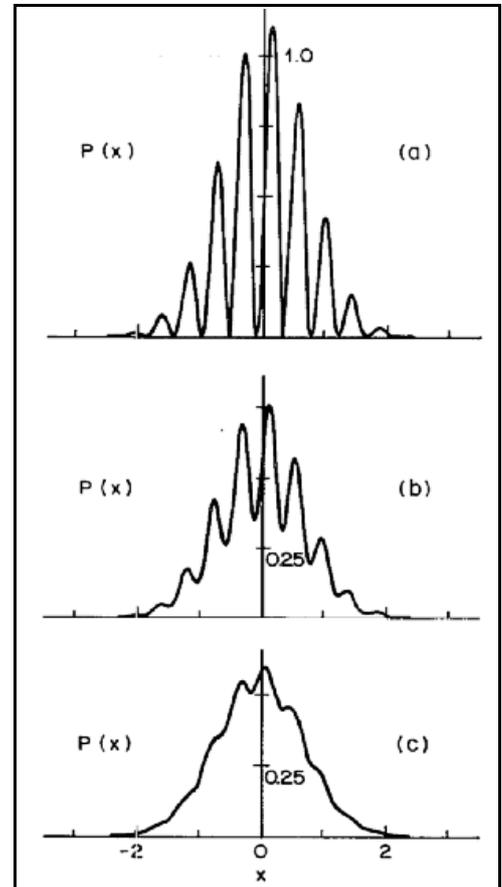
Als Beispiel können wir einen Zustand betrachten, der durch die Superposition zwischen zwei kohärenten Zuständen gegeben ist, welche 180 Grad außer Phase sind:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$$

Diese Kohärenz zerfällt mit der normalen Dämpfungsrate  $\gamma$  des Feldes, multipliziert mit dem Quadrat des Abstandes  $4|\alpha|^2$ , d.h.

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) e^{-\gamma(4|\alpha|^2)t}$$

Sind die beiden Zustände nicht um 180 Grad im Phasenraum getrennt, so kann man den entsprechenden Zustand schreiben als  $|\alpha e^{i\phi}\rangle$ . Wenn man ein solches Feld verwendet um eine Messung an einem Zweiniveaumatome durchzuführen (oder umgekehrt), so erhält man nach von Neumann einen verschränkten Zustand



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( |e, \alpha e^{i\phi}\rangle + |g, \alpha e^{-i\phi}\rangle )$$

Wenn die "Distanz"  $D = 2 n \sin\phi$  zwischen den beiden Zuständen groß genug ist kann man diesen Zustand als Schrödinger-Katze Zustand bezeichnen. Für genügend großen Abstand  $D$  ist die Zerfallsrate ist proportional zu  $D$ :  $\tau_{SK} = \tau/D^2$ , wobei  $\tau$  die "normale" Zerfallsrate darstellt. Für makroskopische Abstände ist die Dämpfungszeit deshalb so kurz dass sie nicht mehr beobachtet werden können.

#### 4.3.5. Dekohärenz in räumlich getrennten Systemen

Sehr analog verhält sich ein **Z: Superpositionszustand, Kopplung** eine Superposition von zwei räumlich getrennten Zuständen. Man kann z.B. ein Modell diskutieren, welches eine einfache Kopplung ans Strahlungsfeld beinhaltet. Man findet eine Lebensdauer für die Außerdiagonalelemente von

$$\tau_d \approx \tau_r \frac{\hbar^2}{2mk_B T(\Delta x)^2} = \tau_r \left( \frac{\lambda_T}{\Delta x} \right)^2$$

$\tau_r$  ist die Relaxationszeit und

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T}}$$

die thermische de Broglie Wellenlänge. Bei  $T =$  Raumtemperatur und  $m =$  Elektronenmasse besitzt diese den Wert

$$\lambda_T = \frac{10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-30} \cdot 4 \cdot 10^{-21}}} = \frac{10^{-34}}{10^{-25}} = 10^{-9} \text{ m}$$

Für makroskopische Abstände zerfällt somit die Superposition sehr schnell. Die charakteristische Länge  $\lambda_T$  hängt ab von der Temperatur und dem Verhältnis  $\hbar^2/m$ : Für kleines  $\hbar$  und große Massen, also im klassischen Grenzfall, sind nur sehr kleine Abstände erlaubt.

Superpositionszustände dieser Art entstehen u.a. im Rahmen des Jaynes-Cummings Modells zwischen zwei "Revivals" (V. Buzek, H. Moya-Cessa, P.L. Knight, and S.J.D. Phoenix, 'Schrödinger-cat states in the resonant Jaynes-Cummings model: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution', Phys. Rev. A 45, 8190-8203 (1992). ).

#### 4.3.6. Experimentelle Beobachtung der Dekohärenz

Die Dekohärenz, d.h. der Zerfall der Phasenbeziehung zwischen klassisch unterschiedlichen Zuständen kann als ein Schritt im Übergang vom Bereich der Quantenmechanik zur klassischen Physik betrachtet werden (W.H. Zurek, 'Decoherence and the transition from quantum to classical', Physics Today October 1991, 36-44 (1991).). Es ist deshalb

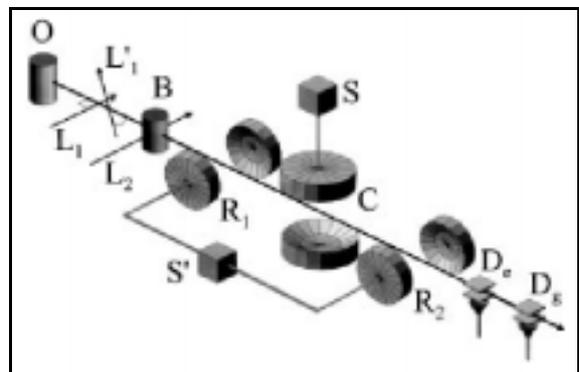
interessant, ihn auch experimentell zu beobachten. Dies hat eine Gruppe von der ENS getan indem sie ein elektromagnetischen Feld mit Hilfe von Atomen "gemessen" hat (M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.M. Raimond, and S. Haroche, 'Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement', Phys. Rev. Lett. 77, 4887-4881 (1996). ).

VOLUME 77, NUMBER 24	PHYSICAL REVIEW LETTERS	9 DECEMBER 1996
<b>Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement</b>		
M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche <i>Laboratoire Kastler Brossel,* Département de Physique de l'École Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France (Received 10 September 1996)</i>		

Um ein beobachtbares System zu erhalten wurde das Experiment in einem supraleitenden Mikrowellenresonator durchgeführt, der als Fabry-Perot Resonator ausgelegt war. Die beiden Spiegel sind mit Niob beschichtet, das mit flüssigem Helium gekühlt war um sie supraleitend zu machen und damit eine hohe Reflektivität zu erreichen. Damit kann die Güte des Resonators bis auf  $Q = 5 \cdot 10^7$  gesteigert und eine Lebensdauer der Photonen von 150  $\mu$ s erreicht werden.

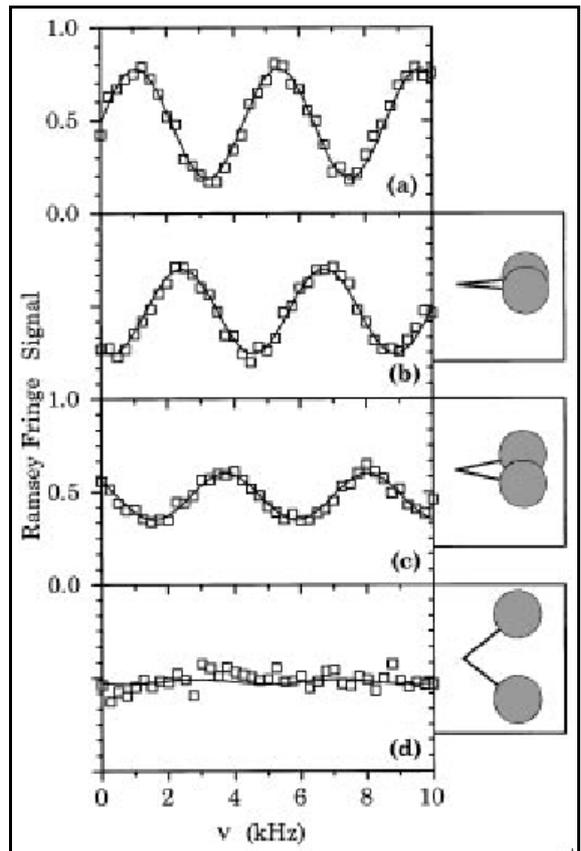
### Z: Fabry-Perot Resonator

Das Experiment wurde durchgeführt indem ein Strahl von Rubidiumatomen durch eine Anordnung von Resonatoren geschickt wurde, welche auf etwa 0.6 K gekühlt waren um thermische Photonen zu eliminieren. Die atomaren Zustände sind hochangeregte Rydbergzustände und die Übergangsfrequenz liegt im Bereich von 40 GHz. In B werden die Atome in einen Rydbergzustand gebracht. In  $R_1$  wird ein Superpositionszustand aus zwei Rydbergzuständen erzeugt. Im Resonator C befindet sich ein Mikrowellenfeld, welches nur wenige Photonen enthält. Das Atom wird durch den Resonator  $R_1$  in einen Superpositionszustand zwischen zwei Rydbergzuständen gebracht. Da die beiden Zustände unterschiedlich an das Resonatorfeld koppeln führt die Wechselwirkung zwischen Atom und Feld im Resonator C zu einem verschränkten Zustand. Eine Messung des Zustands des Atoms erlaubt somit den Rückschluss auf die Stärke des Feldes.

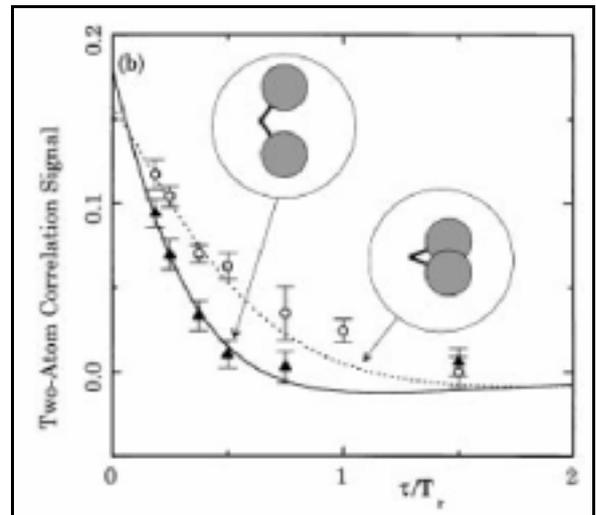


Bei diesem Experiment sollte jetzt aber nicht die Stärke des Feld im Resonator bestimmt werden, sondern die Kohärenz des resultierenden Superpositionszustandes, also die relative Phase bestimmt werden. Dafür wurde ein zweiter Mikrowellenpuls angelegt, welcher die Kohärenz in eine Population überführt, die mit dem Zähler  $D_e$ , resp.  $D_g$  gemessen werden kann.

Die resultierende Population des Grundzustandes wurde als Funktion der Mikrowellenfrequenz gemessen. Aufgrund der Flugzeit der Atome durch die Anlage erhält man eine oszillatorische Abhängigkeit des Signals von der Frequenz, wobei die Amplitude der Oszillation angibt wie groß die Kohärenz ist. Man beobachtet, dass die Kohärenz geringer wird wenn der Abstand zwischen den beiden klassisch unterscheidbaren Komponenten größer wird.



Im vorliegenden Experiment konnte die Sichtbarkeit der Interferenz auch als Funktion der Flugzeit gemessen werden, so dass direkt der Zerfall beobachtet werden konnte. Es zeigte sich, dass die geringere Amplitude der Interferenzmuster bei großen Abständen auf einen schnelleren Zerfall zurückgeführt werden kann, wie theoretisch vorausgesagt.



## 4.4 Weitere Interpretationen und Modelle

### 4.4.1. Statistische Interpretation

Offenbar kann also der Messprozess im üblichen Sinn, d.h. die Projektion auf einen Eigenzustand der Observablen nicht quantenmechanisch beschrieben werden. Daran hat sich auch bis heute nichts grundsätzliches geändert. Lediglich wenn man sich auf eine statistische Interpretation beschränkt kann der Vorgang an einer ganzen Reihe von Modellen realistisch diskutiert werden. Statistische Interpretation bedeutet hier, dass man den Anspruch der Kopenhagener Interpretation aufgibt, dass die Quantenmechanik Aussagen über Einzelsysteme liefert, sondern im Gegensatz dazu davon ausgeht, dass nur die Verhältnisse der möglichen Messresultate für ein unendlich großes Ensemble von Einzelmessungen vorausgesagt werden. Literatur: L.E. Ballentine, *'The statistical interpretation of quantum mechanics'*, Rev. Mod. Phys. 42, 358-381 (1970).

Ausgangspunkt für die statistische Interpretation ist die Annahme dass die Zustandsfunktion (oder genauer der Dichteoperator) nicht ein Einzelsystem beschreibt, sondern ein Ensemble von Systemen (z.B. Elektronen), welche möglichst identisch präpariert wurden. Der Zustandsvektor gilt dann als eine Art Abkürzung für die Präparation des Zustandes. Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Ansatzes ist, dass die Einzelsysteme nicht miteinander wechselwirken. Als Prototyp kann man z.B. einen Atomstrahl betrachten, sofern die Dichte so gering ist, dass sich zu einem bestimmten Zeitpunkt jeweils nur ein Atom im Apparat befindet.

Die statistische Interpretation der Quantenmechanik sollte auch nicht mit der statistischen Mechanik verwechselt werden. In beiden Fällen betrachtet man zwar ein Ensemble das aus vielen identischen Teilchen besteht. Im Fall der Quantenmechanik erfolgen die Aussagen aber über eine Reihe von Messungen an einzelnen Elektronen, während die statistische Mechanik Aussagen über einzelne Messungen am gesamten Ensemble macht.

### 4.4.2. Statistische Beschreibung des Messprozesses

Beim von Neumann'schen Modell des Messprozesses hatten wir als Resultat der Messung einer binären Variablen den verschränkten Zustand

$$\Psi(t) = (d_a \Psi_a \otimes \xi_a + d_b \Psi_b \otimes \xi_b)$$

erhalten. Verallgemeinert auf eine Variable mit beliebiger Anzahl von Eigenwerten lautet der entsprechende Ausdruck

$$\Psi(t) = \sum_n d_n \Psi_n \otimes \xi_n .$$

Dieser Zustand entspricht einer Summe über alle möglichen Zustände  $\Psi_n$  des quantenmechanischen Systems, welche jeweils zu den entsprechenden Zuständen  $\xi_n$  des Messapparates korreliert sind.

Eine sinnvolle Anwendung der statistischen Interpretation erhält man erst über den statistischen Operator, d.h. den Dichteoperator. Dieser lautet für den betrachteten Zustand nach der Kopplungsphase des Messprozesses

$$\rho(t) = \sum_{nm} d_n d_m^* |\Psi_n \otimes \xi_n\rangle \langle \Psi_m \otimes \xi_m| ,$$

d.h. er enthält Diagonal- und Außerdiagonalelemente zwischen allen möglichen Resultaten des Messprozesses. Bezogen auf das Spin- $\frac{1}{2}$  System erhält man zwei Diagonal- und zwei Außerdiagonalelemente. **Z:Dichteoperator**

Die zu Beginn dieses Kapitels diskutierten Modelle zeigten, dass die Wechselwirkung des Messapparates mit der Umgebung zu zufälligen Phasenfaktoren der einzelnen Eigenzustände führt. Wird z.B. der Eigenzustand  $\xi_j$  des Messapparates mit einem zufälligen Phasenfaktor  $e^{i\phi_j}$  multipliziert, so beeinflusst dies nicht das entsprechende Diagonalelement des Dichteoperators

$$\rho_{jj}(t) = d_j d_j^* = d_j e^{i\phi_j} d_j^* e^{-i\phi_j} ,$$

doch die Außerdiagonalelemente zwischen diesem und den anderen Eigenzuständen werden mit dem entsprechenden Phasenfaktor multipliziert:

$$\rho_{jk}(t) = e^{i\phi_j} d_j d_k^* .$$

Bei einer Summierung über verschiedene Einzelsysteme erhält man somit destruktive Interferenz, d.h. die Diagonalelemente verschwinden. Der resultierende Dichteoperator wird somit

$$\rho(t++) = \sum_k |d_k|^2 |\Psi_k \otimes \xi_k\rangle \langle \Psi_k \otimes \xi_k| .$$

Der Unterschied zur vorhergehenden Form ist dass dieser Zustand nicht mehr durch einen Zustandsvektor beschrieben werden kann. Man bezeichnet Zustände dieser Art als gemischt, im Gegensatz zu den reinen Zuständen, die sowohl durch einen Zustandsvektor als auch durch einen Dichteoperator dargestellt werden können. Reine Zustände können sowohl Einzelsysteme als auch Ensembles beschreiben; gemischte Zustände beschreiben immer Ensembles.

#### 4.4.3. Vergleich und Bewertung

Bezogen auf die Schrödinger'sche Katze würde man sagen, dass sich das System nicht mehr in einem Superpositionszustand zwischen tot und lebendig befindet. Mit dem Zerfall der Außerdiagonalelemente ist die Möglichkeit einer Zeitumkehr nicht mehr gegeben, das System hat sich somit für den einen oder anderen Zustand "entschieden". Die Diagonalelemente beschreiben direkt die Wahrscheinlichkeiten dafür dass man den einen oder anderen Messwert findet. Aussagen über das Einzelsystem können daraus aber nicht abgeleitet werden.

Diese Form für das Ensemble folgt natürlich automatisch wenn man für jedes Einzelsystem das Reduktionspostulat verwendet. Das umgekehrt ist jedoch nicht der Fall: aus dem Resultat dieser Rechnung oder aus der Messung an einem Ensemble kann man nicht "beweisen", dass im Einzelfall eine Reduktion des Zustandsvektors geschieht. Das Resultat zeigt lediglich, dass man bei einer statistischen Interpretation auf das Projektionspostulat verzichten kann, dass also gute Modelle existieren, bei denen die Schrödingergleichung allein den Dichteoperator in eine Diagonalform bringt.

### **Z/F: Zerfall der Außerdiagonalelemente / Reduktion**

Man kann den Reduktionsteil des Messprozesses (d.h. die Weiterentwicklung des Zustandes nach der von Neumann'schen Kopplungsphase) in Gedanken in zwei Teile trennen: der erste entspricht dem Zerfall der Außerdiagonalelemente, welcher durch die Wechselwirkung des Apparates mit der Umgebung beschrieben werden kann, der zweite dem Übergang von einer statistischen Mischung der möglichen Messresultate zum einzelnen Resultat. Der erste Schritt kann in Modellen diskutiert werden, der zweite nicht. Wenn wir den Anspruch an die Quantenmechanik darauf beschränken, Aussagen über statistische Ensembles zu erhalten, kann das Messproblem somit als gelöst betrachtet werden, da der zweite Schritt hier nicht auftritt.

Es bleiben in diesem Rahmen zwei Probleme: Zum einen der ästhetisch unbefriedigende Aspekt dass wir keine Theorie für Einzelsysteme haben, zum anderen das Problem, dass exakte statistische Aussagen erst für unendliche viele Messungen gemacht werden können, während typische Experimente nur eine geringe endliche Zahl von Messungen umfassen.

#### **4.4.4. Experimente an Einzelsystemen**

Die Ansicht, dass die Quantenmechanik "nur" Aussagen über die statistische Verteilung einer großen Zahl von Messungen macht bietet somit die Möglichkeit, wesentliche Teile des Messproblems zu umgehen, d.h. das Paradox aufzulösen. Bis vor einigen Jahren war dies vom Standpunkt des Experimentalphysikers eine vollständige Auflösung, da man experimentell immer mit einer möglichst großen Zahl von Atomen, Molekülen oder Photonen arbeitete, welche in einen möglichst identischen Zustand gebracht wurden.

Dies hat sich in der Zwischenzeit erheblich geändert. Experimente an einzelnen Atomen, Molekülen oder Photonen sind inzwischen fast zur Routine geworden und damit wird vermehrt die Frage gestellt, was man denn über den Einzelfall aussagen könne. Die grundsätzliche Frage ist letztlich diejenige nach der Gültigkeit der Quantenmechanik: wenn es sich um eine allgemein gültige Theorie handelt muss sie auch den Messprozess beschreiben können. In diesem Fall müsste der Messprozess aber gemäß der Schrödingergleichung deterministisch und kontinuierlich ablaufen. Bei dieser Annahme fehlt also eine Herleitung des Projektion, die beim Messprozess offenbar stattfindet, aus der Schrödingergleichung. Gehen wir hingegen davon aus, dass die Quantenmechanik für die Beschreibung des Messprozesses nicht zuständig ist, muss klar gemacht werden, für welche Systeme, resp. bei welchen Randbedingungen die Quantenmechanik gültig ist. Außerdem würde dies sofort die Suche nach einer

übergeordneten Theorie anstoßen, welche sowohl die Quantenmechanik als auch den Messprozess beschreibt.

Es zeigt sich, dass der wesentlichste Konflikt zwischen der Schrödingergleichung und den Messpostulaten der QM auf die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems zurückgeführt werden kann: Bei einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden verläuft die Zeitentwicklung deterministisch nach der Schrödingergleichung. Ein Messprozess im Sinne der Kopenhagener Interpretation hingegen verlangt einen klassischen Apparat, welche definitionsgemäß unendlich viele Freiheitsgrade enthält. Die Schwierigkeit, den Messprozess mit Hilfe der Schrödingergleichung zu beschreiben kann also letztlich auf die Komplexität des dafür notwendigen Apparates zurückgeführt werden.

#### 4.4.5. Pilotwelle / Quantenpotential

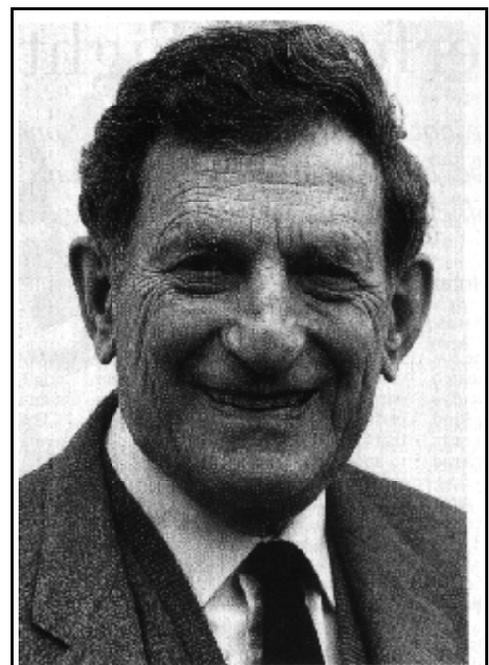
Eine weitere Interpretation stammt ursprünglich von Louis de Broglie (L. de Broglie, J. Phys. Radium 8, 225 (1928)). Er interpretierte die "Wellenfunktion"  $\Psi$  nicht als Wahrscheinlichkeitsamplitude, sondern als eine "Pilotwelle", welcher die punktförmigen Teilchen folgen. Die Schrödingergleichung beschreibt demnach nicht die Bewegung der Teilchen selber, sondern lediglich die der Pilotwelle.

Dieser Ansatz erklärt sehr einfach das **Z: Doppelspaltexperiment**  
Doppelspaltexperiment: Das punktförmige Teilchen selber fliegt nur durch den einen oder anderen Spalt; die Pilotwelle jedoch geht durch beide Spalten und erzeugt deshalb Interferenzerscheinungen.

In dieser Interpretation beschreibt die Schrödingergleichung den Fluss der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $|\Psi|^2$ . Da für reelle Wellenfunktionen der Fluss verschwindet ergeben sich Probleme z.B. bei den axial symmetrischen Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms, von denen man experimentell zeigen kann, dass die Elektronen einen Impuls besitzen. Deshalb verfolgte de Broglie diese Theorie nicht weiter.

Sie wurde aber (offenbar zunächst ohne Kenntnis der Arbeit von de Broglie) von David Bohm weiter entwickelt (D. Bohm, 'A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables. I', Phys. Rev. 85, 166-179 (1952); D. Bohm, 'A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables. II', Phys. Rev. 85, 180-193 (1952); D. Bohm, Phys. Rev. 89, 458 (1953)).

David Joseph Bohm war ein amerikanischer Physiker (1917-1992), der durch die McCarthy Kommission aus den USA vertrieben wurde. Er arbeitete deshalb einige Zeit in Brasilien und Israel und kam dann nach England (Birkbeck College, London, 1961). Dort entstanden auch die Arbeiten mit seinem Studenten Yakir Aharonov.



Eine populärwissenschaftliche Zusammenfassung

seiner Theorie findet man in D.Z. Albert, 'Bohm's alternative to quantum mechanics', Scientific American May 1994, 32-39 (1994). Eine detaillierte Ausarbeitung ist (D. Bohm, B.J. Hiley, and P.N. Kaloyerou, 'An ontological basis for the quantum theory', Phys. Rep. 144, 321-375 (1986); 'II. A causal interpretation of quantum fields', Phys. Rep. 144, 349-375 (1986).).

Die wesentliche Annahme der Bohm'schen Theorie ist die, dass Elektronen und andere Elementarteilchen punktförmig sind und exakte Bewegungsgleichungen befolgen. Die Bewegungsgleichung ist allerdings gegenüber der üblichen durch einen zusätzlichen Term, das sog. "Quantenpotential" modifiziert.

$$Q = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad \text{mit } R = |\Psi| .$$

Offenbar ist die absolute Größe dieses Quantenpotential massenabhängig so dass es für makroskopische Körper verschwindet. Die räumliche Abhängigkeit ist durch die Form der Wellenfunktion gegeben. Da auf das Betragsquadrat normiert wird fällt das Quantenpotential als Funktion des Abstandes nicht ab.

Bohm konnte auch zeigen, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Ensembles, welche zu Beginn durch  $|\Psi(0)|^2$  beschrieben wird, sich gemäß der Schrödingergleichung entwickelt, d.h. sie wird zu allen späteren Zeiten durch diese Funktion beschrieben. Auch beliebige andere Verteilung entwickeln sich unter dem Einfluss von Stößen zu dieser Verteilung; dies ist letztlich die Rechtfertigung dafür, dass man die fehlende Information über die Anfangsverteilung nicht wirklich braucht für eine korrekte Beschreibung der Experimente. (D. Bohm, 'Proof that probability density approaches  $|\Psi|^2$  in causal interpretation of the quantum theory', Phys. Rev. 89, 458 (1953).).

#### **4.4.6. Herleitung der Bewegungsgleichung**

Die modifizierte Bewegungsgleichung erhält man direkt aus der Schrödingergleichung für ein einzelnes freies Teilchen:

$$i \hbar \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V \Psi .$$

Wird die Wellenfunktion in Absolutbetrag  $R$  und Phase  $S$  aufgeteilt,  $\Psi = R e^{iS/\hbar}$ , so erhält man aus der Schrödingergleichung Bewegungsgleichungen für Absolutbetrag und Phase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{P \nabla S}{m} &= 0 \quad \text{mit } P = R^2 . \end{aligned}$$

Dies kann als Bewegungsgleichung für ein Teilchen mit Impuls  $p = \nabla S$  interpretiert werden, während  $P$  die Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt - in Übereinstimmung mit der statistischen Interpretation. Die zweite Gleichung entspricht im Wesentlichen einer Kontinuitätsgleichung für die Aufenthaltsdichte.

Dieses Potential zeigt die Interferenzerscheinungen, welche für die Quantenmechanik als typisch bekannt sind. In diesem Beispiel ist das Potential für das Doppelspaltexperiment gezeigt. Die "Furchen" sind die Regionen wo sich die punktförmigen Partikel bevorzugt aufhalten. Wenn man die Trajektorien der einzelnen Partikel beobachtet, so findet man ein vollständig klassisches Verhalten.

## **F: Potential, Trajektorien**

### **4.4.7. Diskussion**

Bohm konnte zeigen, dass die Interpretation der Wellenfunktion als Führungswelle exakt die Voraussagen der konventionellen Interpretation ergibt. Das Problem der Impulsverteilung ist nur ein scheinbares, da sie erst durch den Einfluss der Schrödingerfunktion entsteht. Auch die Verteilung der Messresultate gemäß der Born'schen Wahrscheinlichkeitsinterpretation erhält er als unmittelbares Resultat der erwähnten Annahmen für jede beliebige Anfangsverteilung der punktförmigen Partikel innerhalb der Pilotwelle. Da die Bewegungsgleichungen direkt aus der Schrödingergleichung abgeleitet sind liefert die Bohm'sche Theorie die gleichen Voraussagen wie die "gewöhnliche" Quantenmechanik.

Damit lag eine vollständig deterministische Interpretation der Quantenmechanik vor. Gegenüber der Kopenhagener Interpretation enthält sie zwei wesentliche Unterschiede: Zum einen sind bei Bohm's Version Teilchen keine ausgedehnten Objekte, sondern punktförmige Partikel, die zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Aufenthaltsort haben. Allerdings ist dieser Aufenthaltsort im allgemeinen nicht bekannt, außer man misst ihn. Der zweite Unterschied betrifft die Wellenfunktion: Bei Bohm ist sie nicht einfach ein mathematisches Hilfsmittel, sondern sie beschreibt ein zusätzliches Potential, welches die Bewegung des Teilchens beeinflusst.

Diese Formulierung der Quantenmechanik ist vollständig deterministisch: Sind die anfängliche Position des Teilchens und der Hamiltonoperator gegeben, so ist die weitere Bewegung zu jedem späteren Zeitpunkt exakt festgelegt. Die statistischen Eigenschaften der Quantenmechanik (also z.B. die 50 / 50 Verteilung der Spinkomponenten in einem Stern-Gerlach Versuch) folgen lediglich aus der Verteilung der Anfangspositionen.

Das wesentlichste Problem bei dieser Formulierung ist dass sie wesentlich nichtlokal ist: wird an einer Stelle des Systems eine Messung durchgeführt, so ändert sich nicht nur der Zustandsvektor des Systems, sondern das Quantenpotential, welches die Bewegungsgleichung mitbestimmt. Wie die Bell'schen Ungleichungen zeigen ist die Quantenmechanik mit Sicherheit nicht lokal und realistisch. Die Bohm'sche Formulierung verzichtet auf die Lokalitätsannahme und ist dafür realistisch. Dies kann als der wesentlichste Unterschied zur traditionellen Interpretation gesehen werden, welche lokal ist aber nicht realistisch.

In der ursprünglichen Form war Bohm's Interpretation eine nichtrelativistische Einteilchentheorie. Eine Erweiterung auf Feldtheorien und relativistische Systeme von Fermionen wurde aber ausgearbeitet (D. Bohm, B.J. Hiley, and P.N. Kaloyerou, 'II. A causal interpretation of quantum fields', Phys. Rep. 144, 349-375 (1986).). Bohm entwickelte

seine Ideen in unterschiedlicher Weise weiter, wobei ihn offenbar in erster Linie die philosophischen Aspekte interessierten. So entwickelte er sein Konzept der impliziten Ordnung (implicate order), von dem er erst nach einiger Zeit feststellte dass es mit seiner kausalen Interpretation der Quantenmechanik eng verknüpft ist (D. Bohm, 'Hidden variables and the implicate order', in *Quantum implications*, Editor: B.J. Hiley and F.D. Peat, Routledge & Kegan Paul, London (1987)).

Offenbar unterscheidet sich Bohm's Interpretation sehr stark von der konventionellen. Man kann sie deshalb auch als eigene Theorie betrachten. Allerdings ist der mathematische Formalismus und die Vorhersagen die gleichen wie diejenige der konventionellen Interpretation; dies legt nahe, sie als Interpretation statt als selbständige Theorie zu betrachten.

Obwohl diese Interpretation sich letztlich nicht durchgesetzt hat, hatte sie einen wichtigen Effekt: 1932 hatte von Neumann scheinbar bewiesen, dass die Quantenmechanik nicht zu einer vollständig deterministischen Theorie erweitert werden kann. Dieser "Beweis" stand somit im Widerspruch zur Theorie von de Broglie und Bohm. Die Auflösung dieses Paradoxons kam 1966 durch John Bell, welcher den Fehler in von Neumann's Beweis fand.

#### **4.4.8. Die Interpretation von Everett**

Während Bohr erklärt hatte dass die Quantenmechanik nur für ein einzelnes Objekt zuständig sei hatte von Neumann das gesamte Universum mit Ausnahme des Bewusstseins des Beobachters eingeschlossen. Noch einen Schritt weiter als von Neumann ging Hugh Everett (H. Everett, "'Relative State" formulation of quantum mechanics', Rev. Mod. Phys. 29, 454-462 (1957)). Sein Ausgangspunkt war die Feststellung dass die Kopenhagener oder die von Neumann'sche Interpretation unbefriedigend sind weil sie einen Beobachter benötigen, so dass sie für die Beschreibung von abgeschlossenen Systemen durch die Quantenmechanik als unmöglich erklären. Damit ist es auch ausgeschlossen dass die Quantenmechanik das Universums als ganzes beschreibt. Es ist auch nicht klar, ob ein System, das einen Beobachter enthält, durch die Quantenmechanik beschrieben werden kann. Tut man es doch so wird die Beschreibung des externen Beobachters von derjenigen des internen Beobachters abweichen. Die besondere Rolle des Beobachters erschwert auch die Verallgemeinerung der Quantenmechanik auf die allgemeine Relativitätstheorie. Insbesondere dieses Problem war offenbar der Ausgangspunkt für die Arbeit von Everett.

Für seine Interpretation der Quantenmechanik postulierte Everett dass die "Wellenmechanik", welche durch die Schrödingergleichung beschrieben wird, ein vollständige Theorie ist, welche abgeschlossene Systeme korrekt beschreibt. Dies beinhaltet, dass jedes System, das von einem externen Beobachter beschrieben wird, als Teil eines größeren Systems betrachtet werden kann. Dafür muss er aber darauf verzichten, einem Teilsystem eine eindeutige Zustandsfunktion zuzuordnen. Statt dessen postuliert er, dass jede Zustandsfunktion für ein Teilsystem nur "relativ" zu einer Zustandsfunktion für das übrige System gilt.

Der übliche Formalismus der Quantenmechanik beschreibt die Zustandsfunktion für ein System, welches aus zwei Teilen  $S_1$  und  $S_2$  besteht, als

$$\Psi(S_1 \otimes S_2) = \sum_{ik} a_{ik} \xi_i^{S_1} \eta_k^{S_2} ,$$

**Z:  $\xi_i \otimes \eta_k$**

wobei  $\xi_i^{S_1}$  und  $\eta_k^{S_2}$  Zustandsfunktionen der Teilsysteme beschreiben.

Everett erhält daraus eine Zustandsfunktion für das Teilsystem  $S_2$  **relativ zum Zustand**  $\xi_j$  des Teilsystems  $S_1$ :

**Z:  $S_2$  rel.  $\xi_j^{S_1}$**

$$\Psi(S_2 \text{ relativ zu } \xi_j^{S_1}) = c_j \sum_k a_{jk} \eta_k^{S_2} ,$$

wobei  $c_j$  eine Normierungskonstante ist. Dieser relativer Zustand kann so interpretiert werden, dass er das Verhalten des Teilsystems  $S_2$  so beschreibt wie die konventionelle Theorie sofern am Teilsystem  $S_1$  eine Messung durchgeführt wurde, deren Resultat anzeigt, dass es sich im Zustand  $\xi_j^{S_1}$  befindet. Die relative Zustandsfunktion beschreibt also eine Art bedingter Wahrscheinlichkeit.

Diese relativen Zustände haben eine besondere Eigenschaft: Wenn  $\Psi(S_2 \text{ relativ zu } \xi_j^{S_1})$  den Zustand eines Systems relativ zu einem Zustand  $\xi_j^{S_1}$  des Messapparates beschreibt, so findet bei der Messung keine Zustandsreduktion statt, da sich der Zustand bereits mit dem Resultat der Messung übereinstimmt. Relative Zustände enthalten somit nicht nur eine probabilistische Aussage über das Messresultat, sondern eine deterministische Voraussage. Es erfolgt bei der Messung auch keine Zustandsreduktion, da der "relative" Zustand dem Messresultat entspricht. Everett stellt sich jetzt auf den Standpunkt, dass Superpositionszustände nie von einem Einzelsystem realisiert werden, sondern lediglich von einem Ensemble. Diese "relativen Zustände" erlauben deshalb den Verzicht auf das Projektionspostulat, die gesamte zeitliche Entwicklung wird durch die Schrödingergleichung bestimmt.

Der Messprozess hat aber auch in diesem Bild eine spezielle Funktion: das System spaltet hier auf in voneinander unabhängige Realisierungen, welche jeweils eines der möglichen Messresultate realisiert. Auch der Beobachter wird dabei multipliziert, wobei jede „Kopie“ nur einen Ausgang der Messung beobachten kann, da er nicht mit den anderen Realisierungen (d.h. relativen Zuständen) kommunizieren kann. Während Everett selbst diesen Aspekt relativ knapp diskutiert wurde er von anderen umso detaillierter kommentiert. Die übliche (und relativ plakative) Interpretation ist die, dass in dieser Interpretation bei jedem Messprozess das Universum in so viele Kopien aufspaltet wie die Observable Eigenwerte besitzt. Sie wird im angelsächsischen Sprachraum deshalb als "many-world interpretation" bezeichnet.

**Z: Bifurkation**

Diese Interpretation ist wiederum konsistent und die Voraussagen stimmen mit den experimentell beobachteten Resultaten überein. Gegenüber der Kopenhagener Interpretation, die Everett als "externer Beobachter" Interpretation bezeichnet, hat sie den großen Vorteil, dass sie kein ad-hoc Postulat zur Zustandsreduktion benötigt. Everett zeigt außerdem, dass im Rahmen seiner Theorie auch imperfekte und approximative

Messungen konsistent diskutiert werden können. Sie verletzt allerdings ein philosophisches Prinzip, nämlich Ockham's Regel „*essentia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*“ auf die stärkste mögliche Art: zusätzlich zu einem beobachtbaren Universum erfordert es eine enorm große Zahl von nicht beobachtbaren Universen.

## 4.5 Der Quantenmechanische Zeno Effekt

### 4.5.1. Zeno's Paradoxa

Zeno von Elea (ca. 490 - 430 v. Chr., Schüler von Parmenides; Elea: Dorf in Süditalien;) stellte verschiedene Paradoxa auf um die Lehren von Parmenides zu verteidigen, insbesondere die Aussage dass Bewegung unmöglich sei und dass mehr als ein Ding nicht existieren kann. Die Bewegungsparadoxa stellen z.B. ein Rennen zwischen Achilles und der Schildkröte dar. Achilles ist 10 mal schneller als die Schildkröte, diese erhält einen Vorsprung von 10 Metern. Achilles muss somit zuerst diese 10 Meter zurücklegen. Während dieser Zeit legt die Schildkröte einen Meter zurück, d.h. Achilles hat sie noch nicht eingeholt. Nachdem er auch diesen Meter zurückgelegt hat ist die Schildkröte noch 10 cm voraus ... . Somit kann Achilles die Schildkröte nie überholen. Das andere Bewegungsparadox soll zeigen, dass ein Körper nicht von A nach B bewegt werden kann, denn dafür müsste er zunächst die Strecke bis zur Mitte zurücklegen. Dafür wiederum müsste er die Strecke bis zur Mitte der ersten Hälfte zurücklegen ... .

Während diese "Paradoxa" leicht zu lösen sind existieren in der Quantenmechanik ähnliche Situationen, welche deutlich schwieriger zu durchschauen sind. Sie werden unter dem Begriff "Quantenmechanischer Zeno-Effekt" diskutiert.

### 4.5.2. Wiederholte QM Messungen

Wir betrachten die zeitliche Entwicklung eines Zustandes, der zum Zeitpunkt  $t=0$  in den Zustand  $\Psi_i$  präpariert wird, der ein Eigenzustand eines Operators  $A$  mit Eigenwert  $a_i$  sei. Der Zustand entwickle sich unter dem Einfluss eines Hamiltonoperators  $\mathcal{H}$ , welcher nicht mit  $A$  vertauscht.

Wir erwarten **Z: Zeitabhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten** deshalb, dass zu einem späteren Zeitpunkt eine Messung des Operators  $A$  mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit einen anderen Wert ergibt als  $a_i$ .

Als einfachstes Beispiel verwenden wir einen Spin  $I = \frac{1}{2}$ , der in einen Eigenzustand des Operators  $I_x$  mit Erwartungswert  $\langle I_x \rangle = +\frac{1}{2}$  präpariert wird. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch den Zeemaneffekt eines B-Feldes entlang der z-Achse. **Z: Spin, B-Feld, x**

Die zeitliche Entwicklung für die Wahrscheinlichkeit, den Spin im **Z: P(t)** Zustand zu finden lautet dann

$$p_{+1/2}(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\Omega_L t)) ,$$

während die Wahrscheinlichkeit für den entgegengesetzten Erwartungswert

$$p_{-1/2}(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega_L t))$$

wird.

Dies sind offenbar die Wahrscheinlichkeiten dafür, den entsprechenden Eigenzustand zu finden falls das System im angegebenen Ausgangszustand war und zur Zeit  $t$  eine Messung durchgeführt wurde. Nach der Messung befindet sich das System gemäß dem Projektionspostulat wieder in einem der Eigenzustände.

Führt man eine Reihe von Messungen des Operators  $A$  im Abstand  $\tau$  durch, so wird of-

**Z: wiederholte Messungen**

fenbar die Wahrscheinlichkeit, das System bis zur  $n$ -ten Messung immer im  $+\frac{1}{2}$  Zustand zu finden gleich

$$p_{+1/2}(n\tau) = \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos(\Omega_L \tau)) \right]^n .$$

Für Messabstände die klein sind gegenüber der Larmorperiode,  $\Omega_L \tau \ll 1$ , kann dieser Ausdruck entwickelt werden als

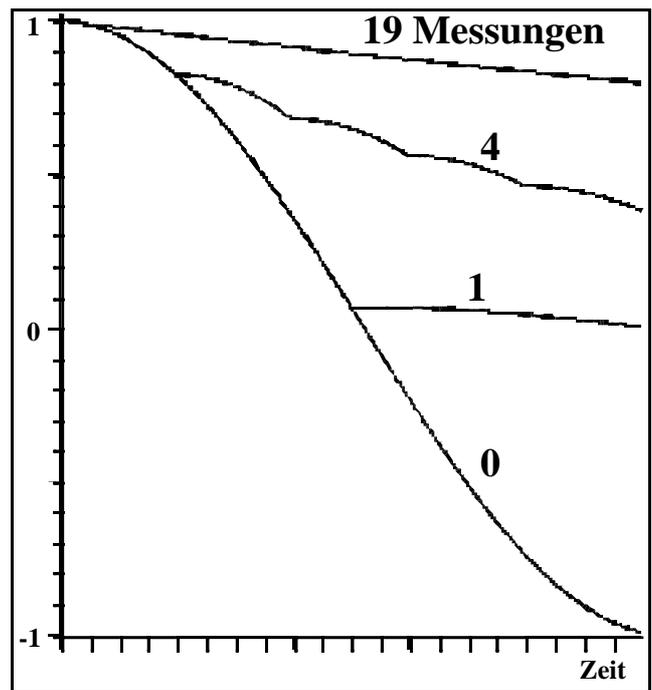
$$p_{+1/2}(n\tau) = [1 - \Omega_L^2 \tau^2]^n = 1 - n \Omega_L^2 \tau^2 .$$

Für eine gegebene Zeit  $T = n \tau$  erhält man somit eine Wahrscheinlichkeit

$$p_{+1/2}(T) = 1 - \Omega_L^2 \tau T .$$

Dieser Ausdruck zeigt zum einen dass die Wahrscheinlichkeit nicht mehr quadratisch mit der Zeit abfällt, sondern linear.

Zum anderen ist es offenbar für beliebig lange Zeiten  $T$  möglich, die Wahrscheinlichkeit beliebig nahe bei 1 zu halten, indem das Messintervall  $\tau$  genügend kurz gewählt wird. Dies ist als Zeno-Effekt bekannt: durch die Beobachtung, d.h. die Messung der Variablen  $A$ , wird die zeitliche Entwicklung unterdrückt.

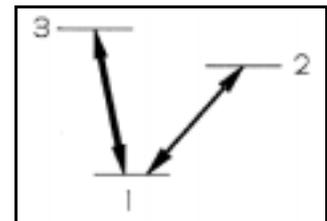


### 4.5.3. Experimente

PHYSICAL REVIEW A	VOLUME 41, NUMBER 5	1 MARCH 1990
<b>Quantum Zeno effect</b>		
Wayne M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland		
<i>Time and Frequency Division, National Institute of Standards and Technology, Boulder, Colorado 80303</i>		
(Received 12 October 1989)		
<p>The quantum Zeno effect is the inhibition of transitions between quantum states by frequent measurements of the state. The inhibition arises because the measurement causes a collapse (reduction) of the wave function. If the time between measurements is short enough, the wave function usually collapses back to the initial state. We have observed this effect in an rf transition between two <math>{}^9\text{Be}^+</math> ground-state hyperfine levels. The ions were confined in a Penning trap and laser cooled. Short pulses of light, applied at the same time as the rf field, made the measurements. If an ion was in one state, it scattered a few photons; if it was in the other, it scattered no photons. In the latter case the wave-function collapse was due to a null measurement. Good agreement was found with calculations.</p>		

Wohl das bekannteste Experiment zu diesem Thema wurde am NIST Boulder mit atomaren Ionen durchgeführt (W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, and D.J. Wineland, 'Quantum Zeno effect', Phys. Rev. A 41-46, 2295 (1990)).

Itano et al. verwendeten dafür drei Zustände des  ${}^9\text{Be}^+$  Ions. Der metastabile Zustand 2 ist der Ausgangszustand. Der Übergang  $1 \leftrightarrow 2$  wird von einem RF Feld getrieben,



welches für sich allein eine Rabi-Oszillation erzwingen würde, d.h. einen oszillatorischen Austausch von Population zwischen 1 und 2.

**Z: Rabi-Flopping**

Zusätzlich wird eine Reihe von Laserpulsen auf dem Übergang 1-3 eingestrahlt. Dies führen eine Messung der Population des Zustandes 1 durch, da sie das Atom zur Fluoreszenz anregen, welche beobachtet werden kann.

**Z: Laserpulse**

Die experimentelle Beobachtung der Anzahl Atome, die in den Zustand 1 übergehen zeigt, dass bei einer großen Anzahl von Laserpulsen, d.h. bei vielen Messungen die Zahl deutlich abnimmt. Dies ist somit in Übereinstimmung mit den Erwartungen für den "Quanten Zeno Effekt".

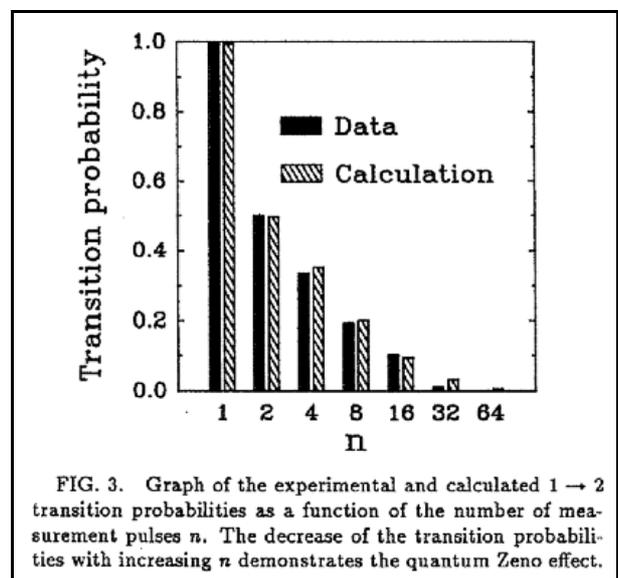


FIG. 3. Graph of the experimental and calculated  $1 \rightarrow 2$  transition probabilities as a function of the number of measurement pulses  $n$ . The decrease of the transition probabilities with increasing  $n$  demonstrates the quantum Zeno effect.

J.J. Bollinger, and D.J. Wineland, 'Reply to "Comment on 'Quantum Zeno effect'"', Phys. Rev. A 43, 5168-5169 (1990); V. Frerichs and A. Schenzle, 'Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet', Phys. Rev. A 44, 1962-1968 (1991).

#### **4.5.4. Diskussion**

Es ist relativ leicht zu zeigen, dass dieses Resultat nicht streng gelten kann. Als Beispiel betrachten wir ein Atom, welches z.B. mit Hilfe eines Laserpulses in einen angeregten Zustand gebracht wird. Wir können jetzt versuchen, zu beobachten ob es sich im angeregten Zustand oder im Grundzustand befindet indem wir die Fluoreszenz beobachten. So lange wir kein Photon beobachten wissen wir dass sich das Atom im angeregten Zustand befindet. Der quantenmechanische Zeno Effekt sollte demnach dazu führen, dass das Atom nicht zerfällt wenn wir es genügend intensiv, d.h. mit geringen Messintervallen  $\tau$  beobachten. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass es trotzdem zerfällt. Ähnliche Argumente wurden verwendet um zu erklären weshalb der Zerfall des Protons nicht beobachtet werden konnte.

Der wesentlichste Grund dafür, dass dieses Paradoxon überhaupt als solches erscheint und dass die Diskussion häufig nicht präzise ist, liegt darin, dass das Konzept einer quantenmechanischen Messung nicht genau definiert ist. Die meisten "Messungen", die im Labor durchgeführt werden, führen nicht zu einer Reduktion des Wellenpaketes, sondern werden so durchgeführt, dass das System möglichst wenig gestört wird. Das Projektionspostulat geht letztlich auf Experimente von der Art des Stern-Gerlach Versuchs zurück, welche für die Entwicklung der Quantenmechanik sehr wichtig waren, welche aber keineswegs den Laboralltag repräsentieren.

Als Gegenbeispiele können z.B. die magnetische Resonanz dienen, bei denen kontinuierlich eine Komponente des Kernspins beobachtet wird, wobei die zeitliche Entwicklung exakt nach der Schrödingergleichung verläuft, ohne dass es zu einem Zeno Effekt kommt. **Z: NMR Experiment**

Ohne hier das Paradoxon wirklich auflösen zu wollen kann man leicht einen Aspekt finden, der bei der bisher verwendeten Formulierung "falsch" ist: Eine kontinuierliche Messung, wie sie hier diskutiert wurde, müßte auch in der Schrödingergleichung für die Entwicklung des Systems ihren Niederschlag finden. Der Hamiltonoperator welcher die zeitliche Entwicklung bestimmt müßte somit einen Term enthalten, welcher die Kopplung an das Messinstrument beschreibt. Bei einer "perfekten" Messung, d.h. einer vollständigen Projektion auf einen Eigenzustand, wäre der Einfluss auf die zeitliche Entwicklung dementsprechend stark, so dass die Entwicklung sich wesentlich von derjenigen des freien Systems unterscheiden sollte.

#### **4.5.5. Literatur**

B. Misra and E.C.G. Sudarshan, 'The Zeno's paradox in quantum theory', J. Math. Phys. 18, 756-763 (1977).

L. Diosi, 'Comments on continuous observation in quantum mechanics', Phys. Rev. D 33, 3785-3788 (1986).

A. Peres, 'Quantum limited detectors for weak classical signals', Phys. Rev. D 39, 2943-2950 (1989).

- A. Peres and A. Ron, '*Incomplete "collapse" and partial Zeno effect*', Phys. Rev. A 42, 5720-5722 (1990).
- W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, and D.J. Wineland, '*Quantum Zeno effect*', Phys. Rev. A 41, 2295 (1990).
- V. Frerichs and A. Schenzle, '*Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet*', Phys. Rev. A 44, 1962 (1991).
- M.J. Gagen, H.M. Wiseman, and G.J. Milburn, '*Continuous position measurements and the quantum Zeno effect*', Phys. Rev. A 48, 132 (1993).
- T.P. Altenmüller and A. Schenzle, '*Quantum Zeno effect in a double-well potential: A model of a physical measurement*', Phys. Rev. A 49, 2016 (1994).
- K. Urbanowski, '*Early-time properties of quantum evolution*', Phys. Rev. A 50, 2847-2853 (1994).
- S. Pascazio and M. Namiki, '*Dynamical quantum Zeno effect*', Phys. Rev. A 50, 4582-4592 (1994).
- A. Beige and G.C. Hegerfeldt, '*Projection postulate and atomic quantum Zeno effect*', Phys. Rev. A 53, 53-65 (1996).
- W.L. Power and P.L. Knight, '*Stochastic simulations of the quantum Zeno effect*', Phys. Rev. A 53, 1052-1059 (1996).
- P.K. Kabir and A. Pilaftsis, '*Unitarity and the time evolution of quantum mechanical states*', Phys. Rev. A 53, 66-69 (1996).
- A.G. Kofman and G. Kurizki, '*Quantum Zeno effect on atomic excitation decay in resonators*', Phys. Rev. A 54, R3750-R3753 (1996).
- B. Nagels, L.J.F. Hermans, and P.L. Chapovsky, '*Quantum Zeno Effect Induced by Collisions*', Phys. Rev. Lett. 79, 3097-3100 (1997).
- R. Bruckmeier, H. Hansen, and S. Schiller, '*Repeated Quantum Nondemolition Measurements of Continuous Optical Waves*', Phys. Rev. Lett. 79, 1463-1466 (1997).

## 4.6 Rückwirkungsfreie (QND) Messungen

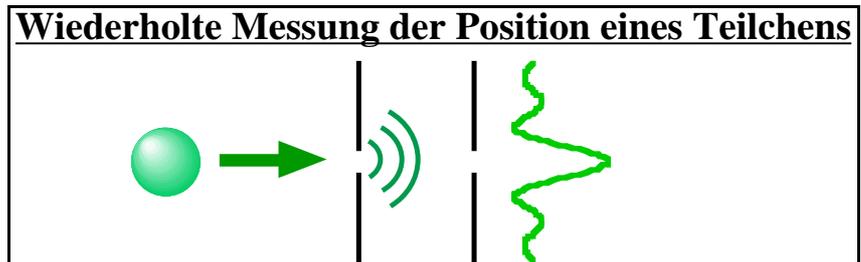
### 4.6.1. Wiederholte Positionsmessungen an freien Teilchen

Wir betrachten wieder einmal idealisierte quantenmechanische Messungen, bei denen ein Teilchen (z.B. ein Elektron) in einen Eigenzustand des Orts- oder Impulsoperators gebracht wird. Wir nehmen an, dass das Teilchen frei sei, d.h. dass sein Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = p^2/2M$$

lediglich die kinetische Energie enthalte.

Wird an einem solchen Teilchen eine Ortsmessung durchgeführt, so resultiert ein Zustand, der durch ein Wellenpaket beschrieben werden kann, dessen Breite  $\Delta x$  durch die Auflösung der Ortsmessung gegeben ist.



Im Impulsraum kann das Wellenpaket damit nicht exakt lokalisiert sein. Wenn wir annehmen, dass die Unschärfe gerade der minimalen durch die Quantenmechanik erlaubten Unschärfe entspricht, so ist die Breite des Wellenpaketes

$$\Delta p = \hbar/(2\Delta x) .$$

Somit enthält dieses Wellenpaket Komponenten mit endlicher Geschwindigkeit, d.h. es breitet sich als Funktion der Zeit aus. Nach einer Zeit  $\tau$  hat somit die Breite des Wellenpakets um den Betrag

$$\Delta v \tau = \Delta p/M \tau = \hbar \tau / (2M\Delta x)$$

zugenommen. Dieser Effekt ist auch aus der klassischen Optik als Beugungserscheinung bekannt: Wenn das Loch oder der Spalt in einem Schirm Dimensionen aufweisen, die mit der Wellenlänge des Lichtes vergleichbar sind, so erhält man dahinter ein Beugungsmuster, welches bei kleinen Löchern sehr breit sein kann. Dies ist genau der Grund weshalb die Blende in einer Kamera auch bei guten Lichtverhältnissen nicht beliebig klein gemacht werden kann.

Es ist somit nicht möglich, die Position eines freien Teilchens wiederholt mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Es ist im Gegenteil so, dass sukzessive Messungen einander um so stärker beeinflussen je präziser sie sind. Da die Masse  $M$  des Teilchens im Nenner auftaucht wird der Effekt für sehr große Massen klein. Man hat aber ausgerechnet, dass für gewisse Arten von Gravitationswellen - Antennen mit Massen im Bereich von einigen Tonnen diese Effekte immer noch zu groß sind um

eine erfolgreiche Messung zu erlauben. Für Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) ist der Effekt erheblich.

Das Problem, dass eine Messung das System stört, d.h. seinen Zustand verändert, ist aus der Grundlagenvorlesung bekannt. Was dort im allgemeinen nicht diskutiert wird ist dass diese Störung eine Wiederholung der Messung schwierig machen kann. Dies kann für kontinuierliche Messungen mit hoher Präzision ein Problem darstellen. Eine der ersten Bemühungen, Messkonzepte zu entwickeln, welche dieses Problem umgehen, stammt von einer russischen Gruppe (V.B. Braginskii, Y.I. Vorontsov, and F.Y. Khalili, '*Quantum singularities of a ponderomotive meter of electromagnetic energy*', Sov. Phys. JETP 46, 705-706 (1978)). Inzwischen werden solche Konzepte bei vielen Präzisionsmessungen verwendet.

#### 4.6.2. QND Variablen

Um die Grundsätze zu verstehen betrachten wir nochmals das freie Teilchen, untersuchen aber eine Impulsmessung. Wird der Impuls mit der Präzision  $\Delta p$  bestimmt so erhalten wir ein Wellenpaket, dessen Breite unmittelbar nach der Messung gegeben ist durch

$$\Delta x = \hbar / (2\Delta p) .$$

Auch in diesem Fall wird die konjugierte Variable (in diesem Fall die Position) gestört. Diese hat aber keinen Einfluss auf die zeitliche Entwicklung der gemessenen Variablen. Dies sieht man am einfachsten wenn man den Grenzfall  $\Delta p \rightarrow 0$  betrachtet: in diesem Fall befindet sich das System in einem Eigenzustand des Hamiltonoperators.

Die zeitliche Entwicklung beschränkt sich somit auf eine Akkumulation eines Phasenfaktors  $e^{-iEt/\hbar}$ . Das Wellenpaket behält somit seine Form (im Ortsraum wie im Impulsraum) und aufeinanderfolgende Messungen liefern identische Resultate.

<b>Z:</b> $\Psi_p(t), \Psi_x(t)$
----------------------------------

Messungen dieser Art werden als rückwirkungsfreie Messungen oder QND (Quantum Non Demolition) Messungen bezeichnet. Ob eine solche Messung möglich ist hängt von der Wahl der Variablen (QND Variable) bei einem gegebenen Hamiltonoperator ab. Die Bedingung kann am besten im Heisenbergbild formuliert werden: Eine Observable

$$A(t) = e^{i\mathcal{H}t/\hbar} A(0) e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}$$

ist dann eine mögliche QND Observable wenn sie zu allen Zeiten mit sich selber vertauscht, d.h.

$$[A(t_1), A(t_2)] = 0 \quad \text{für alle } t_1, t_2 .$$

Diese Bedingung ist offenbar nur für sehr wenige Variablen erfüllt; im obigen Beispiel ist sie für den Impuls erfüllt, da

$$p(t) = e^{ip^2t/2M\hbar} p(0) e^{-ip^2t/2M\hbar} = p(0) ,$$

resp.

$$[\mathcal{H}, p] = 0 .$$

Sie ist hingegen nicht erfüllt für

$$x(t) = e^{ip^2t/2M\hbar} x(0) e^{-ip^2t/2M\hbar} .$$

Ist diese Bedingung für alle Zeiten  $t$  erfüllt so wird die entsprechende Variable als kontinuierliche QND Variable bezeichnet. Es existiert auch der Fall wo die Bedingung für diskrete Zeiten erfüllt ist. Entsprechende Variablen heißen stroboskopische QND Variablen. Stroboskopische QND Messungen müssen in kurzer Zeit auf der internen Zeitskala des Systems gemacht werden, d.h. die Evolution des Systems während der Messung muss vernachlässigbar sein.

Ein mögliches Beispiel für eine stroboskopische QND Variable ist ein Spin, der in einem Magnetfeld eine Larmorpräzession ausführt; die longitudinale Komponente des Spins, welche mit dem Hamiltonoperator vertauscht, ist eine kontinuierliche QND Variable, während die transversalen Komponenten stroboskopische QND Variablen sind. Die Periodizität ist gegeben durch die halbe Larmorperiode. Eine rasche Messung würde hier zum Zeno Effekt führen, ein Messintervall kleiner als die halbe Larmorperiode zu einer erhöhten Dispersion, während eine stroboskopische Messung bei der halben Larmorfrequenz zu einer rückwirkungsfreien Messung führt.

**Z: Spin in B-Feld**

Ein weiteres Beispiel einer stroboskopischen QND Variablen ist die Position eines Teilchens in einem harmonischen Oszillator. Ein lokalisierter Zustand wird periodisch in einen delokalisierten Zustand umgewandelt um danach wieder zu lokalisieren.

**Z: Harmon. Oszillator**

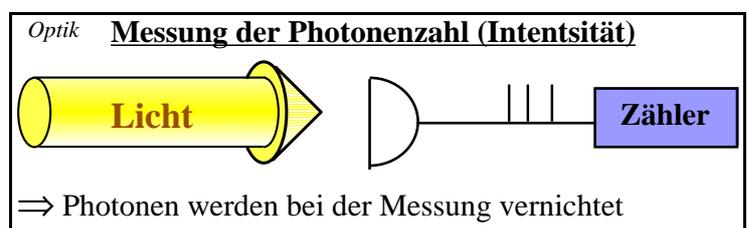
### 4.6.3. Beispiel: QND Messung von optischen Intensitäten

QND Messungen wurden bisher nur in der Optik demonstriert. Eine mögliche kontinuierliche QND Variable ist die Photonenzahl oder die Intensität eines optischen Feldes.

Sie ist im wesentlichen konjugiert zur Phase des entsprechenden Feldes, d.h. wir erwarten, dass eine Messung der Intensität eine Unschärfe der Phase des Feldes erzeugen wird. Dies sollte aber keine Rückwirkung auf die QND Variable erzeugen.

**Z: Amplitude / Phase**

Die Messung einer optischen Intensität geschieht üblicherweise so dass man den Laserstrahl auf eine Photodiode schickt, auf der ein Strom erzeugt wird. Dies ist allerdings offensichtlich eine "Quantum-



Demolition" Messung, da die Photonen nach der Messung nicht mehr vorhanden sind.

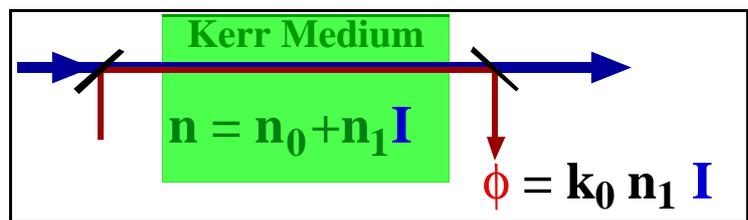
Eine Möglichkeit, die Intensität zu messen ohne die Photonen zu vernichten verwendet optisch nichtlineare Effekte, wie z.B. den optischen Kerr Effekt. Dieser Ausdruck bezeichnet eine Änderung des Brechungsindex  $n$  als Funktion der Intensität  $I$ ,

$$n = n_0 + n_1 I + \dots \text{ (Terme höherer Ordnung) .}$$

Hier bezeichnet  $n_0$  den Brechungsindex bei niedriger Leistung und  $n_1$  eine Korrektur die linear in der optischen Intensität ist.

Diese Abhängigkeit kann verwendet werden um die Intensität eines Lasers mit Hilfe eines zweiten Laserstrahls zu messen.

Dafür überlagert man dem zu messenden Laserstrahl in einem Kerr Medium einen zweiten Laserstrahl.



Die Phase des Laserfeldes hinter dem Medium der Länge  $L$  beträgt

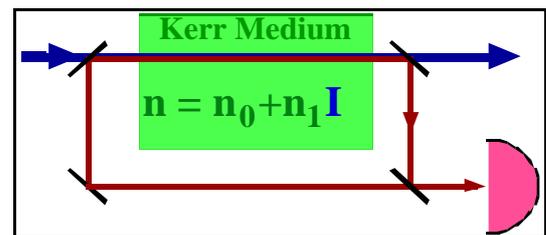
$$E(L) = E(0) e^{ik_0 n L} = E(0) e^{ik_0 (n_0 + n_1 I_s + n_1 I_m + \dots) L} .$$

Hier bezeichnet  $I_s$  die Intensität des Signalstrahls und  $I_m$  diejenige des Meterstrahls, also des Laserstrahls, der zum Auslesen verwendet wird. Offenbar erhält somit dieser Strahl eine Phasenverschiebung

$$\phi = k_0 n_1 I_s$$

gegenüber der Messung ohne Signal.

Die Phasenverschiebung kann z.B. in einem interferometrischen Aufbau gemessen werden. Die beiden Strahlen können z.B. unterschiedliche Wellenlängen oder unterschiedliche Polarisierungen aufweisen um eine Überlagerung und anschließende Trennung zu ermöglichen.



Solche Experimente wurden z.B. im IBM Labor in San José durchgeführt, wobei als Kerr Medium eine optische Faser benutzt wurde, um eine möglichst hohe Wechselwirkung zwischen den beiden Laserstrahlen zu erhalten (M.D. Levenson, R.M. Shelby, M. Reid and D.F. Walls, "Quantum nondemolition detection of optical quadrature amplitudes", Phys. Rev. Lett. 57, 2473-2476 (1986). Andere Experimente (P. Grangier, J.F. Roch and G. Roger, "Observation of backaction-evading measurement of an optical intensity in a three-level atomic nonlinear system", Phys. Rev. Lett. 66, 1418 (1991).). Weitere Experimente wurden mit resonanten atomaren Medien durchgeführt.

#### **4.6.4. Diskussion**

Um als QND Messung zu qualifizieren muss eine Messung zwei Kriterien erfüllen: sie muss eine gute Korrelation zwischen dem Signal und dem Meter erzeugen und sie darf die Intensität des Signals nicht verändern. Ein ideales Kerr Medium ist vollständig transparent, so dass die Intensität des transmittierten Lichtes nicht geändert wird. Dieser Aufbau entspricht damit der QND Bedingung, da die Intensität des Signalstrahls nicht geändert wird.

Man kann aber hier auch einfach zeigen, dass dabei die Phase des Signals gestört wird: Eine gute Messung der Intensität des Signalstrahls wird nur dann möglich wenn die Phase des Meterstrahls perfekt detektiert werden kann. Dies setzt eine hohe Intensität des Meterstrahls voraus um die resultierende Intensitätsänderung empfindlich detektieren zu können. Damit muss auch der Einfluss des Meterfeldes auf die Phase des Signalfeldes berücksichtigt werden, welche die gleiche Kreuz-Phasenmodulation zeigt wie beim Meterfeld. Im Grenzfall einer perfekten Messung der Signalamplitude wird der Meterstrahl unendlich intensiv und die Phase des Signalfeldes beliebig ungenau. Dies wirkt sich aber nicht auf die Intensität aus, so dass wiederholte präzise Messungen möglich sind.

Neben solchen rein optischen Messungen wurden auch Experimente vorgeschlagen (und z.T. realisiert), bei denen das Feld durch Atome ausgelesen wird. So ist es möglich, ein Laserfeld so weit von atomaren Resonanzen zu verstimmen dass die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Photons beliebig klein wird. Man kann aber trotzdem einen signifikanten Einfluss auf die Phase des elektrischen Dipols erhalten, so dass die Intensität in dieser Phase codiert wird.

Um Missverständnisse zu vermeiden sollte explizit erwähnt werden dass QND Messungen den Zustand des Systems nicht einfach invariant lassen (wie dies der Name nahelegen könnte). Wie ideale quantenmechanische Messungen projizieren sie den Zustand des Systems auf eine Eigenfunktion der entsprechenden Observablen.

So wird z.B. ein kohärenter Zustand, der eine poissonartige Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Photonenzahlen aufweist, durch eine QND Intensitätsmessung in einen Einzelphotonenzustand übergeführt.

Wir diskutieren hier ein simuliertes Experiment (M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.M. Raimond, and N. Zagury, 'Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive measurement', Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990).), bei dem die Intensität eines elektromagnetischen Feldes in einem Resonator gemessen werden soll.

**Z: Feld im Resonator**

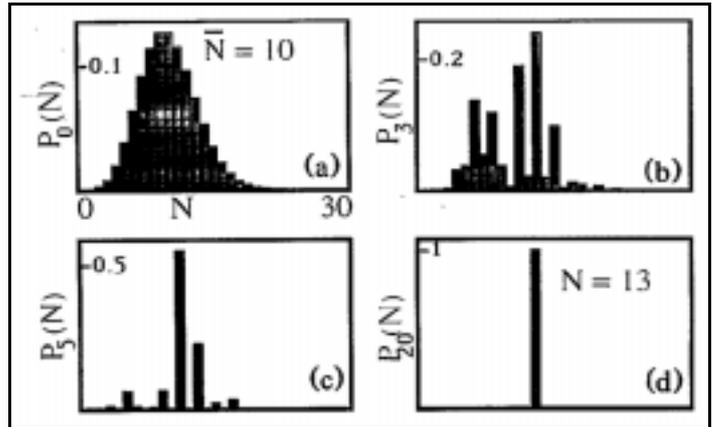
Prinzipiell wäre hier eine sehr einfache QND Messung möglich indem das Gewicht des Resonators gemessen würde.

**Z: Wägen**

Mangels genügend präziser Waagen ist eine andere Messung realistischer: Man schickt Atome durch den Resonator, die sich in einem kohärenten Superpositionszustand befinden. Die Wechselwirkung mit dem Feld im Resonator führt zu einer Phasenverschiebung der atomaren Kohärenz. Je nach Phasenverschiebung werden die Atome danach in einen bestimmten Quantenzustand gebracht, welcher gemessen wird.

**Z: Messung mit Atomen**

Ein einzelnes Atom liefert somit ein Bit Information über die Intensität des Feldes, so dass erst nach einer Reihe von Atomen (hier: 20) der Zustand des Feldes feststeht. Der Zustand des Feldes nach der Messung unterscheidet sich somit dramatisch von demjenigen vor der Messung.



Eine QND Messung stellt dieses Experiment trotzdem dar, da nach der 20. Messung alle weiteren ebenfalls den Wert 13 ergeben.

**Z: Weitere Werte**

#### **4.6.5. Literatur:**

- V.B. Braginsky, Y.I. Vorontsov, and K.S. Thorne, '*Quantum nondemolition measurements*', Science 209, 547 (1980).
- M.D. Levenson, R.M. Shelby, M. Reid, and D.F. Walls, '*Quantum nondemolition detection of optical quadrature amplitudes*', Phys. Rev. Lett. 57, 2473-2476 (1986).
- M.D. Levenson and R.M. Shelby, '*Deamplification of quantum noise and quantum nondemolition detection in optical fibers*', Optics News January 88, 7-12 (1988).
- P. Alsing, G.J. Milburn, and D.F. Walls, '*Quantum nondemolition measurements in optical cavities*', Phys. Rev. A 37, 2970-2978 (1988).
- H.-A. Bachor, M.D. Levenson, D.F. Walls, S.H. Perlmuter, and R.M. Shelby, '*Quantum nondemolition measurements in an optical-fiber ring resonator*', Phys. Rev. A 38, 180-190 (1988).
- A. Peres, '*Quantum limited detectors for weak classical signals*', Phys. Rev. D 39, 2943-2950 (1989).
- M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.M. Raimond, and N. Zagury, '*Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive measurement*', Phys. Rev. Lett. 65, 976 (1990).
- B. Yurke, W. Schleich, and D.F. Walls, '*Quantum superpositions generated by quantum nondemolition measurements*', Phys. Rev. A 42, 1703-1711 (1990).
- V.P. Belavkin and P. Staszewski, '*Nondemolition observation of a free quantum particle*', Phys. Rev. A 45, 1347-1356 (1992).
- P. Grangier, '*Optical quantum nondemolition measurements: experiments*', Phys. Rep. 219, 121-129 (1992).
- P. Grangier, J.-M. Courty, and S. Reynaud, '*Characterization of nonideal quantum non-demolition measurements*', Optics Commun. 89, 99-106 (1992).
- A.M. Herkommer, V.M. Akulin, and W.P. Schleich, '*Quantum demolition measurement of photon statistics by atomic beam deflection*', Phys. Rev. Lett. 69, 3298-3301 (1992).
- J.F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J.M. Courty, and S. Reynaud, '*Quantum non-demolition measurement in optics: a review and some experimental results*', Appl. Phys. B 55, 291-297 (1992).
- A. Imamoglu, '*Logical reversibility in quantum-nondemolition measurements*', Phys. Rev. A 47, R4577 (1993).
- T. Sleator and M. Wilkens, '*Quantum-nondemolition measurement of atomic momentum*', Phys. Rev. A 48, 3286-3290 (1993).
- F.X. Kärtner and H.A. Haus, '*Quantum-nondemolition measurements and the "collapse of the wave function"*', Phys. Rev. A 47, 4584 (1993).
- K. Jacobs, P. Tombesi, M.J. Collet, and D.F. Walls, '*Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure*', Phys. Rev. A 49, 1961 (1994).
- A.B. Matsko, S.P. Vyatchanin, H. Mabuchi, and H.J. Kimble, '*Quantum nondemolition detection of single photons in an open resonator by atomic beam deflection*', Phys. Lett. A 192, 175-179 (1994).
- S.F. Pereira, Z.Y. Ou, and H.J. Kimble, '*Backaction evading measurements for quantum nondemolition detection and quantum optical tapping*', Phys. Rev. Lett. 72, 214-217 (1994).
- S. Spälter, P.v. Loock, A. Sizmman, and G. Leuchs, '*Quantum non-demolition measurements with optical solitons*', Appl. Phys. B 64, 213-218 (1997).
- R. Bruckmeier, H. Hansen, and S. Schiller, '*Repeated Quantum Nondemolition Measurements of Continuous Optical Waves*', Phys. Rev. Lett. 79, 1463-1466 (1997).

## 4.7 Wechselwirkungsfreie Messungen

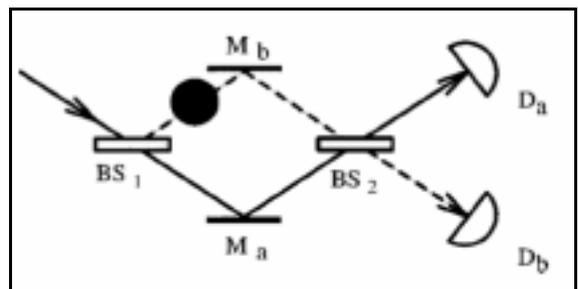
### 4.7.1. Das Konzept

Der Ausgangspunkt für "wechselwirkungsfreie" Messungen ist die Idee einer "Null-Messung": Wenn wir wissen dass sich ein Teilchen entweder am Ort A oder am Ort B aufhält und eine Messung durchführen, deren Ergebnis zeigt, dass es sich nicht am Ort A aufhält, so haben wir Information über das System gewonnen, ohne dass eine Wechselwirkung zwischen dem Messapparat und dem Objekt stattgefunden hätte.

So kann man sich beim Doppelspalt-Experiment vorstellen, dass ein Laser den einen Spalt bestrahlt und man so beobachtet ob ein Atom durch den Spalt kommt. Immer wenn ein Teilchen beim Spalt nicht detektiert wird aber trotzdem auf dem Schirm eintrifft weiß man, dass es durch den anderen Spalt ging. Obwohl in diesem Fall keine Wechselwirkung stattgefunden hat entspricht dies einer Messung, d.h. es findet eine Reduktion des Zustandes statt. In diesem Beispiel erhält man deshalb keine Interferenzstreifen auf dem Schirm.

### **Z: Doppelspalt Experiment**

Das Standard - Gedankenexperiment für wechselwirkungsfreie Messungen verwendet ein Mach-Zehnder Interferometer. Ein Laserstrahl wird durch das Interferometer geschickt und die Armlängen werden so eingestellt dass die Interferenz zwischen den beiden Teilstrahlen dazu führt, dass keine Photonen den Detektor  $D_a$  erreichen.

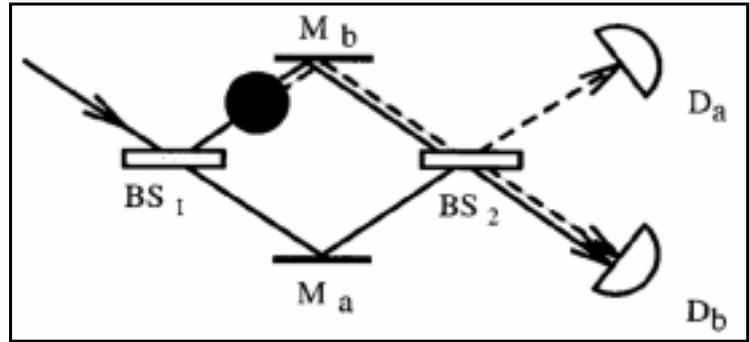


Wird nun ein Objekt in den einen Arm gestellt, welches Photonen in diesem Arm vollständig absorbiert, so wird der entsprechende Teilstrahl eliminiert und dadurch die destruktive Interferenz eliminiert. Somit erreichen die Photonen, welche durch den unteren Arm des Interferometers laufen, beide Detektoren zu gleichen Teilen. Die Gegenwart des Absorbers im oberen Arm führt somit dazu, dass auf dem bisher "dunklen" Detektor ebenfalls Photonen eintreffen. Der Nachweis dieser Photonen ist somit ein Hinweis darauf, dass im oberen Arm ein Objekt vorhanden ist, obwohl die Photonen selber diesen Arm nie durchlaufen haben und somit nicht mit dem Objekt in Wechselwirkung traten.

### 4.7.2. Diskussion

Da selbstverständlich auch bei diesem Experiment Wechselwirkungen stattfinden sollte man den Ausdruck "wechselwirkungsfrei" (interaction-free) nicht wörtlich nehmen, sondern als Etikette für diese Klasse von Experimenten betrachten, das in der Literatur häufig verwendet wird. Die Wechselwirkung findet statt im Sinne der Beschreibung der Messung nach von Neumann: die Kopplung zwischen Objekt und Messapparat erzeugt einen verschränkten Zustand. Erst wenn das Messresultat anzeigt dass das Photon durch den unteren Arm gegangen ist kommen wir zum Resultat dass keine Wechselwirkung stattgefunden haben kann.

Eine sinnvolle Beschreibung geht aus von der Lorenz-Lorentz Theorie der Dispersion: Hier nimmt man allgemein an, dass die Wechselwirkung zwischen der elektromagnetischen Welle und dem Objekt in diesem eine oszillierende optische Polarisation erzeugt, die selber die Quelle einer optischen Welle darstellt. Aus Gründen der Phasen Anpassung wird diese optische Welle in Vorwärtsrichtung abgestrahlt, d.h. in die gleiche Richtung wie die einfallende Welle. Es kommt deshalb zu Interferenz zwischen der einfallenden und der abgestrahlten Welle, welche dazu führt, dass Absorption als Abschwächung und Dispersion als Phasenverschiebung erzeugt werden.

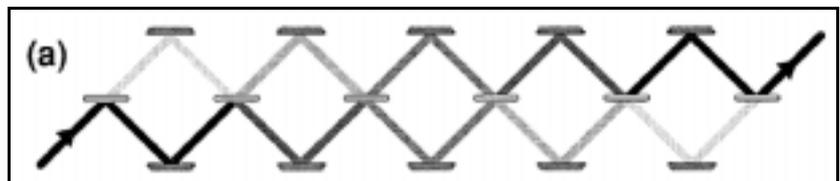


Die Interferenz geschieht zwischen den Feldern, während wir bei der Frage nach Absorption / Transmission Energien diskutieren, welche quadratisch in den Amplituden der Felder sind. Eine Reduktion der Feldstärke auf dem Absorber führt somit zu einer noch wesentlich stärkeren Reduktion der Energiedichte.

### 4.7.3. Wiederholte Messungen

Eine einzelne Messung kann zwar "wechselwirkungsfrei" sein, aber sie wird dann nur wenig Information liefern. Man kann das Prinzip aber erweitern, um die Nachweiswahrscheinlichkeit nahe zu 1 bringen (P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, and M.A. Kasevich, *Interaction-Free Measurement*, Phys. Rev. Lett. 74, 4763-4766 (1995)).

Dazu betrachten wir eine Reihe von gekoppelten Interferometern. Bei jedem Strahlteiler wird ein geringer Teil des Feldes transmittiert. Die Reflektivität jedes Strahlteilers beträgt



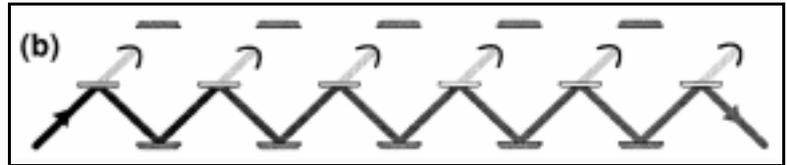
$$R = \cos^2\left(\frac{\pi}{2N}\right),$$

wobei N die Anzahl der Strahlteiler bezeichnet. Man kann die Längen der verschiedenen Arme so einrichten, dass zwei aufeinanderfolgende Teilwellen konstruktiv überlagern. Die Amplitude des Feldes im oberen Teil nach dem i-ten Strahlteiler beträgt dann

$$E_i \propto \sin(\pi i / 2N),$$

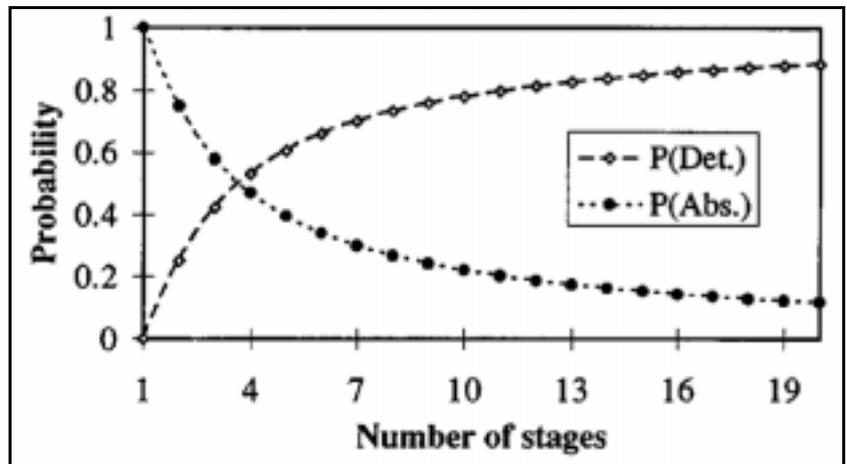
so dass schließlich die gesamte Intensität oberhalb des Strahlteilers ist, d.h. die Transmissionswahrscheinlichkeit erreicht nach N Stufen gerade eins. Die Felder in der unteren Hälfte interferieren hingegen destruktiv, so dass jedes eintreffende Photon sich nach N Spiegeln oberhalb des Spiegels befindet.

Wenn man dagegen einen Absorber in die obere Hälfte stellt, so findet diese konstruktive Interferenz (oben), resp. destruktive Interferenz (unten) nicht statt und der größte Teil der Intensität bleibt in der unteren Hälfte des Interferometers. Ähnlich wie beim Zeno Effekt führt die wiederholte Messung dazu dass keine Intensität transmittiert wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon im unteren Bereich bleibt beträgt dann



$$P = \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi}{2N} \right) \right]^N$$

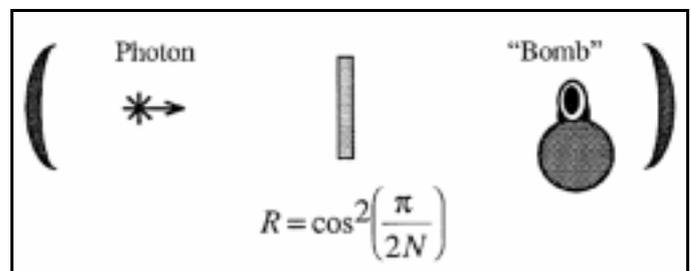
Mit zunehmender Zahl der Stufen nimmt die Wahrscheinlichkeit dafür dass das Photon im unteren Interferometer bleibt und damit anzeigt dass im oberen ein Absorber vorhanden ist, zu. Gleichzeitig nimmt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Detektor anspricht, ab. Im Grenzfall vieler Stufen findet somit eine wechselwirkungsfreie sichere Messung statt.



#### 4.7.4. Experiment

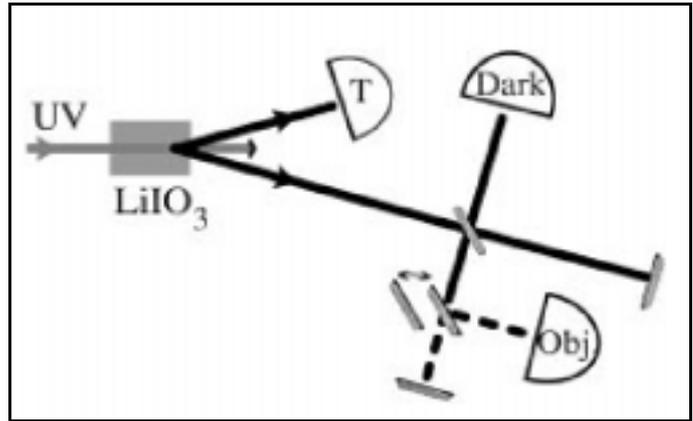
In einem wirklichen Experiment (P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, and M.A. Kasevich, *Interaction-Free Measurement*, Phys. Rev. Lett. 74, 4763-4766 (1995).) verwendet man statt der Serie von Interferometern einen einzigen Resonator, der vom Photon mehrfach durchquert wird.

Im wesentlichen handelt es sich hier um zwei gekoppelte Fabry-Perot interferometer.



Experimentelle Realisierung mit Einzelphotonenquelle. Die Verwendung einer solchen Lichtquelle optimiert die Kontrolle über die Absorption / Transmission der Photonen und erlaubt damit, den Hintergrund in diesem Experiment zu minimieren.

Mit dem gleichen Prinzip kann auch "ohne Wechselwirkung" ein Bild erzeugt werden indem eine Oberfläche abgerastert wird (A.G. White, J.R. Mitchell, O. Nairz, and P.G. Kwiat, "Interaction-free imaging", Phys. Rev. A 58, 605-613 (1998).).



#### **4.7.5. Literatur:**

M. Renninger, "Messungen ohne Störung des Meßobjekts". Zeitschrift Physik 158 , 417-420 (1960). ; J. G. Cramer, "The transactional interpretation of quantum mechanics", Rev. Mod. Phys. 58 (3), 647-688 (1986).

R. H. Dicke, "Interaction-free quantum measurements: A paradox?", Am. J. Phys., 49 (10), 925-930 (1981).

A. C. Elitzur and L. Vaidman, "Quantum Mechanical Interaction-Free Measurements", Found. Phys., 23 (7), 987-997 (1993).

P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger, and M.A. Kasevich, 'Interaction-Free Measurement', Phys. Rev. Lett. 74, 4763-4766 (1995).

Eine nützliche Zusammenfassung findet man in (Tamás Geszti, 'Interaction-free measurement and forward scattering', Phys. Rev. A 58, 5206-5209 (1998)).