

### 3. Berry's Phase

<b>3. Berry's Phase</b>	<b>1</b>
<b>3.1 Die Adiabatische Geometrische Phase</b>	<b>2</b>
3.1.1. Das adiabatische Theorem	2
3.1.2. Beweis	2
3.1.3. Geschlossene Trajektorie	6
3.1.4. Vektorfeld	7
3.1.5. Anwendung auf Spinsysteme	7
<b>3.2 Messung der Phase</b>	<b>10</b>
3.2.1. Interferometrische Messung	10
3.2.2. Optische Interferometrie	11
3.2.3. Interferometrie mit internen Zuständen	12
3.2.4. Rechenbeispiel: zwei gekoppelte Spins	13
3.2.5. Differentielle Messungen	14
<b>3.3 Einige Beispiele</b>	<b>17</b>
3.3.1. Spinsysteme	17
3.3.2. Der molekulare Aharonov-Bohm Effekt	17
3.3.3. Beispiele aus der Festkörperphysik	20
3.3.4. Pancharatnam's Phase	21
3.3.5. Abbildung auf die Poincaré Kugel	22
3.3.6. Phasendifferenzen für geschlossene Kurven	23
<b>3.4 Paralleler Transport</b>	<b>25</b>
3.4.1. Nützliches aus der Differentialgeometrie	25
3.4.2. Paralleler Transport und geometrische Phasen	26
3.4.3. Faserbündel	26
<b>3.5 Verallgemeinerungen</b>	<b>28</b>
3.5.1. Zyklische Evolution	28
3.5.2. Nicht-Abelsche Berry Phasen	28
3.5.3. Rotation eines Pendels	29
3.5.4. Weitere klassische Analoga	30

## 3.1 Die Adiabatische Geometrische Phase

### 3.1.1. Das adiabatische Theorem

Im Rahmen der Einführungsvorlesung Quantenmechanik werden primär Systeme behandelt, die durch einen zeitlich konstanten Hamiltonoperator beschrieben werden können. In vielen Fällen weist der Hamiltonoperator jedoch eine Zeitabhängigkeit auf. Die wichtigste ist wahrscheinlich der Fall der harmonischen Änderung.

Ist diese resonant so werden dadurch Übergänge zwischen stationären Zuständen induziert. Dies ist z.B. eine gute Näherung für spektroskopische Experimente, wo ein oszillatorisches Feld angelegt wird, also z.B. ein magnetisches Wechselfeld oder ein optisches Feld. **Z: Übergänge**

Ein weiterer wichtiger Fall, der noch analytisch behandelt werden kann, und der den Gegenpol der resonanten Anregung behandelt, ist der einer langsamen Zeitabhängigkeit.

Wenn der Hamiltonoperator  $\mathcal{H}(t)$  eines Systems **Z: Änderung Hamiltonoperator, Zustände** eine langsame Zeitabhängigkeit aufweist stellt sich die Frage, wie sich ein Zustand  $\Psi(t)$  verhält, der zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t_0$  ein Eigenzustand  $\Psi_i$  des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}(t_0)$  ist. Das adiabatische Theorem der Quantenmechanik sagt dazu, dass sich dieser Zustand in einen Zustand  $\Psi_i(t_0+\delta t)$  entwickelt, der wiederum ein Eigenzustand des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}(t_0+\delta t)$  ist. Adiabatisch bedeutet dass das System keine Übergänge in einen anderen Zustand durchführt.

Mathematisch lässt sich diese Aussage elegant mit Hilfe von Projektionsoperatoren  $P_j$  und Evolutionsoperatoren  $U(t)$  schreiben.  $P_j(t)$  projiziert einen beliebigen Zustand auf den  $j$ -ten Eigenzustand des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}(t)$ . Der Evolutionsoperator  $U(t)$  beschreibt die Zeitentwicklung aus einem Anfangszustand  $\Psi(0)$  zum Endzustand

$$\Psi(t) = U(t) \Psi(0) .$$

Das adiabatische Theorem sagt dann, dass für langsame Änderungen

$$U(t) P_j(0) = P_j(t) U(t) ,$$

d.h. dass eine Projektion auf den  $j$ -ten Eigenzustand nach der zeitlichen Änderung das gleiche Resultat ergibt wie die umgekehrte Reihenfolge.

### 3.1.2. Beweis

Der Beweis des adiabatischen Theorems ist einfach sofern die Änderung des Hamiltonoperators die Eigenzustände nicht ändert. Dann bleibt der Hamiltonoperator zu allen

Zeiten in der Ausgangsbasis diagonal. Damit vertauscht er zu allen Zeiten mit den Projektionsoperatoren  $P_j$  und damit mit sich selber und mit dem Evolutionsoperator  $U$ .

Im allgemeinen ändert sich der Hamiltonoperator jedoch in einer Weise dass auch die Eigenzustände ändern.

Dies lässt sich am einfachsten bei einem Spin in einem Magnetfeld zeigen: Der oben behandelte Fall entspricht der Änderung der Stärke des Magnetfeldes ohne dass die Richtung verändert wird. **Z: Variation des Magnetfeldes**

Der allgemeinere Fall entspricht einer Richtungsänderung des Magnetfeldes (ev. mit gleichzeitiger Änderung der Stärke). In diesem Fall unterscheiden sich die Eigenzustände von  $\mathcal{H}(t+\delta t)$  und  $\mathcal{H}(t)$ . Wenn wir z.B. das Magnetfeld von der z- in die x-Richtung rotieren so wird sind die Eigenzustände eines Spin-1/2 zunächst  $|+1/2\rangle$  und  $|-1/2\rangle$  und zum Schluss  $|1/2\rangle + |-1/2\rangle$  und  $|1/2\rangle - |-1/2\rangle$ . **Z: Rotation des Magnetfeldes**

Dies bedeutet, dass der Eigenzustand  $\Psi_i(t)$  zu einer wenig späteren Zeit in der Basis der aktuellen Eigenzustände die Form **Z: "Missweisung"**

$$\Psi(t+dt) = \Psi_i(t+\delta t) e^{iE_i\delta t/\hbar} + \sum_{j \neq i} \epsilon_j \Psi_j(t+\delta t) .$$

Im Beispiel des Spins im Magnetfeld zeigt der Spin somit nicht exakt parallel zur Magnetfeldrichtung. Die Aussage des adiabatischen Theorems ist es, dass die Abweichungen  $\epsilon_j$  beliebig klein gemacht werden können wenn die Änderung nur langsam genug geschieht.

Es soll an dieser Stelle kein mathematisch strenger Beweis geführt werden, sondern eher heuristisch argumentiert werden. Einen ausführlichen Beweis findet man z.B. in (Messiah, Quantum Mechanis, C. XVII, § 10-14).

Ein relativ einfacher Ansatz ist wiederum der Spin im magnetischen Feld. Hier führt eine Rotation des Magnetfeldes dazu, dass der Spin eine Komponente senkrecht zum Magnetfeld erhält. Es ist in diesem Fall sinnvoll, die Dynamik in einem System zu betrachten, in dem das Magnetfeld zeitunabhängig ist.

Wie man leicht zeigen kann zeigt in diesem Koordinatensystem das Magnetfeld in eine etwas andere Richtung, wobei der Unterschied **Z: Effektives Feld**

$$\vec{\delta B} = 1/\gamma \vec{\omega}$$

in der Orientierung proportional ist zur Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  mit der die Richtung des Magnetfeldes ändert. Die Komponente des Spins, welche in Richtung dieses effektiven Feldes zeigt, ist zeitunabhängig. Da die beiden Richtungen im Grenzfall langsamer Variation zusammenfallen bleibt der Spin somit beliebig nahe beim Eigenzustand, der aus dem Anfangszustand hervorgeht.

Ist das quantenmechanische System kein Spin, so können ähnliche Bedingungen aufgestellt werden. Die Bedingung für adiabatischen Transport lautet dann dass die Richtung der Eigenvektoren im Vergleich mit der Bohr-Frequenz nur langsam variieren darf:

|Max. radiale Geschwindigkeit von  $|\mathbf{l}\rangle \ll$   
|Min. Bohr-Geschwindigkeit von  $|\mathbf{l}\rangle - |\mathbf{j}\rangle|$  .

Die Änderung der Phase

In der obigen Form macht das Theorem keine Aussage über die Phase des resultierenden Zustandes. Dies ist der Punkt, den Berry untersuchte.

Prinzipiell muß die Phase des Zustandes zu jedem Zeitpunkt die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = -i \mathcal{H}(t) \Psi(t)$$

erfüllen. Da wir angenommen haben dass der Zustand  $\Psi_i(t)$  ein Eigenzustand des Hamiltonoperators ist folgt für den Fall eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators

$$\Psi(t) = \Psi(0) \exp(-i \phi) \quad \text{mit} \quad \phi = \mathcal{E}_i t / \hbar,$$

d.h. die Phase ist zu jedem Zeitpunkt durch das Integral der Energie des entsprechenden Zustandes gegeben.

Für zeitabhängige Hamiltonoperatoren würde die einfachste Verallgemeinerung die Form

$$\phi(t) = 1/\hbar \int_{0,t} \mathcal{E}_i(t') dt' = \int_{0,t} \langle \Psi(t') | \mathcal{H}(t') | \Psi(t') \rangle dt'$$

annehmen, d.h. die Phase wäre gegeben durch das Integral über die zeitabhängige Präzessionsfrequenz.

Dies ist auch die korrekte Lösung falls der Hamiltonoperator im Parameterraum nur auf einem Strahl variiert, d.h. solange er immer proportional zu sich selber bleibt. Ändert er aber seine Richtung im Parameterraum, so erhält die Phase einen zusätzlichen Beitrag, der als geometrisch bezeichnet wird. Im folgenden wird diese geometrische Phase berechnet.

Schrödingergleichung

Dazu wählen wir zunächst eine Basis von Eigenzuständen des Hamiltonoperators auf dem gesamten Parameterraum. Der Parameterraum soll in unserem Fall durch die beiden Winkel  $\theta, \phi$  gegeben sein, welche die Orientierung eines konstanten Magnetfeldes beschreiben. Wir bezeichnen diese Zustände mit  $\eta(\theta, \phi)$ . Die Phase dieser Zustände ist beliebig und kann über den gesamten Parameterraum variieren, sie muß aber eindeutig sein. Für jeden Parametersatz  $R = (\theta, \phi)$  gilt die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\mathcal{H}(\mathbf{R}) \eta(\mathbf{R}) = \mathcal{E}(\mathbf{R}) \eta(\mathbf{R}) .$$

Das System entwickelt sich nach der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = -i \mathcal{H}(\mathbf{R}) \Psi(t) \quad (\hbar=1) .$$

Wir betrachten jetzt die zeitliche Entwicklung eines Zustandes  $\Psi(t)$ , der sich zu Beginn im Eigenzustand  $\eta(\mathbf{R}(0))$  befindet. Unter der Annahme dass das adiabatische Theorem gilt können wir die Lösung der Schrödingergleichung ansetzen als

$$\Psi(t) = \exp(-i \int_0^t \mathcal{E}_\eta(\mathbf{R}(t')) dt') e^{i\gamma_\eta(t)} \eta(\mathbf{R}) .$$

Der erste Phasenfaktor stammt aus der direkten Verallgemeinerung des zeitunabhängigen Falls. Der zweite, zusätzliche Phasenfaktor soll jetzt bestimmt werden.

Wir bestimmen ihn indem wir diesen Ansatz in die Schrödingergleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi(t) &= \frac{d}{dt} \{ \exp(-i \int_0^t \mathcal{E}_\eta(\mathbf{R}(t')) dt') e^{i\gamma_\eta(t)} \eta(\mathbf{R}) \} = -i \mathcal{H}(\mathbf{R}) \Psi(t) \\ &= \exp(-i \int_0^t \mathcal{E}_\eta(\mathbf{R}(t')) dt') e^{i\gamma_\eta(t)} \{ \eta(\mathbf{R}) [-i \mathcal{E}_\eta(\mathbf{R}(t)) + i \frac{d}{dt} \gamma_\eta(t)] + \frac{d}{dt} \eta(\mathbf{R}) \} . \end{aligned}$$

Wir schreiben für den letzten Term

$$\frac{d}{dt} \eta(\mathbf{R}(t)) = \nabla_{\mathbf{R}} \eta(\mathbf{R}) d\mathbf{R}/dt .$$

Die rechte Seite der Schrödingergleichung wird zu

$$-i \mathcal{H}(\mathbf{R}) \Psi(t) = -i \mathcal{E}_\eta(\mathbf{R}(t)) \exp(-i \int_0^t \mathcal{E}_\eta(\mathbf{R}(t')) dt') e^{i\gamma_\eta(t)} \eta(\mathbf{R}) .$$

Damit reduziert sich die Gleichung auf

$$\eta(\mathbf{R}) i \frac{d}{dt} \gamma_\eta(t) + \nabla_{\mathbf{R}} \eta(\mathbf{R}) d\mathbf{R}/dt = 0 .$$

Dies kann zu einer Bewegungsgleichung für  $\gamma_\eta(t)$  umgeformt werden indem wir von links das Skalarprodukt mit  $\eta(\mathbf{R})$  bilden:

$$\frac{d}{dt} \gamma_\eta(t) = i \langle \eta(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \eta(\mathbf{R}) \rangle d\mathbf{R}/dt .$$

Die zeitliche Änderung ist somit gegeben durch das Skalarprodukt zwischen der Basisfunktion  $\eta(\mathbf{R})$  und deren Änderung  $\nabla_{\mathbf{R}} \eta(\mathbf{R})$ , multipliziert mit der Geschwindigkeit dieser Variation.

### 3.1.3. Geschlossene Trajektorie

Die Funktion  $\gamma_\eta(t)$  ist abhängig von der Wahl der Basiszustände und damit zunächst noch beliebig. Für eine weitere Auswertung ist es erforderlich, einen direkten Vergleich zwischen zwei Zuständen zu erhalten. Deshalb beschränken wir uns auf geschlossene Kurven  $C$  im Parameterraum. Das Integral der zusätzlichen Phase  $\gamma_\eta$  über die geschlossene Kurve  $C$  wird dann

$$\gamma_\eta(C) = i \oint_C \langle \eta(R) | \nabla_R \eta(R) \rangle dR$$

zu einem Pfadintegral, welches nicht mehr von der Geschwindigkeit  $dR/dt$  abhängt, sondern nur noch vom Pfad.

Der zusätzliche Beitrag zur Phase des quantenmechanischen Zustandes während der zyklischen Evolution kann damit berechnet werden als

$$\gamma_\eta(C) = i \oint \langle \eta | \frac{d}{ds} \eta \rangle ds .$$

Hier stellt  $s$  die Parametervariable in Richtung des Pfades  $C$  dar. Da wir angenommen haben dass  $\eta$  normiert ist, ist  $\langle \eta | \frac{d}{ds} \eta \rangle$  reell und somit auch die Phase  $\gamma_\eta(C)$ .

Für eine weitere Auswertung benutzen wir den Stokes'schen Satz um das Linienintegral in ein Flächenintegral umzuformen:

$$\gamma_\eta(C) = - \text{Im} \iint_C \vec{\nabla} \times \langle \eta | \vec{\nabla} \eta \rangle d\vec{a} = - \text{Im} \iint_C \langle \vec{\nabla} \eta | \times | \vec{\nabla} \eta \rangle d\vec{a} .$$

Das Flächenintegral muss über die von  $C$  begrenzte Fläche laufen. Wir schieben einen Einheitsoperator

$$\sum_m |m\rangle \langle m|$$

ein

$$\gamma_\eta(C) = - \sum_{m \neq \eta} \text{Im} \iint_C \langle \vec{\nabla} \eta | m \rangle \times \langle m | \vec{\nabla} \eta \rangle d\vec{a} .$$

$m$  läuft über alle Eigenzustände des Hamiltonoperators, wobei  $m = \eta$  ausgeschlossen werden kann, da  $\langle \eta | \vec{\nabla} \eta \rangle$  rein imaginär ist.

Die Skalarprodukte  $\langle m | \vec{\nabla} \eta \rangle$  erhält man aus

$$\langle m | \vec{\nabla} \eta \rangle = \langle m | \vec{\nabla} H \eta \rangle / (E_\eta - E_m) , \quad m \neq \eta .$$

### 3.1.4. Vektorfeld

Damit können wir die geometrische Phase schreiben als

$$\gamma_{\eta}(C) = - \iint_C \vec{V}_{\eta}(\vec{R}) \, d\vec{a}$$

mit

$$\vec{V}_{\eta}(\vec{R}) = \text{Im} \sum_{m \neq \eta} \langle \eta(\vec{R}) | \vec{\nabla} \mathcal{H}(\vec{R}) | m(\vec{R}) \rangle \times \langle m(\vec{R}) | \vec{\nabla} \mathcal{H}(\vec{R}) | \eta(\vec{R}) \rangle / (\mathcal{E}_{\eta} - \mathcal{E}_m)^2 .$$

Der wesentliche Punkt dieses Ausdrucks liegt darin, dass die Änderung der Eigenvektoren hier nicht mehr auftaucht; lediglich Matrixelemente von  $\vec{\nabla} \mathcal{H}(\vec{R})$  tauchen auf, und diese sind unabhängig von der Wahl der Basiszustände  $\eta(\vec{R})$ . Somit ist sichergestellt, dass bei einem geschlossenen Weg die Phase lediglich von der Änderung des Hamiltonoperators abhängt, nicht aber von der Wahl der Basiszustände. Dieser Beitrag wird als geometrische Phase bezeichnet (oder als Berry's Phase) weil sie nicht vom Hamiltonoperator abhängt oder von der Zeit, die das System benötigt, um den Pfad zu durchlaufen, sondern nur vom Pfad, also von der Geometrie. Eine Änderung der Phase der Basiszustände  $\eta$  ändert nichts an der resultierenden Phase, da das Integral über einen geschlossenen Weg berechnet wird, so dass die Referenzzustände am Anfang und Ende des Weges die gleichen sind.

M.V. Berry, '*Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*', Proc.Roy.Soc.London A392, 45-57 (1984).

M.V. Berry, '*Quantum phase corrections from adiabatic iteration*', Proc.Roy.Soc.London a414, 31-46 (1987).

M. Berry, '*Die geometrische Phase*', Spektrum der Wissenschaft Feb.89, 74-81 (1989).

J.W. Zwanziger, M. Koenig, and A. Pines, 'Berry's phase', Ann. Rev. Phys. Chem. 41, 601-646 (1990).

Das erstaunliche an diesem Resultat ist, dass die resultierende Phase vom Weg abhängt, den das System zurückgelegt hat. Es besitzt somit eine Art geometrisches Gedächtnis. Die Phase ist rein geometrisch, d.h. man braucht die dynamischen Parameter des Systems wie z.B. Kopplungskonstanten, oder sogar die Planck'sche Konstante  $h$  nicht zu kennen.

### 3.1.5. Anwendung auf Spinsysteme

Wir berechnen nun die geometrische Phase für ein konkretes Beispiel explizit. Dafür wählen wir einen Spin  $\frac{1}{2}$  in einem zeitabhängigen Magnetfeld. Der Hamiltonoperator lautet dann

$$\mathcal{H} = \omega_x I_x + \omega_y I_y + \omega_z I_z \quad \text{mit } \omega_a = \gamma B_a$$

und die Ableitung

$$\vec{\nabla} \mathcal{H} = \{I_x, I_y, I_z\}$$

hängt nicht vom Ort  $\vec{R} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  im Parameterraum ab.

Das Vektorfeld  $V_\eta$  lässt sich am einfachsten am Nordpol der Einheitskugel  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0,0,1)$  berechnen: Hier lautet der Hamiltonoperator

$$\mathcal{H}(0,0,1) = I_z .$$

Somit sind die Eigenzustände  $\eta, m$  die Eigenzustände von  $I_z$  und die Außerdiagonalelemente

$$\langle \eta(\vec{R}) | I_z | m(\vec{R}) \rangle = 0 .$$

Im Vektorprodukt

$$\langle \eta(\vec{R}) | \vec{\nabla} \mathcal{H}(\vec{R}) | m(\vec{R}) \rangle \times \langle m(\vec{R}) | \vec{\nabla} \mathcal{H}(\vec{R}) | \eta(\vec{R}) \rangle$$

verschwinden deshalb die transversalen Terme, da sie im ersten oder zweiten Faktor  $\langle \eta(\vec{R}) | I_z | m(\vec{R}) \rangle$  enthalten. Die z-Komponente wird

$$\begin{aligned} V_{+z}(0,0,1) &= \text{Im} \sum_{m \neq \eta} [\langle \eta(\vec{R}) | I_x | m(\vec{R}) \rangle \langle m(\vec{R}) | I_y | \eta(\vec{R}) \rangle - \\ &\quad \langle \eta(\vec{R}) | I_y | m(\vec{R}) \rangle \langle m(\vec{R}) | I_x | \eta(\vec{R}) \rangle] / (\mathcal{E}_\eta - \mathcal{E}_m)^2 . \\ &= \text{Im} \sum_{m \neq \eta} \langle \eta(\vec{R}) | [I_x, I_y] | \eta(\vec{R}) \rangle / (\mathcal{E}_\eta - \mathcal{E}_m)^2 = 1/(2 \omega^2) . \end{aligned}$$

Da die Wahl der Achsen willkürlich ist muss somit das Vektorfeld auf dem gesamten Parameterraum die Form

### Z: Vektorfeld auf Kugel

$$V_+(\vec{R}) = \vec{\omega} / 2\omega^3 \quad \text{mit } \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \text{ und } \omega = |\omega| .$$

annehmen. Es entspricht somit dem Feld eines magnetischen Monopols der Stärke  $1/2$  am Ursprung. Aus Symmetriegründen muss außerdem

$$V_-(\vec{R}) = -V_+(\vec{R}) = -\vec{\omega} / 2\omega^3$$

sein.



Wir können dieses Vektorfeld einfach als ein Magnetfeld interpretieren, das durch einen magnetischen Monopol im Ursprung erzeugt wird und somit radial nach außen zeigt.

Das wesentliche Resultat dieser Rechnung ist, dass die Phase  $\gamma$  nicht von den Details des Weges abhängt. Da die Stärke des Vektorfeldes mit dem Quadrat der Entfernung vom Ursprung abnimmt erhält man aus dem Integral über die eingeschlossene Fläche (die proportional zum Quadrat des Radius zunimmt) einen Fluss des Vektorfeldes, der unabhängig vom Abstand ist. Die geometrische Phase wird damit

$$\gamma_m(C) = m \Omega ,$$

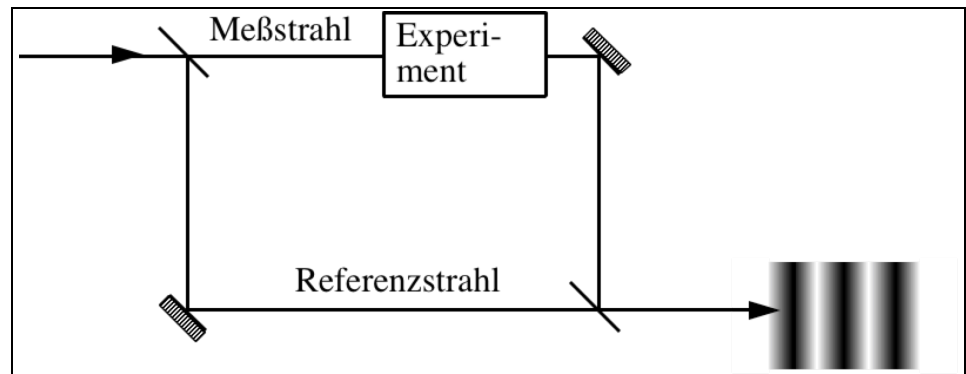
wobei  $m$  die magnetische Quantenzahl darstellt, die den Zustand charakterisiert, und  $\Omega$  den Raumwinkel, der durch die Trajektorie  $C$  am Ursprung des Koordinatensystems aufgespannt wird.

## 3.2 Messung der Phase

### 3.2.1. Interferometrische Messung

Da die Phase einer quantenmechanischen Zustandsfunktion direkt nicht messbar ist, muß man für den Nachweis dieses Effekts ein Experiment durchführen, in dem mindestens zwei Zustandsfunktionen miteinander verglichen werden. Grundsätzlich gibt es dafür zwei Möglichkeiten.

Die eine entspricht einem Interferometer und läßt sich am einfachsten mit Photonen durchführen: man teilt einen Lichtstrahl an einem Strahlteiler in zwei Teilstrahlen. Der eine Teilstrahl wird



dann der zu untersuchenden Reihe von Transformationen ausgesetzt, während der andere als Referenz dient. Die beiden Teilstrahlen werden danach wieder kombiniert.

Dabei wird eine Messung der Phasendifferenz möglich weil an einem Strahlteiler die beiden Ausgangsfelder der Summe, resp. der Differenz der beiden Amplituden entsprechen:

$$\Psi_{\pm} = \Psi_1 \pm \Psi_2$$

Wenn die eine der beiden Wellen um eine Phase  $\phi$  verschoben wird ändern sich die Ausgangsfelder wie folgt:

$$\Psi_{\pm} = \Psi_1 \pm \Psi_2 e^{i\phi} .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  als reell und positiv. Damit werden die Intensitäten der beiden transmittierten Felder

$$|\Psi_{\pm}|^2 = |\Psi_1 \pm \Psi_2 e^{i\phi}|^2 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 \pm 2 \Psi_1 \Psi_2 \cos\phi .$$

Das Intensitätsverhältnis der beiden Teilstrahlen ist damit ein direktes Maß für die Phasenverschiebung  $\phi$ . Für identische Amplituden erwarten wird eine vollständige Modulation, bei ungleichen Amplituden etwas geringere "Sichtbarkeit".

Dies ist z.B. die Technik, die bei Neutroneninterferometern verwendet wird (H. Rauch, A. Zeilinger, G. Badurek, A. Wilfing, W. Bauspiess, and U. Bonse, 'Verification of coherent spinor rotation of fermions', Phys.Lett. 54a, 425-427 (1975).).

**F: Neutroneninterferometer**

### 3.2.2. Optische Interferometrie

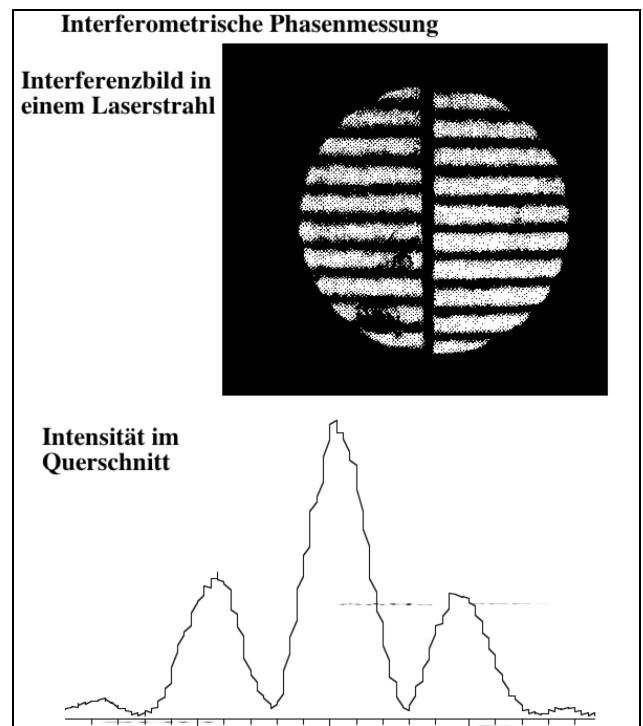
Eine andere Möglichkeit für den Nachweis von Berry's Phase sind Photonen. Man hat hier z.B. die Möglichkeit, eine Änderung des Impulses zu bewirken indem man Licht auf einen Spiegel schickt oder durch eine Faser. Da der Spin eines Photons an seine Ausbreitungsrichtung gekoppelt ist wird damit auch der Spin gedreht.

Man verwendet diese Möglichkeit auch experimentell. So kann man, indem man einen Laserstrahl zweimal auf einem Spiegel reflektiert, die Polarisationsrichtung um einen beliebigen Winkel drehen.

#### Z: Polarisationsdreher

Bei optischen Interferometern arbeitet man meist mit nicht perfekt überlagerten Strahlen. Dies führt dazu, dass einzelne Teile des Strahls etwas unterschiedliche Wege zurücklegen und die Phase (auch die relative Phase) über den Strahlquerschnitt variiert. Deshalb beobachtet man dann ein Interferenzmuster in jedem Teilstrahl.

In diesem Beispiel (H. Jiao, S.R. Wilkinson, and R.Y. Chiao, 'Two topological phases in optics by means of a nonplanar Mach-Zehnder interferometer', Phys. Rev. A 39, 3475-3486 (1989).) wurde ein Laserstrahl nochmals, wobei in der linken Hälfte eine andere Polarisation gemessen wurde als in der rechten Hälfte. Die unterschiedliche Position der Knotenlinien ist ein Maß für die Phasendifferenz die für die beiden Polarisationen erzeugt wird.



Das untere Bild stellt einen Querschnitt durch eine Intensitätsverteilung dar (in einem anderen Experiment).

In diesem Experiment wurde ein Laserstrahl in zwei Teile aufgeteilt, von denen jeder durch eine Trajektorie im Parameterraum geführt wurde. Durch eine Kombination verschiedener optischer Elemente (Spiegel, Verzögerungsplatten) konnten unterschiedliche Kurven auf der Poincaré Kugel abgefahren werden.

#### F: Interferometer von Jiao

Hier ist ein Beispiel für eine solche Trajektorie gezeigt. Darunter sind die experimentellen Resultate für eine Messreihe zusammengestellt. Die x-Achse bezeichnet die Fläche, welche von der Trajektorie auf der Poincaré Kugel eingeschlossen wird, die y-Achse die ge-

#### F: Trajektorie, Resultate

messene Phasenverschiebung. Innerhalb der experimentellen Unsicherheit stimmen sie mit der Erwartung überein.

### 3.2.3. Interferometrie mit internen Zuständen

In diesem Fall wurden somit zwei Kopien des selben Systems verwendet, welche sich jedoch durch ihre Position unterscheiden, so dass sie unabhängig manipuliert werden konnten. Dies ist offensichtlich ein Konzept, das verallgemeinert werden kann: Grundsätzlich benötigt man für ein solches interferometrisches Experiment zwei Kopien eines Systems, welche sich durch einen Parameter unterscheiden. Im obigen Fall war dies die räumliche Position.

Eine andere Möglichkeit wäre z.B. ein Atom mit einem Grundzustand und einem angeregten Zustand. Diese beiden Zustände können **Z:  $|g\rangle / |e\rangle$**  z.B. dadurch unterschieden werden dass man einen Laser ankoppelt, oder über die unterschiedlichen g-Faktoren. Damit wird es möglich, an einem der beiden "Kopien" Manipulationen durchzuführen wie z.B. den Spin durch eine Trajektorie im Parameterraum zu führen, während die andere Kopie nicht beeinflusst wird und deshalb als Referenz dienen kann.

Die differentielle Phasenänderung kann dann **Z: Interne Interferometrie** wiederum über die Interferenz bestimmt werden indem man eine Überlagerung zwischen Grund- und angeregtem Zustand erzeugt.

Einer der wichtigsten Arten von solchen internen Interferometern ist eigentlich ein Hybrid (C.J. Bordé, 'Atomic interferometry with internal state labeling', Phys. Lett. A 140, 10-12 (1989).):

Wenn man bei einem Atom eine Superposition zwischen Grund- und angeregtem Zustand erzeugt muss dafür ein Photon teilweise absorbiert werden. Der resultierende Superpositionszustand **Z: Internes Atominterferometer**

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$$

besteht aus zwei Komponenten, welche unterschiedliche Energie und unterschiedlichen Impuls haben:

$$|g\rangle : \mathcal{E} = 0, p = 0, x = 0 .$$

$$|e\rangle : \mathcal{E} = \omega_0, p = \hbar k, x = \hbar k t/M ,$$

wobei  $\omega_0$  und  $\hbar k$  Energie und Impuls des Photons darstellen und M die Masse des Atoms. Da der angeregte Zustand den Photonenimpuls erhalten hat entfernen sich die beiden Komponenten voneinander, d.h. nach einer gewissen Zeit sind sie nicht nur in-

tern, sondern auch extern getrennt. Es ist experimentell möglich, auf diese Weise atomare Wellenpakete zu erzeugen, die um mehrere cm getrennt sind.

### 3.2.4. Rechenbeispiel: zwei gekoppelte Spins

Wir betrachten als Beispiel den Zustand

$$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha_1\alpha_2\rangle + |\beta_1\alpha_2\rangle) .$$

Er stellt zwei gekoppelte Spins dar, wobei der erste Spin in einem Superpositionszustand ist, der zweite im  $|\alpha\rangle$  Zustand.

Eine  $2\pi$  Rotation des zweiten Spins wird nun so durchgeführt, dass nur derjenige Teil, der an den  $\alpha$  Zustand des ersten Spins gekoppelt ist, beeinflusst wird.

Dies ist in geeigneten Systemen möglich wenn die Kopplung zwischen den beiden Spins genügend stark ist, dass die Übergangsfrequenzen in einem NMR-Spektrum getrennt sind.

**Z: AX Spektrum**

Die  $2\pi$  Rotation führt bekanntlich bei einem Spin 1/2 zu einer Inversion des Vorzeichens

$$\Psi(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\alpha_1\alpha_2\rangle + |\beta_1\alpha_2\rangle) .$$

In diesem Fall führt die  $2\pi$  Rotation zu beobachtbaren Änderungen, wie man leicht ersehen kann. Wir berechnen z.B. den Erwartungswert für die x-Komponente des Spins 1,  $I_x^{(1)}$  :

$$\langle I_x^{(1)} \rangle(0) = \frac{1}{4} (|\beta_1\alpha_2\rangle + |\alpha_1\alpha_2\rangle)(\langle\alpha_1\alpha_2| + \langle\beta_1\alpha_2|) = \frac{1}{2} .$$

$$\langle I_x^{(1)} \rangle(1) = \frac{1}{4} (-|\beta_1\alpha_2\rangle + |\alpha_1\alpha_2\rangle)(\langle-\alpha_1\alpha_2| + \langle\beta_1\alpha_2|) = -\frac{1}{2} .$$

Die selektive Rotation einer der beiden Komponenten des Spins 2 führt somit zu einer Inversion des Spins 1.

Wie man leicht sieht spielt dabei der Zustand  $|\beta\beta\rangle$  keine Rolle. Es ist somit ohne weiteres möglich, sich auf drei Zustände zu beschränken. Zwischen den Zuständen  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  wird zu Beginn des Experimentes eine kohärente Superposition erzeugt, so dass eine feste Phasenbeziehung als Referenz zur Verfügung steht. Das Zweiniveausystem  $|2\rangle$ - $|3\rangle$  wird dann über die gewählte Trajektorie geschickt und die resultierende Phasenänderung im Spin-Echo detektiert. Der  $\pi$ -Puls dient dazu, dynamische Anteile der Phase zu refokussieren, so dass nur die interessierenden Anteile gemessen werden, welche aus der Trajektorie C stammen.

**F: 3-Niveausystem**

Wir können in diesem Fall z.B. die beiden Zustände  $|2\rangle$  und  $|3\rangle$  verwenden und wie einen Spin  $1/2$  durch einen  $2\pi$  Zyklus bringen. Das Spinorverhalten sollte dazu führen, dass aus einem Zustand

$$\Psi_{23}(0) = b|2\rangle + c|3\rangle$$

ein Zustand

$$\Psi_{23}(2\pi) = -b|2\rangle - c|3\rangle$$

wird.

Aufgrund der Linearität der Quantenmechanik folgt damit aber auch, dass ein Zustand

$$\Psi_{123}(0) = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle$$

nach einem  $2\pi$  Zyklus der beiden Zustände  $|2\rangle$  und  $|3\rangle$  ein Zustand

$$\Psi_{123}(2\pi) = a|1\rangle - b|2\rangle - c|3\rangle$$

entsteht.

Man kann ein solches System z.B. dazu verwenden, das Spinorverhalten eines Spin- $1/2$  (resp. eines Pseudo-Spin  $1/2$ ) zu testen (D. Suter and A. Pines, 'Indirect phase detection of NMR spinor transitions', Phys. Rev. Lett. 57, 242-244 (1986).). In diesem Beispiel wurde auch der Übergang  $|2\rangle$ - $|3\rangle$  beobachtet, um eine Kontrolle über die angelegte Trajektorie zu haben. So wurde z.B. nach einer Drehung des Systems  $|2\rangle$ - $|3\rangle$  die Kohärenz in diesem Zustand in den Ausgangszustand zurückgebracht. Dass dies aber nur modulo einer Gesamt-Phasendifferenz von  $\pi$  für das System  $|2\rangle$ - $|3\rangle$  geschieht zeigt das Signal, welches im Übergang  $|1\rangle$ - $|2\rangle$  beobachtet wurde: Es wechselt das Vorzeichen und gelangt erst nach einer Drehung um  $4\pi$  wieder in den Ausgangszustand zurück.

**F: Messresultate**

### 3.2.5. Differentielle Messungen

Dieses Konzept kann noch weiter vereinfacht werden: Anstelle einer Überlagerung von  $2 \times 2$  Zuständen können wir auch eine Überlagerung von  $1 \times 1$  Zuständen verwenden. So können wir im Falle des Spin- $1/2$  Systems auch direkt die Überlagerung zwischen einem  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  Zustand verwenden. Eine Trajektorie durch den Parameterraum, d.h. eine Variation des Hamiltonoperators über eine Variation des Magnetfeldes wird in diesem Fall immer beide Zustände berühren. Allgemein erwartet man, dass eine beliebige Trajektorie, welche einen Raumwinkel  $\Omega$  auf der Einheitskugel einschließt eine Phasenverschiebung um

$$e^{im\Omega}$$

erzeugt. Eine Superposition

$$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)$$

wird dadurch in den Zustand

$$\Psi(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle e^{i\Omega/2} + |\beta\rangle e^{-i\Omega/2})$$

überführt.

Die relative Phase ist, wie bereits gezeigt, als die Orientierung des Spinvektors messbar. Sie wurde in diesem Fall um

**Z: Orientierung des Spinvektors**

$$e^{i\Omega}$$

gedreht.

Diese Möglichkeit wurde z.B. von Bitter und Dubbers für eine Messung von Berry's Phase mit Hilfe von spin-polarisierten Neutronen verwendet (T. Bitter and D. Dubbers, 'Manifestation of Berry's topological phase in neutron spin rotation', Phys. Rev. Lett. 59, 251-254 (1987)).

Sie wählten eine konische Trajektorie des  $B_e$  Feldes im

**F: Trajektorie des B-Feldes; Resultate**

Ruhesystem des Neutrons. Dies kann durch ein statisches, räumlich variables Magnetfeld implementiert werden. Dazu wurden Drähte auf ein Rohr aufgewickelt, welches den Neutronenstrahl umschloss. Die gemessene Phasenverschiebung als Funktion des umschlossenen Raumwinkels ist unten aufgetragen.

Noch wesentlich einfacher als mit spin-polarisierten Neutronen kann diese Phase in einem NMR-Spektrometer beobachtet werden (D. Suter, G. Chingas, R.A. Harris, and A. Pines, 'Berry's phase in magnetic resonance', Mol.Phys. 61, 1327 (1987)).

Die am einfachsten zu realisierende Trajektorie ist kegelförmig: Das Magnetfeld dreht sich in einem konstanten Winkel zur z-Achse um die z-Achse. Dies kann experimentell im rotierenden Koordinatensystem durch off-resonante Einstrahlung realisiert werden.

**Z: Kegel Trajektorie**

Bei einer solchen Trajektorie ist der Raumwinkel gegeben als  $2\pi(1-\cos\theta)$ .

**Z: Raumwinkel**

Die experimentell gemessenen Phasen stimmen gut mit der erwarteten Proportionalität zum Raumwinkel der Trajektorie überein.

**F: Resultate**

**F: Trajektorie, Exp. Resultate**

Durch eine geeignete Kombination von zeitabhängigen Magnetfeldern ist es hier möglich, praktisch beliebige Trajektorien zu durchlaufen (D. Suter, K.T. Mueller, and A. Pines, '*Study of the Aharonov-Anandan Phase by NMR Interferometry*', Phys. Rev. Lett. 60, 1218-1220 (1988)). Hier wurden drei Arten von Trajektorien gewählt, welche auf der Einheitskugel einem Kreis, einem "Zweieck" und einem "Dreieck" entsprechen. Für jeden Typ wurden unterschiedliche Flächen durchlaufen. Die Resultate zeigen, dass die resultierende Phase nur von der eingeschlossenen Fläche abhängt.



## 3.3 Einige Beispiele

### 3.3.1. Spinsysteme

Anstatt den Spin über das Magnetfeld durch eine zyklische Trajektorie zu bewegen kann man dafür auch den elektrischen Feldgradienten-Tensor verwenden:

Kerne mit Quadrupolkopplung richten sich in der Abwesenheit eines Magnetfeldes nach dem elektrischen Feldgradienten aus. **Z: Orientierung im lokalen elektrischen Feld**

Dies kann z.B. durch Drehen eines Kristalls in eine Berry-Phase umgesetzt werden. **F: Kristall in Rotator und Spule**

Wenn dieser über eine Bewegung des Materials gedreht wird so führt der Spin entsprechende zyklische Bewegungen durch, welche als Frequenzverschiebung beobachtet werden können (R. Tycko, 'Adiabatic rotational splittings and Berry's phase in nuclear quadrupole resonance', Phys. Rev. Lett. 58, 2281-2284 (1987).) **F: Spektren, Shifts**

J.A. Cina, 'Classical adiabatic angle and geometrical phase in spin precession', Chem.Phys.Lett. 132, 393-95 (1986). J. Moody, A. Shapere, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 56, 893 (1986). This letter demonstrates the classical origin of the geometrical phase factor for a spin eigenstate which accompanies adiabatic traversal of a closed path, by the external magnetic field.

Eine direkte Analogie lässt sich auch zu optischen Phänomenen ziehen, da die optische Polarisation auch als Orientierung des Spins der Photonen interpretiert werden kann.

R.Y. Chiao and Y.S. Wu, 'Manifestation of Berry's topological phase for the photon', Phys. Rev. Lett. 57, 933-936 (1986).

Tomita and R.Y. Chiao, 'Observation of Berry's topological phase by use of an optical fiber', Phys. Rev. Lett. 57, 937-940 (1986).

R.Y. Chiao, A. Antaramian, K.M. Ganga, H. Jiao, and S.R. Wilkinson, 'Observation of a topological phase by means of a nonplanar Mach-Zehnder interferometer', Phys. Rev. Lett. 60, 1214-1217 (1988).

H. Jiao, S.R. Wilkinson, and R.Y. Chiao, 'Two topological phases in optics by means of a nonplanar Mach-Zehnder interferometer', Phys. Rev. A 39, 3475-3486 (1989).

### 3.3.2. Der molekulare Aharonov-Bohm Effekt

Systeme mit Jahn-Teller Verzerrung wurden schon im Kapitel 2 unter dem Titel "molekularer Aharonov-Bohm Effekt" vorgestellt.

C.A. Mead and D.G. Truhlar, 'On the determination of Born-Oppenheimer nuclear motion wave functions including complications due to canonical intersections and identical nuclei', J. Chem. Phys. 70, 2284-2296 (1979).

G. Herzberg and H.C. Longuet-Higgins, 'Intersection of potential energy surfaces in polyatomic molecules', Discuss. Faraday Soc. 35, 77 (1963).

Es wurde gezeigt, dass die Zustandsfunktion der Kerne zweiwertig ist wenn ein sogenannter "diabolischer Schnittpunkt" existiert. Dies erinnert natürlich stark an einen gebrochenen Spin. Entsprechend ordnen die Spektroskopiker solchen Molekülen gebrochene Drehimpuls Quantenzahlen zu. Ein bekanntes Beispiel dafür ist  $\text{Na}_3$  (G. Delacretaz, E.R. Grant, R.L. Whetten, L. Woeste, and J.W. Zwanziger, 'Fractional Quantization of Molecular Pseudorotation in  $\text{Na}_3$ ', Phys. Rev. Lett. 56, 2598-2601 (1986).).

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses System zu analysieren. Die gebrochene Quantenzahl in der elektronischen Funktion entspricht einer Zweiwertigkeit: die Funktion hängt vom Winkel  $\phi$  wie  $e^{i\phi/2}$  ab, d.h. die elektronische Zustandsfunktion ändert das Vorzeichen bei einer einmaligen Umrundung des entarteten Punktes.

So kann man sich auf die BO-Energie-Hyperfläche beschränken, die überall flach ist, allerdings ist sie nicht einfach zusammenhängend. Der Phasenfaktor ist in diesem Fall topologischer Natur.

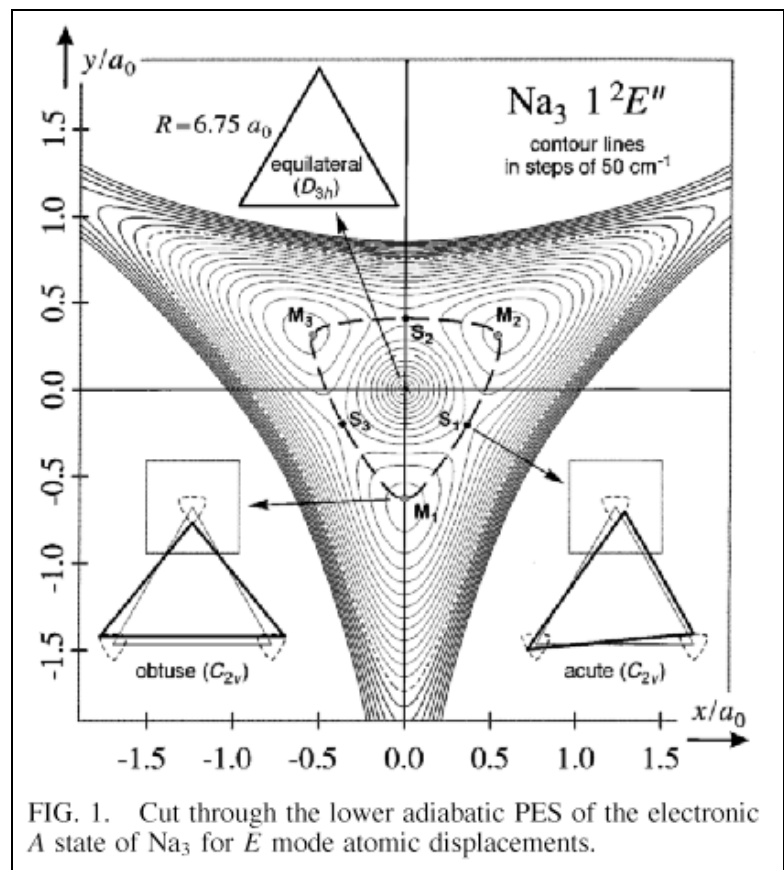
**Z: Spirale**

Die andere Möglichkeit besteht darin, die Fläche in der Nähe so zu krümmen dass die Entartung verschwindet. Dadurch wird die Phase wieder geometrisch.

**Z: Spitze / gerundete Spitze**

Neue Messungen / Rechnungen (H.v. Busch, V. Dev, H.-A. Eckel, S. Kasahara, J. Wang, W. Demtröder, P. Sebal, and W. Meyer, 'Unambiguous Proof for Berry's Phase in the Sodium Trimer: Analysis of the Transition  $A_2 E'' \leftrightarrow X_2 E''$ ', Phys. Rev. Lett. 81, 4584-4587 (1998).):

Die Figur zeigt die dreizählige Symmetrie der  $\text{Na}_3$  Hyperfläche. Mit dem symmetrischen Zustand in der Mitte. Die gestrichelte Trajektorie entspricht der Umrundung dieses diabolischen Punktes und sollte zu einem Vorzeichenwechsel in der elektronischen und in der Kern-Zustandsfunktion führen. Diese Pseudorotation kann im Vibrationsspektrum über die Zuordnung der Quantenzahlen detektiert werden.



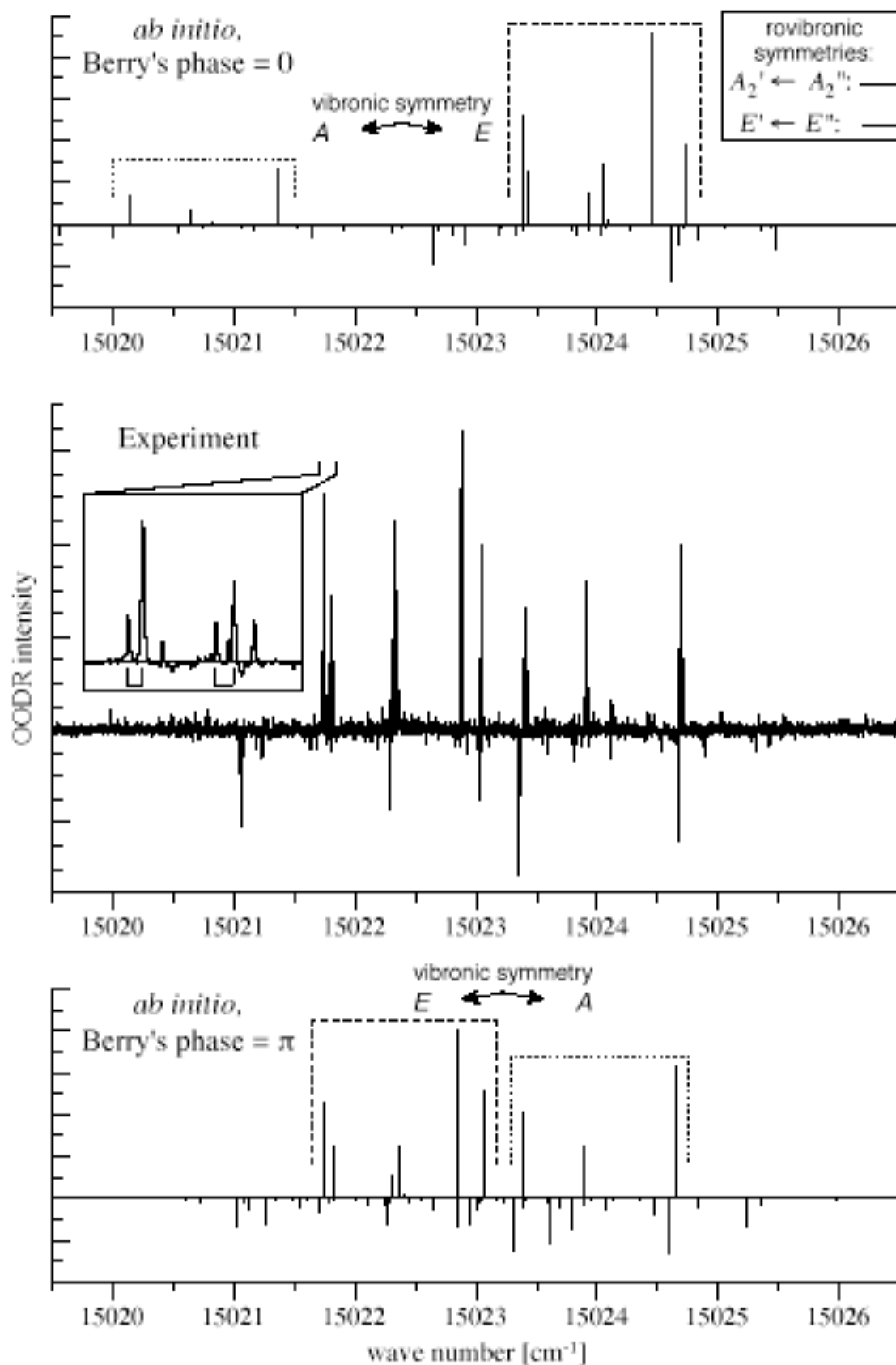


FIG. 3. OODR spectra in the band  $A(1,0,0) \leftarrow X(0,0,0)$  for the pump line marked in Fig. 2. Calculations with geometric phases of 0 and  $\pi$  are compared to the experimental spectrum.

Die Zuordnung der Vibrations- / Rotationsspektren ist deshalb eine geeignete Methode weil die Energie der Übergänge vom Drehimpuls abhängt. Die Pseudorotation führt aber zu gebrochenen Quantenzahlen und damit zu Verschiebungen der Übergangsfrequenzen, wie diese Spektren zeigen.

Ist diese Bewegung nicht einmalig, sondern z.B. stochastisch, so ändert sich die Phase des schnellen Systems ebenfalls stochastisch. Dies wird experimentell als Variation der Übergangsfrequenz gemessen werden, d.h. als Verschiebung und Verbreiterung von Resonanzlinien (F. Gaitan, 'Berry's phase in the presence of a stochastically evolving environment: A geometric mechanism for energy-level broadening', Phys. Rev. A 58, 1665-1677 (1998).).

### 3.3.3. Beispiele aus der Festkörperphysik

Berry's Phase kann auch die Leitfähigkeit von Festkörpern beeinflussen.

#### **Z: Superposition von konstantem und radialem B-Feld**

Wir betrachten dazu ein Magnetfeld, dessen Orientierung sich entlang eines Rings ändert (A. Stern, 'Berry's phase, motive forces, and mesoscopic conductivity', Phys. Rev. Lett. 68, 1022-1025 (1992).). Entlang eines Ringes bleibt die Vektorsumme der beiden Magnetfeldkomponenten betragsmäßig konstant, ändert aber die Richtung. Ein Elektron, das sich entlang dieses Ringes bewegt, erfährt deshalb ein adiabatisch variierendes Magnetfeld, dessen Richtung einen Kegel mit Öffnungswinkel  $\alpha$  beschreibt. Dementsprechend erhält das Elektron einen zusätzlichen Phasenfaktor

$$\Omega_g = \pi(1 \pm \cos\alpha) ,$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt ob der Spin des Elektrons parallel oder antiparallel zum Feld steht. Die stationäre Zustandsfunktion erhält damit einen geometrischen Teil, welcher über die Randbedingung, dass die Funktion einwertig sei, auch die Bedingung für das Fließen eines Stroms beeinflusst - ähnlich wie beim Josephson Effekt.

Ist der Fluß zeitabhängig so kann auch eine Kraft auftreten, welche direkt das Fließen des Stroms beeinflusst.

Die Beschreibung des gebrochenen Quanten-Hall Effektes verwendet auch ähnliche Ansätze wie Berry's Phase oder den Aharonov-Bohm Effekt (G.W. Semenoff and P. Sodano,

#### **Z: Teilchen und Flusslinien**

'Non-abelian adiabatic phase and the fractional quantum Hall effect', Phys. Rev. Lett. 57, 1195-1198 (1986).): Man betrachtet Quasiteilchen aus Elektronen und Flussquanten in einem zweidimensionalen System. Wenn man zwei Teilchen austauscht, indem man sie langsam aneinander vorbei schiebt entspricht dies in einem geeigneten System einer Bewegung eines geladenen Teilchens um ein Flussquant, so dass ein das System lediglich modulo eines Phasenfaktors in den Ausgangszustand zurückkehrt. Je nachdem ob dieser Pha-

senfaktor 0 ist gehorchen die Teilchen einer Bose-Einstein Statistik oder bei  $\phi = \pi$  einer Fermi-Dirac Statistik. Sind beliebige Faktoren möglich werden die Teilchen gemäß Frank Wilczek als "Anyons" bezeichnet.

### 3.3.4. Pancharatnam's Phase

Eine der am längsten bekannten und experimentell am leichtesten zugänglichen Systeme, die einen Berry's Phase Effekt zeigen, sind optische Systeme. Eine Reihe von solchen Effekten wurde schon in den 50er Jahren vom indischen Physiker Pancharatnam untersucht. Optische Felder können natürlich im allgemeinen auch klassisch, d.h. mit Hilfe der Maxwell Gleichungen beschrieben werden. Allerdings gelten die Resultate auch quantenmechanisch und in diesem Fall sind sie auch direkt auf andere Vektorfelder übertragbar.

Referenzen: S. Pancharatnam, '*Generalized theory of interference and its applications*', Proc. Ind. Acad. Sci. 44, 247-262 (1956);

M.V. Berry, '*The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light*', J. Mod. Optics 34, 1401-1407 (1987);

R. Bhandari and J. Samuel, '*Observation of topological phase by use of a laser interferometer*', Phys. Rev. Lett. 60, 1211-1213 (1988).

Er stellte die Frage, wie man die Phase zweier optischer Felder vergleichen kann wenn sie unterschiedliche Polarisierungen aufweisen. Bei gleicher Polarisation ist es natürlich einfach, da man die entsprechenden Felder überlagern kann.

$$E_2 = E_1 |a| e^{i\phi} .$$

Die relative Phase manifestiert sich dann direkt über die Interferenz. Bei unterschiedlichen Polarisierungen müssen die Felder aber als Vektoren geschrieben werden, welche durch Multiplikation mit einer Matrix ineinander übergeführt werden:

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{E}_1 .$$

Um etwas spezifischer zu werden betrachten wir eine ebene optische Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet. Das elektrische Feld liegt demnach in der xy-Ebene:

$$\vec{E} = (E_x, E_y) ; \quad \text{Normierung: } |E_x|^2 + |E_y|^2 = 1 .$$

In sphärischen Koordinaten kann dies geschrieben werden als

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_x + iE_y \\ E_x - iE_y \end{pmatrix} .$$

Die Basis wird hier durch die zirkular polarisierten Wellen gebildet und die Vektor-komponenten  $E_{\pm} = E_x \pm i E_y$  sind die komplexen Amplituden der Welle.

### 3.3.5. Abbildung auf die Poincaré Kugel

Um eine Beziehung zu Berry's Phase herzustellen schreiben wir diesen Feldvektor als eine zweikomponentige Wellenfunktion, d.h. als einem Spinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} .$$

Diese Zustandsfunktion ist ein Eigenvektor mit Eigenwert  $+1/2$  eines Operators der Form

$$\mathcal{H}(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} ,$$

wobei  $\vec{\sigma}$  den Vektor der Pauli-Matrizen darstellt und  $\vec{r}$  einen Einheitsvektor mit den Polarkoordinaten  $\theta, \phi$ .

Die Poincaré Kugel ist die Einheitskugel mit den Koordinaten  $\theta, \phi$ . Jede Position  $\vec{r}_A$  auf dieser Kugel definiert einen Operator  $\mathcal{H}(\vec{r}_A)$ , dessen Eigenvektor  $|\Psi(\vec{r}_A)\rangle = |A\rangle$  eine bestimmte Polarisation darstellt. Diese Definition bedeutet, dass

$$\mathcal{H}(\vec{r}_A) |A\rangle = +\frac{1}{2} |A\rangle .$$

Die Pole der Kugel ( $\theta=0$ ) und ( $\theta=\pi$ ) entsprechen den Zuständen mit  $E_- = 0$ , resp.  $E_+ = 0$ , und stellen zirkulare Polarisationen dar.

**Z: Poincaré Kugel**

Punkte auf dem Äquator (d.h.  $\theta = \pi/2$ ) entsprechen Polarisationen bei denen die beiden zirkularen Komponenten den gleichen Absolutbetrag aufweisen,  $|\Psi_+| = |\Psi_-|$ , wobei  $\phi$  die Richtung der Polarisation bestimmt. Gegenüberliegende Punkte entsprechen orthogonalen Polarisationen. Die oberer Hälfte der Kugel entspricht rechtehändiger Polarisation, die untere linkshändiger. Mit Ausnahme der Pole und des Äquators entsprechen alle Punkte elliptischer Polarisation.

Die relative Phase zweier Zustände  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  ist aus dieser Definition nicht bestimmt und kann nach Belieben festgelegt werden. Pancharatnam's Ansatz war, die Phase über die Interferenz zwischen zwei Zuständen zu definieren: die relative Phasendifferenz ist nach dieser Definition dann Null wenn die Interferenz maximal wird. Die Intensität eines Überlagerungszustandes  $|A\rangle + |B\rangle$  ist

$$(\langle A| + \langle B|)(|A\rangle + |B\rangle) = 2 + 2 |\langle A|B\rangle| \cos(\text{ph}\langle A|B\rangle) ,$$

sofern die beiden Amplituden  $|A|$  und  $|B|$  gleich eins sind. Somit ist die relative Phase zweier Zustände unterschiedlicher Polarisierung gleich der Phase des Skalarproduktes. Diese verschwindet genau dann wenn  $\langle A|B \rangle$  reell und positiv ist. Diese Referenzbedingung wird als "Pancharatnam's Verbindung" bezeichnet. Auf der Poincaré Kugel entspricht sie einer parallelen Verschiebung entlang einem Großkreis.

Ein interessanter Aspekt dieser natürlichen Definition ist, dass sie nicht transitiv ist. Dies bedeutet, dass

$$A \sim B, B \sim C \quad \not\rightarrow \quad A \sim C ,$$

wobei  $A \sim B$  dafür steht, dass die relative Phase verschwindet.

### 3.3.6. Phasendifferenzen für geschlossene Kurven

Wenn wir einen Zustand  $|A'\rangle$  definieren, welcher der gleichen Position auf der Poincaré Kugel entspricht wie  $|A\rangle$  und mit  $|C\rangle$  in Phase ist, so ist die relative Phase von  $|A\rangle$  und  $|A'\rangle$

$$\langle A|A'\rangle = e^{-i\Omega_{ABC}/2} ,$$

**Z: Dreieck ABCA'**

wobei  $\Omega_{ABC}$  die Fläche des geodätischen Dreiecks ABC auf der Einheitskugel beschreibt. Dies folgt direkt aus der Definition der relativen Phase, welche parallelen Transport entlang einem Großkreis beschreibt.

Ein solcher Transport kann durch eine unitäre Transformation beschrieben werden:

$$|B\rangle = U |A\rangle \quad \text{mit} \quad U = \exp(-i \phi_{AB} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) ,$$

**Z: Transport A->B**

wobei  $\phi_{AB}$  den Winkel zwischen A und B darstellt und  $\vec{n}$  die Richtung der Rotationsachse. Als Beispiel wählen wir eine Drehung der Polarisation von der +z zur +x Achse. Die Rotationsachse ist dann die y-Achse und der entsprechende Operator lautet

$$U_{zx} = \exp(-i \phi_{AB} \sigma_y) .$$

Der Operator U kann für einen Spin 1/2 auch geschrieben werden als

$$U = \cos(\phi_{AB}/2) - i \sin(\phi_{AB}/2) \vec{n} \cdot \vec{\sigma} .$$

Somit wird der Überlapp zwischen A und B

$$\langle A|B\rangle = \cos(\phi_{AB}/2) - i \sin(\phi_{AB}/2) \langle A|\vec{n} \cdot \vec{\sigma}|A\rangle .$$

Der zweite Term verschwindet weil  $\vec{n}$  senkrecht zur Richtung steht, welche die Polarisation von A beschreibt. Damit wird

$$\langle A|B \rangle = \cos(\phi_{AB}/2) .$$

Damit ist gezeigt, dass für diese Transformation das Skalarprodukt reell und positiv wird, sofern  $\phi_{AB}/2 < \pi$ , d.h. solange die Verbindungslinie entlang dem kürzesten Weg gewählt wird.

Die Verbindung zwischen den beiden Zuständen kann aber auch durch eine Projektion geschehen: wir projizieren den Zustand A auf den Zustand B. Dies entspricht z.B. der Verwendung eines idealen Polarisators, welches das Licht transmittiert, welches eine bestimmte lineare Polarisation aufweist und alles andere absorbiert (oder ablenkt). Wird z.B. zirkular polarisiertes Licht auf einen Polarisator geschickt, der in x-Richtung orientiert ist, so projiziert dieser den Zustand des Lichtes auf den linear in x-Richtung polarisierten Anteil. Die Phase des transmittierten Lichtfeldes ist gegeben durch die Phase des ursprünglichen zirkular polarisierten Feldes.

Dies war die Methode, welche Pancharatnam in seiner ursprünglichen Arbeit verwendete. Man kann die optischen Phasen z.B. mit Hilfe eines Interferometers messen, welches einen Laserstrahl in zwei Arme aufteilt. In den beiden Armen wird mit Hilfe von Polarisatoren und Verzögerungsplatten die Polarisation auf unterschiedliche Weise gedreht. Die Phasenverschiebung am Ende ist proportional zum Raumwinkel den die entsprechende Trajektorie auf der Poincaré Kugel einschließt.

### **Z: AB-Polarisationsmessung**



## 3.4 Paralleler Transport

### 3.4.1. Nützliches aus der Differentialgeometrie

Es stellt sich heraus, dass eine der nützlichsten Beschreibungen für solche Phasen auf einem geometrischen Konzept basiert, demjenigen des parallelen Transports. Es geht dabei um die Abbildung einer gekrümmten Fläche auf ein Vektorfeld oder, anders ausgedrückt, um die Frage, wie zwei Vektoren an benachbarten Punkten einer gekrümmten Fläche orientiert sein müssen damit man sie als parallel bezeichnen kann.

Paralleler Transport ist in der euklidischen Ebene sehr einfach zu beschreiben. Auf einer gekrümmten Fläche beschreibt man parallelen Transport so, dass man an jedem Punkt der Fläche eine Tangentialebene ansetzt und der Transport in dieser Ebene parallel erfolgen muß. Diese Definition ergibt auf jeder differenzierbaren Fläche eine klare Vorschrift. Es muß aber beachtet werden, dass die Definition lokal ist, d.h. sie sagt nur etwas aus über Punkte, die nur um infinitesimale Distanzen getrennt sind. Bei endlichen Abständen kann damit keine Aussage gemacht werden. Es ist natürlich möglich, zwischen zwei Punkten eine Kurve zu definieren und für einen Transport entlang dieser Kurve die Bedingung immer zwischen zwei benachbarten Punkten zu erfüllen. Dies wird als paralleler Transport bezeichnet.

**Z: Tangentialebene**

Wir betrachten als Beispiel parallelen Transport auf einer Kugel. Wie nehmen an, dass sich ein Experimentalphysiker am Äquator auf Null Grad geographischer Breite befindet und einen Vektor in Richtung Norden orientiert. Bewegt er sich auf dem Null-Meridian nach Norden so bedingt paralleler Transport, dass der Vektor immer nach Norden zeigt. Wenn er den Nordpol erreicht soll er sich dem 90-Grad Meridian entlang nach Süden bewegen. Paralleler Transport bedeutet nun, dass sein Referenzvektor immer nach Osten zeigt. Wenn er am Äquator anlangt soll er dem Äquator folgen bis er wieder am Ausgangspunkt anlangt. Hat er die ganze Reise mit parallelem Transport überstanden, so ist am Endpunkt der Referenzvektor immer noch nach Osten ausgerichtet, nicht mehr wie zu Beginn nach Norden. Dieser Befund ist ein direkter Beweis für die Krümmung der Erde. Die Drehung des Referenzvektors ist ein direktes Maß für die integrierte Krümmung der Fläche, die durch den Pfad eingeschlossen wird. Bei der Erde ist das Integral der Krümmung gera-



de gleich dem Raumwinkel den die Bahn einschließt, da die Krümmung einer Kugel konstant  $1/r^2$  beträgt.

### 3.4.2. Paralleler Transport und geometrische Phasen

Für die geometrischen Phasen wie Berry's Phase ist paralleler Transport eine geeignete Darstellung. Der Integrand der geometrischen Phase

$$\gamma_\eta(C) = i \oint \langle \eta | \frac{d}{ds} \eta \rangle ds$$

verschwindet wenn der Transport entlang dem Pfad C durch parallelen Transport definiert ist. Dies ist aber für eine einwertige Basis nicht möglich, wie oben für parallelen Transport auf der Kugel gezeigt. Die einwertige Basis muss offenbar einen zusätzlichen Phasenfaktor enthalten, der gerade die Berry-Phase ergibt. Wie die Phase für die Basisfunktionen als Funktion der Pfadvariablen s variiert ist beliebig, der Wert des Schleifenintegrals ist unabhängig davon. Da die Basis eindeutig sein muß erhält man für das Integral immer den gleichen Wert.

Im Fall der Kugel gesehen hatten dass die resultierende Phase durch die von der Trajektorie eingeschlossene Fläche gegeben ist.

Allgemein wird der Winkel, den man durch parallelen Transport entlang einer geschlossenen Kurve erhält in der Differentialgeometrie als die integrierte Krümmung der eingeschlossenen Fläche definiert. Somit stellt Berry's Phase einfach die Krümmung der entsprechenden Fläche im Parameterraum des Hamiltonoperators dar.

**Z: Trajektorie / Krümmung**

**Z: Krümmung / paralleler Transport in Ebene / auf Kugel**

Die lokale Krümmung verschwindet für eine Ebene und ist auf einer Kugel gegeben durch  $1/R^2$ .

### 3.4.3. Faserbündel

Eine weitere mathematische Beschreibungsweise verwendet das Konzept eines Faserbündels.

Hier wird auf der gekrümmten Ebene zu jedem Punkt eine Faser errichtet. Die gekrümmte Fläche stellt den relevanten Teil des Parameterraums dar, in der sich der Pfad C befindet. Die Faser entspricht der Phase des Zustandes an dieser Stelle. Dem Pfad C in der Fläche M entspricht offenbar ein Pfad im Faserbündel, der durch den aktuellen Wert der Phase an der jeweiligen Stelle bestimmt wird. Die mathematische Funktion, welche die beiden Pfade verbindet, wird als Verbindung bezeichnet.

**Z: Faserbündel**

Je nach Wahl der Phase der Basiszustände wird dieser Pfad unterschiedlich ausfallen. Aufgrund der Krümmung ist er aber nicht geschlossen, und die Differenz zwischen dem Anfangs- und Endwert auf der gleichen Faser entspricht der Holonomie, d.h. der geometrischen Phase  $\gamma(C)$ .

H.J. Bernstein and A.V. Phillips, '*Fiber bundles and quantum theory*', Sci. Am. July 1981, 122-(1981).

B. Simon, '*Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase*', Phys. Rev. Lett. 51, 2167-2170 (1983).

## 3.5 Verallgemeinerungen

### 3.5.1. Zyklische Evolution

Geometrische Phasen treten nicht nur bei adiabatischer Evolution auf, sondern allgemein bei zyklischer Evolution (Y. Aharonov and J. Anandan, 'Phase Change during a cyclic quantum evolution', Phys. Rev. Lett. 58, 1593-1596 (1987)). Darunter versteht man eine Evolution, bei der der quantenmechanische Zustand nach einer Zeit  $\tau$  bis auf einen Phasenfaktor wieder identisch ist mit dem Anfangszustand,

$$\Psi(\tau) = \Psi(0) e^{i\phi} .$$

Im Gegensatz zum adiabatischen Fall ist hier somit nicht die Voraussetzung dass der Hamiltonoperator im Parameterraum wieder den Ausgangswert erreicht, sondern der Zustand im Hilbertraum auf den gleichen Strahl zurückkehrt. Man spricht vom projektiven Hilbertraum, der auch dem Raum der möglichen Dichteoperatoren entspricht: Zustände, die sich nur durch ihre Phase unterscheiden besitzen den gleichen Dichteoperator.

Auch hier kann die Phase

$$\phi = \phi_{\text{dyn}} + \phi_{\text{geom}} .$$

in einen dynamischen Teil  $\phi_{\text{dyn}}$  und einen geometrischen Teil  $\phi_{\text{geom}}$  getrennt werden. Der dynamische Teil ist gegeben durch den Erwartungswert der Energie

$$\phi_{\text{dyn}} = -i \int dt \langle \mathcal{E} \rangle(t) = -i \int dt \langle \Psi(t) | \mathcal{H}(t) | \Psi(t) \rangle ,$$

und der geometrische Teil als

$$\phi_{\text{geom}} = i \int dt \langle \Psi(t) | \frac{d}{dt} | \Psi(t) \rangle .$$

Genau wie im Fall der adiabatischen Phase ist auch hier der geometrische Anteil gegeben durch das Integral aufgrund des parallelen Transports, d.h. durch die integrierte Krümmung der entsprechenden Hyperfläche.

Experiment: NMR (D. Suter, K.T. Mueller, and A. Pines, 'Study of the Aharonov-Anandan Phase by NMR Interferometry', Phys. Rev. Lett. 60, 1218-1220 (1988)).

### 3.5.2. Nicht-Abelsche Berry Phasen

Die bisher diskutierten Phasen bezogen sich immer auf einen einzelnen Zustand. Dass es möglich ist, die Zustände eines Systems einzeln zu behandeln, folgt aus der Herleitung über das adiabatische Theorem: es besagt, dass jeder Eigenzustand in *einen*

entsprechenden Eigenzustand des veränderten Hamiltonoperators übergeht. Somit spielen die anderen Zustände keine Rolle.

Dies ändert sich wenn Entartungen vorliegen (F. Wilczek and A. Zee, 'Appearance of gauge structure in simple dynamical systems', Phys. Rev. Lett. 52, 2111-2114 (1984).). In diesem Fall ist eine adiabatische Änderung des Hamiltonoperators nicht mehr möglich, auch beliebig langsame Änderungen führen - je nach der gewählten Eigenbasis - zu Übergängen. In diesem Fall muss also der entartete Unterraum gesamthaft behandelt werden. In diesem Fall wird die "Phase"  $\gamma(C)$  zu einem Operator, d.h. zu einer  $n \times n$  Matrix, wobei  $n$  den Entartungsgrad darstellt. Dieser Operator stellt den geometrischen Teil des Evolutionsoperators dar. Man bezeichnet dies als nicht-abelsche geometrische Phase.

Eine interessante Anwendung davon ist der Ansatz, dass die Zustände eines zweidimensionalen Elektronengases, welche den gebrochenen Quanten-Hall Effekt zeigen, eine nicht-Abelsche Berry-Phase zeigen (G.W. Semenoff and P. Sodano, 'Non-abelian adiabatic phase and the fractional quantum Hall effect', Phys. Rev. Lett. 57, 1195-1198 (1986).).

### **3.5.3. Rotation eines Pendels**

Auch bei klassischen mechanischen Systemen findet man einen sehr vergleichbaren Effekt (J.H. Hannay, J.Phys.A 18, 221 (1985); M.V. Berry, 'Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase', J.Phys.A 18, 15-27 (1985).). Man betrachtet hier wiederum ein System, das von einem oder mehreren Parametern abhängt, die sich als Funktion der Zeit verändern. Die klassische Mechanik kann auch in Form von Winkeln geschrieben werden. Diese Winkel weisen eine Zeitabhängigkeit auf, die wiederum in einen dynamischen und einen geometrischen Teil aufgetrennt werden kann. Der dynamische Teil entspricht dem Anteil, den man erhält, wenn man die Zeitabhängigkeit der Parameter vernachlässigt.

Das Beispiel, das Hannay diskutiert, ist die reibungsfreie Rotation einer Perle auf einer Drahtschleife. Der geometrische Teil der Winkeländerung hängt von der Form der Drahtschleife ab. Ein gutes Beispiel, das sehr ähnlich ist wie das quantenmechanische Spinsystem ist ein Rotationspendel. Ein Rotationspendel entspricht einer Schwingung um eine bevorzugte Achse, die im Allgemeinen durch die Richtung des Schwerfeldes bestimmt wird. Der Rotationswinkel ist in einem Inertialsystem durch die Schwingungsfrequenz des Pendels bestimmt, die wiederum einfach durch die Länge des Pendels und die Schwerebeschleunigung bestimmt wird

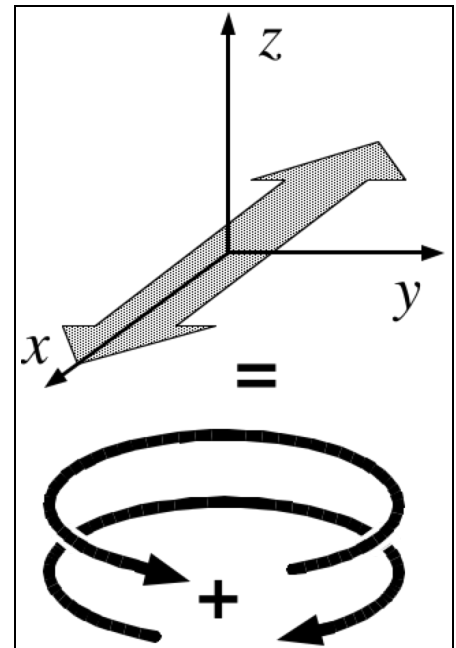
$$\omega = \sqrt{g/l} .$$

Wird ein solches Pendel auf der Erde befestigt, so dreht sich die Richtung des Schwerfeldes langsam aufgrund der Erdrotation. Dadurch entsteht ein geometrischer zusätzlicher Beitrag von

$$\delta\omega = \omega_{\text{rot}} \sin\phi \text{ mit } \phi = \text{geographische Breite} ,$$

wobei das Vorzeichen von der relativen Orientierung der Rotation des Pendels und der Erdrotation abhängt.

Eine sinnvolle Möglichkeit, diese zusätzliche Rotation sichtbar zu machen ist der Vergleich von zwei Pendeln, die in entgegengesetzter Richtung rotieren. Damit deren Frequenz wirklich die gleiche ist, wählt man am besten das gleiche Pendel dafür. Dies ist möglich wenn man eine lineare Oszillation wählt, die ja als Superposition von zwei entgegengesetzten Drehbewegungen betrachtet werden kann. Da die geometrischen Teile der Winkelvariablen für die beiden entgegengesetzten Rotationsrichtungen entgegengesetztes Vorzeichen haben ändert sich im Laufe der Drehung die Schwingungsrichtung der linearen Schwingung. Dies entspricht offensichtlich gerade dem Foucault-Pendel. Dieses Experiment wurde erstmals 1661 von V. Viviani durchgeführt und von Foucault (1819-1868) 1851 als Demonstrationsexperiment im Pariser Panthéon aufgebaut.



Dieses Experiment kann man sich auch wieder als parallelen Transport vorstellen: Die Schwingungsebene des Pendels wird immer parallel zu der Ebene sein, die sie einen infinitesimalen Zeitpunkt vorher eingenommen hat. Eine  $2\pi$  Rotation um die Erdachse muß somit eine Drehung ergeben, die durch den Raumwinkel der Bahn bestimmt wird und damit durch die geographische Breite des Experimentes.

**Z: Erdrotation**

### 3.5.4. Weitere klassische Analoga

Ein weiteres klassisches System, das ähnlich funktioniert sind Amöben. Dies sind kleine einzellige Organismen, die in flüssigen Medien leben. Die Hydrodynamik wird weitgehend bestimmt durch die Reynolds-Zahl

$$R = d v \rho / \eta$$

$d$  = typische Dimension     $v$  = Geschwindigkeit     $\rho$  = Dichte     $\eta$  = Viskosität

Aufgrund der geringen Größe ist sie somit für einen solchen Organismus sehr klein. Verglichen mit einem großen Organismus wirkt deshalb Wasser für einen kleinen Organismus sehr viskos. Dadurch kann er nicht wie wir schwimmen. Menschliche Schwimmer nutzen unter Wasser die Trägheit des Wassers in dem sie Bewegungen durchführen, die in unterschiedliche Richtungen unterschiedlich schnell sind. Dies funktioniert aber nur weil die Viskosität des Mediums dabei keine wesentliche Rolle spielt. Eine Amöbe würde mit solchen Schwimmbewegungen nicht vorwärts kommen. Sie hat aber die Möglichkeit, ihre Form zu ändern. Eine Abfolge von geeigneten For-

mänderungen kann dazu führen, dass der Organismus wieder seine Ausgangsform annimmt, aber sich dabei an einem anderen Ort befindet. (A. Shapere and F. Wilczek, '*Self propulsion at low Reynolds numbers*', Phys. Rev. Lett. 58, 2051-2054 (1987).).

Ein ähnliches Problem ist die Rotation eines Objekts, das keine Möglichkeit hat, sich festzuhalten, wie z.B. ein Astronaut im Weltraum. Eine Translation oder Rotation aufgrund von Formveränderungen ist möglich wenn der Raum der Formen, die der Organismus durchlaufen kann gekrümmt ist. Eine effiziente Schwimmbewegung muß zyklisch sein und findet dann in einem Bereich mit hoher Krümmung stark.